ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ
АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, вып. 3, 1977

УДК 539.319

С.И.Иванов, И.С.Григорьева

ЗАДАЧА МИЧЕЛЛА ДЛЯ ЦИЛИНДРА СЕГМЕНТНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ В СВЯЗИ С ОПРЕДЕЛЕНИЕМ ОСТАТОЧНЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

При определении остаточных касательных напряжений сплошного цилиндра необходимо знать относительный угол закручивания цилиндра сегментного поперечного сечения, вызванный единичным нагружением, изображенным на рисунке I. Цилиндр нагружен касательными силами на торцах и боковой поверхности, следовательно, имеем задачу, именуемую в математической теории упругости задачей

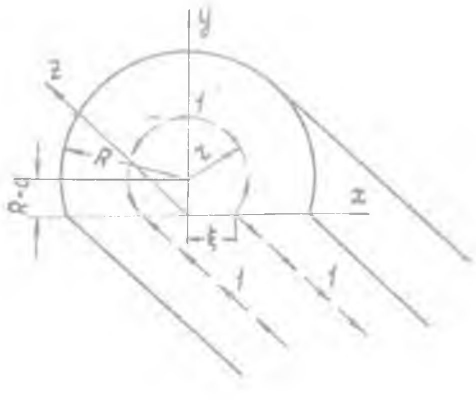

Рис. I

Мичелла [I]. Ее решение сводится к отысканию функции напряжений $\varphi(x,y)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2G\theta_1, \qquad \text{(I)}$$

где θ_1 - относительный угол закручивания цилиндра, и условию на контуре сечения

$$\varphi(s) = \int_0^s z(s_1)\,ds_1, \qquad (2)$$

где $z(s_1)$ - проекция на ось z касательного напряжения, действующего на боковой поверхности цилиндра.

Применив (2) к рассматриваемому нагружению (рис. I), установим, что на криволинейном контуре поперечного сечения $\varphi = 0$, на прямолинейном контуре

$$\varphi = \begin{cases} 1, & |x| < \xi \\ 0, & |x| > \xi \end{cases} \qquad (3)$$

С целью перехода к более простому уравнению Лапласа будем искать

$$f(x,y) = \frac{2}{G\theta_1 d^2}\varphi(x,y) + \frac{x^2+y^2}{d^2} - 1, \qquad (4)$$

где

$$d^2 = R^2 - (R-a)^2. \qquad (5)$$

Для новой функции уравнения (I), (3) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \qquad (6)$$

на криволинейном контуре $\quad f = \dfrac{x^2+y^2}{d^2} - 1;$ (7)

на прямолинейном контуре $\quad f = \begin{cases} \dfrac{2}{G\theta_1 d^2} + \dfrac{x^2}{d^2} - 1, & |x| < \xi \\ \dfrac{x^2}{d^2} - 1, & |x| > \xi \end{cases}$. (8)

Применим биполярные координаты α, β, связанные с декартовыми зависимостями

$$x = d\,\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta}, \qquad y = d\,\frac{\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta} \tag{9}$$

Запишем уравнения (6)-(8) в этих координатах [2]:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2} = 0; \tag{10}$$

на криволинейном контуре, то есть при

$$\beta = \pi - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{R^2}{(R-a)^2} - 1}, \qquad f = \frac{2}{\frac{R}{R-a}\operatorname{ch}\alpha - 1}; \tag{11}$$

на прямолинейном контуре, то есть при $\beta = 0$

$$f = \begin{cases} \dfrac{2}{G\theta_1 d^2} - \dfrac{2}{\operatorname{ch}\alpha + 1}, & |\alpha| < \alpha_\xi \\ -\dfrac{2}{\operatorname{ch}\alpha + 1}, & |\alpha| > \alpha_\xi \end{cases} \tag{12}$$

где

$$\alpha_\xi = \operatorname{Ar\,sh} 2\,\frac{\xi/d}{1 - \xi^2/d^2}$$

Воспользуемся решением уравнения (10) в виде интеграла Фурье [2]:

$$f = \int_0^\infty \Big[A_1(u)\operatorname{sh}\beta u + A_2(u)\operatorname{sh}\Big(\pi - \beta - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{R^2}{(R-a)^2} - 1}\Big)u\Big]\cos\alpha u\,du. \tag{13}$$

