УДК 517-946

А.Л.Бухгейм, В.Б.Кардаков

ЗАДАЧА РАДОНА В КОЛЬЦЕ С ВЕСОМ

Исследуется корректность постановки задачи о восстановлении в кольце $K=\{x/x\in R^2, 0<\varkappa\leqslant|x|\leqslant 1\}$ функции u по известным от нее интегралам по прямым с заданной весовой функцией a. Для любого $0<\varkappa\leqslant 1$ доказана теорема единственности. Для $0<\varkappa$, удовлетворяющих условию вида $F(\varkappa, h_2/h_1)<1$, где h_1, h_2 – ограничения на весовую функцию a: $0<h_1<|a|<h_2$, получена точная оценка зависимости решения от исходной неполной информации.

В работе получена оценка устойчивости задачи Радона с произвольным аналитическим весом в случае неполных проекционных данных или, другими словами, при наличии непрозрачного препятствия в просвечиваемом теле. При этом мы не требуем гладкости искомой функции, а предполагаем только, что она имеет ограниченную вариацию по каждой переменной, что более естественно для приложений. Перейдем к точной постановке задачи.

В полярных координатах задача сводится к решению следующего интегрального уравнения первого рода

$$p(\alpha,z)=(Au)(\alpha,z)\equiv\int_{\Pi}\delta(z-\rho\cos(\beta-\alpha))a(\beta,\alpha,z)u(\beta,\rho)\times \\ \times\rho d\rho d\beta, \tag{1}$$

где $u(\beta,\rho)$ – искомая в кольце функция, периодическая по β, $a(\beta,\alpha,z)$ – заданная весовая функция, периодическая по α,β, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. $\Pi=[-\pi,\pi]\times[\varkappa,1]$.

Требуется по известной в кольце функции $p(\alpha,z)$ определить $u(\beta,\rho)$.

Поставленная задача очевидно некорректна в смысле Адамара, и поэтому для получения условной оценки устойчивости необходимо ввести множество корректности M. Пусть M – множество функций $u(\beta,\rho)$, заданных в кольце K, и таковых, что их полная вариация по каждой переменной ограничена постоянной B равномерно относительно другой переменной. Сформулируем основной результат.

Вычислительная томография. Куйбышев, 1990.

Теорема. Пусть функция $q(\alpha, z, t) = a(\alpha + arctg\frac{t}{z}, \alpha, z)\cdot z$ непрерывна по $z \in [\varkappa, 1]$, $\varkappa > 0$, аналитична по α, t в комплексной области $\mathcal{D}$:

$|Im\alpha| \leq \sigma\cdot\varkappa, |Im\, t| \leq \sigma\cdot\varkappa, |Re\, t| \leq \sqrt{1-\varkappa^2} + \sigma\cdot\varkappa$ число $\sigma \in (0,1)$

и периодична по $Re\,\alpha$ с периодом 2π, причем существуют числа h_1, h_2 такие, что для всех $(z, \alpha, t) \in [\varkappa, 1] \times \mathcal{D}$ выполнены неравенства

$$|q(\alpha, z, t)| \leq h_1 < \infty, \; |a(\alpha, \alpha, z)| \geq h_2 > 0. \qquad (2)$$

Тогда для любого числа $\varkappa \in (0,1)$ решение (I) единственно в $L_1(\Pi)$. Кроме того, если $u \in M$, а $\varkappa$ удовлетворяет условию

$$(1-\varkappa)\frac{h_1 + h_2}{\varkappa h_2 \sigma}\cdot C_1 < \frac{1}{e}, \qquad (3)$$

где e – число Эйлера, C_1 – постоянная, зависящая от σ, то

$$\|u\|_{L_1(\Pi)} \leq C_2 \ln^{-1/2} \frac{C_2}{\|p\|_{L_1(\Pi)}}. \qquad (4)$$

Здесь $C_2 = C_2(h_1, h_2, \varkappa, \sigma, B)$, а $\|d(x)\|_{L_1(\Pi)} = \int\limits_{\Pi} |d(x)|\,dx$.

Заметим, что оценка (4) точна по порядку.

Доказательство. Оператор A по непрерывности продолжаем на $L_1(\Pi)$. Заметим, что в формуле (I) интегрирование производится по кривым $\ell(\alpha, z)$: $z = \rho\cos(\beta - \alpha), \alpha, z$ – фиксированы. Сопряженный относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в L_2 оператор A^* имеет вид

$$(A^*V)(\beta, \rho) = \int\limits_{\Pi} \delta(z - \rho\cos(\beta - \alpha))\, a(\beta, \alpha, z)\, V(\alpha, z)\, z\, dz\, d\alpha, \qquad (5)$$

В (5) интегрирование проводится по кривым $\ell^*(\beta, \rho)$: $z = \rho\cos(\beta - \alpha), \beta, \rho$ фиксированы. Рассмотрим функцию $\gamma(\alpha, z, t)$, являющуюся решением задачи Коши:

$$P\mathscr{b} \equiv t D_z \mathscr{b} + D_\alpha \mathscr{b} - z D_t \mathscr{b} = q(\alpha, z, t)\, V(\alpha, z), \tag{6}$$

$$\mathscr{b}(\alpha, \varkappa, t) = f(\alpha, t), \tag{7}$$

где D_x – оператор дифференцирования по x.

Взяв $t = \dfrac{dz}{d\alpha}$ заметим, что вдоль кривой $\ell^*(\beta, \rho)$

$$(P\mathscr{b})\left(\alpha, z, \frac{dz}{d\alpha}\right) = D_\alpha \mathscr{b}\left(\alpha, z, \frac{dz}{d\alpha}\right). \tag{8}$$

Учитывая выражения (5)-(8), получаем

$$(A^* V)(\beta, \rho) = f\left(\beta + \arccos\frac{\varkappa}{\rho}, -\sqrt{\rho^2 - \varkappa^2}\right) - f\left(\beta - \arccos\frac{\varkappa}{\rho}, \sqrt{\rho^2 - \varkappa^2}\right) \equiv (Tf)(\beta, \rho). \tag{9}$$

Отсюда

$$(Au, V) = \langle u, A^* V \rangle = \langle u, TV \rangle = \langle Tf, u \rangle = \langle f, T^* u \rangle, \tag{10}$$

где через T^* обозначен оператор, сопряженный к T.

Положив

$$\chi_1(\alpha, t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \sqrt{1-\varkappa^2}] \\ 0, & t \notin [0, \sqrt{1-\varkappa^2}], \end{cases} \qquad \chi_2(\alpha, t) = \begin{cases} 1, & t \in [-\sqrt{1-\varkappa^2}, 0] \\ 0, & t \notin [-\sqrt{1-\varkappa^2}, 0], \end{cases}$$

получаем явное выражение для T^*:

$$(T^* u)(\alpha, t) = \sum_{j=1}^{2} (-1)^j \chi_j(\alpha, t)\, u\left(\alpha + \arcsin\frac{t}{\sqrt{\varkappa^2 + t^2}}, \sqrt{t^2 + \varkappa^2}\right) |t|. \tag{11}$$

Далее нетрудно получить

$$\| T^{*} u \|_{L_1(\Pi_1)} = 2 \cdot \| u \|_{L_1(\Pi)}, \tag{12}$$

где $\Pi_1 = [-\pi, \pi] \times [-\sqrt{1-\varkappa^2}, \sqrt{1-\varkappa^2}]$.

В силу (2) имеем следующее: задача (6)-(7) эквивалентна интегро-дифференциальному уравнению

$$b(\alpha, z, t) = f(\alpha, t) + (Vb)(\alpha, z, t), \tag{13}$$

где $(Vb)(\alpha, z, t) = \int\limits_{\varkappa}^{z} \{ [a(\alpha, \alpha, \eta)\eta]^{-1} [D_\alpha b(\alpha, \eta, 0) -$
$- \eta D_t b(\alpha, \eta, 0)] R\varphi(\alpha, \eta, t) - R(D_\alpha b - \eta D_t b)(\alpha, \eta, t) \} d\eta$ и

$$R\varphi(\alpha, \eta, t) = \frac{\varphi(\alpha, \eta, t) - \varphi(\alpha, \eta, 0)}{t}.$$

Пусть X_S банахово пространство функций, аналитических в комплексной области:

$\Pi_S = \{ (\alpha, t) \,/\, |Im\alpha| \leqslant \mu(1+S), |Im t| \leqslant \mu(1+S), |Re t| \leqslant \sqrt{1-\varkappa^2} +$
$+ \mu(1+S), S \in [0,1], \mu \leqslant \sigma \cdot \varkappa \}$

и ограниченных в ее замыкании, с нормой $\| f(\alpha,t) \|_S = \sup | f(\alpha,t) |, (\alpha,t) \in \overline{\Pi}_S$.
Тогда из результатов [I , с. 79, теорема I.I] применительно к нашему случаю следует, что для любой $f(\alpha, t) \in X_1$ существует решение $b(\alpha, z, t) \in C([\varkappa, 1], X_{1/2})$, если выполнено условие (3).