Контурные условия (11), (12) также представим с помощью интеграла Фурье. На криволинейном контуре, при $\beta = \pi - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{R^2}{(R-a)^2} - 1}$ должно быть

$$f = \int_0^\infty \Big[\frac{4\operatorname{sh}\big(\pi - \arccos\frac{R-a}{R}\big)u}{\sqrt{\frac{R^2}{(R-a)^2} - 1}\;\operatorname{sh}\pi u}\Big]\cos\alpha u\,du, \tag{14}$$

на прямолинейном контуре, при $\beta = 0$

$$f = 4\int_0^\infty \Big[\frac{\sin\big(u\operatorname{Ar\,sh}\frac{2\xi/d}{1-\xi^2/d^2}\big)}{\pi G\theta_1 d^2 u} - \frac{u}{\operatorname{sh}\pi u}\Big]\cos\alpha u\,du. \tag{15}$$

Используя поочередно (14), (15) в (13), получим

$$A_1(u) = \frac{4}{\sqrt{\frac{R^2}{(R-a)^2} - 1}\;\operatorname{sh}\pi u},$$

$$A_2(u)=4\,\frac{\dfrac{\sin\alpha\xi u}{\pi G\theta_1 d^2 u}-\dfrac{u}{\operatorname{sh}\pi u}}{\operatorname{sh}\left(\pi-\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{R^2}{(R-a)^2}-1}\right)u} \tag{I6}$$

Из формулы (4) с учетом (I3) и (I6) следует выражение для искомой функции напряжений

$$\varphi=G\theta_1 d^2\left[\frac{\cos\beta}{\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta}+\frac{\sin\beta}{\sqrt{\dfrac{R^2}{(R-a)^2}-1}\,(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\pi G\theta_1 d^2}\int_0^\infty\frac{\sin\alpha_\xi u\,\operatorname{sh}(\beta_2-\beta)u\cos\alpha u\,du}{u\,\operatorname{sh}\beta_2 u}-2\int_0^\infty\frac{u\,\operatorname{sh}(\beta_2-\beta)u\cos\alpha u\,du}{\operatorname{sh}\pi u\,\operatorname{sh}\beta_2 u}\right], \tag{I7}$$

где $\beta_2=\pi-\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{R^2}{(R-a)^2}-1}$.

Относительный угол закручивания θ_1 определим из условий на торцах цилиндра [I]:

$$Q_x=\oint x\,\tau(s)\,ds,\quad Q_y=\oint y\,\tau(s)\,ds,\quad M_z=2\iint\varphi\,dx\,dy-\oint\varphi\,d\omega, \tag{I8}$$

где Q_x , Q_y , M_z – поперечные силы и скручивающий момент на торцах цилиндра, ω – секториальная координата контура сечения.

Первое и второе условия выполняются тождественно, а из третьего получим искомый угол закручивания

$$GR^2\theta_1=\frac{2\dfrac{r^2}{R^2}\left(\pi-\arcsin\sqrt{1-\dfrac{(R-a)^2}{r^2}}\right)-4(1-b^2)\displaystyle\int_0^\infty\frac{u\sin\alpha_\xi u\,du}{\operatorname{sh}\pi u\,\operatorname{th}\beta_2 u}}{\dfrac{1}{6}(b^2+2b^4)\sqrt{\dfrac{1}{b^2}-1}+\dfrac{1}{2}\beta_2-4\pi(1-b^2)^2\displaystyle\int_0^\infty\frac{u^3\,du}{\operatorname{sh}^2\pi u\,\operatorname{th}\beta_2 u}}, \tag{I9}$$

где $r^2=(R-a)^2-\xi^2$, $\quad b=\dfrac{R-a}{R}$.

Найденное выражение для θ_1 в зависимости от $\frac{a}{R}$ и $\frac{\xi}{R}$ используется при определении остаточных касательных напряжений сплошного цилиндра методом сегментных срезов, заключающимся в измерении углов закручивания цилиндра в процессе удаления продольных слоев.

Литература

I. Иванов С.И. Определение остаточных напряжений в пластинках методом полосок. В сб. "Вопросы прочности элементов авиационных конструкций". Труды КуАИ, вып. 48, I97I.

2. Уфлянд Я.С. Биполярные координаты в теории упругости. ГИТТЛ, I950.