Кроме того,

$$\| b \|_{C([\varkappa,1], X_{1/2})} \leqslant C_4(h_1, h_2, \varkappa) \| f \|_{C([\varkappa,1], X_1)}. \tag{14}$$

Взяв

$$f(\alpha, t) = exp(-i\alpha n - it\varphi) \tag{15}$$

и положив

$$U(\alpha,t)=\begin{cases} -u\left(\alpha+\arcsin\dfrac{t}{\sqrt{t^2+æ^2}},\ \sqrt{t^2+æ^2}\right), & t\in(-\sqrt{1-æ^2},\sqrt{1-æ^2}),\\ 0, & t\notin(-\sqrt{1-æ^2},\sqrt{1-æ^2}),\end{cases}$$

введем следующие обозначения:

$$\langle T^{*}u,f\rangle=\int_{\Pi_1}U(\alpha,t)\exp(-i\alpha n-it\xi)\,d\alpha\,dt\equiv\hat{U}_n(\xi),$$

$$\hat{U}(\alpha,\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}U(\alpha,t)\exp(-it\xi)\,dt,\quad U_n(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}U(\alpha,t)\exp(-i\alpha n)\,d\alpha.$$

Предполагая, что $\|p\|_{L_1(\Pi)}\leqslant\varepsilon$, из выражений (I0),(I4),(I5) получаем

$$|\hat{U}_n(\xi)|\leqslant C_5(h_1,h_2,æ)\exp(2\mu(|n|+|\xi|))\cdot\varepsilon, \tag{I6}$$

а для $u\in M$ имеем

$$\sup_{\alpha}|\hat{U}(\alpha,\xi)|\leqslant\frac{C_6(B)}{\sqrt{1-æ^2}\,|\xi|}, \tag{I7}$$

$$\sup_{t}|U_n(t)|\leqslant\frac{C_6(B)}{\pi|n|}. \tag{I8}$$

Используя равенство Парсеваля и оценки (I6)-(I8), имеем

$$\int_{\Pi}|U(\alpha,t)|^2d\alpha\,dt=\sum_{|n|\leqslant N}\int_{|\xi|\leqslant N}|\hat{U}_n(\xi)|^2d\xi+\sum_{|n|\leqslant N}\int_{|\xi|>N}|\hat{U}_n(\xi)|^2d\xi+$$

$$+\sum_{|n|>N}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{U}_n(\xi)|^2d\xi\leqslant\sum_{|n|\leqslant N}\int_{|\xi|\leqslant N}|\hat{U}_n(\xi)|^2d\xi+\int_{|\xi|>N}\sum_{|n|\geqslant 0}|\hat{U}_n(\xi)|^2d\xi+$$

$$+\sum_{|n|>N}\int_{-\infty}^{\infty}|U_n(t)|^2dt\leqslant C_5^2\exp(8\mu N)\cdot 4\cdot N^2\cdot\varepsilon^2+\frac{8C_6(B)}{N}.$$

Замечая, что $\|U\|_{L_1(\Pi_1)} \leq 2\pi^{1/2}\cdot(1-\varkappa^2)^{1/4}\|U\|_{L_2}$,
и учитывая (12), завершаем доказательство.

Библиографический список

1. Бухгейм А.Л. Введение в теорию обратных задач. Новосибирск: Наука, 1988.

УДК 620.179

А.В.Белов, И.В.Голубятников

АДАПТИВНЫЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ В МИКРОЗОНДОВЫХ КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Сформулированы принципы рациональной структуры вычислительных средств микрозондовых контрольно-измерительных систем (МКИС). Разработана упрощенная математическая модель формирования и регистрации информационного сообщения в МКИС, учитывающая повышение эффективности работы систем данного класса, которые характеризуются, с одной стороны, ростом требований к достоверности получаемой информации, а с другой - увеличением скорости ее обработки. Обоснована целесообразность и пути использования адаптивных методов для оптимизации систем обработки данных в МКИС при неполных данных о состоянии исследуемого объекта.

Развитие адаптивных принципов обработки информации и конструирование алгоритмов оптимизации систем наблюдения в микрозондовых контрольно-измерительных системах (МКИС), обеспечивающих эффективную обработку результатов анализа в условиях неполной информации и ориентированных на использование ЭВМ, является одной из актуальных задач повышения информативности и надежности МКИС.

Процесс формирования зондирующего излучения для заданного типа генератора можно описать в виде функции