

3. Ахмедьянов И.С. К расчету сферической оболочки при обратном осесимметричном нагружении. - Изв. вузов. Авиационная техника, 1982, № 2, с.47-50.

ИД Б39.3

С.П.Кузнецов, В.Н.Паймушин, В.А.Фирсов

ОСЕССИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ,
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ НА ЛИЦЕВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ
С УПРУГИМИ ОСНОВАНИЯМИ

Работа посвящена исследованию осесимметричного деформирования оболочек вращения, взаимодействующих на лицевых поверхностях с сплошными или дискретными упругими основаниями. Основные соотношения общего варианта теории получены в /1/ в предположении, что рассматриваемая упругая система представляется в виде трехслойного пакета со слоями переменной толщины, и для каждого слоя пакета используется сдвиговая модель С.П.Тимошенко с учетом поперечного обжатия. Условия контакта слоев и отсутствия перемещений внешних лицевых поверхностей пакета позволили сформулировать граничную задачу для рассматриваемой упругой системы относительно компонентов вектора упругого перемещения оболочки, принятых в качестве искомым функций задачи.

1. Рассмотрим оболочку вращения, взаимодействующую на обеих лицевых поверхностях с упругими основаниями (рис.1) и находящуюся под действием произвольной системы поверхностных и контурных сил, а также в условиях объемного температурного поля. Предполагается, что оболочка и упругие основания имеют среднюю относительную толщину. Для случая осесимметричного деформирования решения равновесия рассматриваемой упругой системы и граничные условия на контуре оболочки, выведенные в /1/, могут быть представлены в виде

$$L_i - (Q_i)_{,1} - X_i = 0, \quad (i = \overline{1,4}) \quad (I)$$

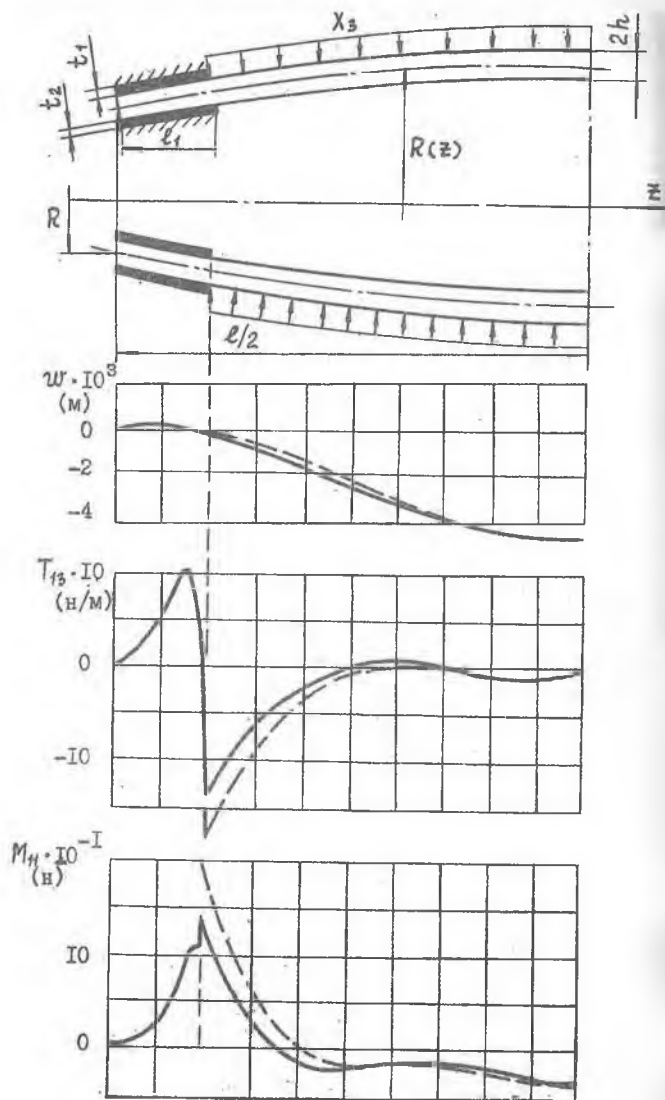


Рис. I

$$Q_i = P_i \quad \text{при } \delta u_i \neq 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 &= -k_{H1} T_{13} + \sum_{K=1}^2 \left[-k_{H1} y_1^K T_H^K / 2 + (k_{H1} y_1^K + \frac{t_{K,1}}{t_K}) \frac{\delta_K}{t_K} M_H^K + \right. \\
 &+ \left. (y_{d,1}^K - \frac{t_{K,1}}{t_K} y_1^K) \frac{\delta_K}{t_K A_1^K} M_{13}^K - (\frac{k_{H1}}{2} + \frac{\delta_K}{t_K}) T_{13}^K + \frac{\delta_K}{t_K} y_1^K T_{33}^K \right], \\
 &= k_{H1} T_{11} + k_{22} T_{22} + \sum_{K=1}^2 \left[\frac{k_{H1}}{2} T_H^K + \frac{k_{22}}{2} T_{22}^K + (\frac{\delta_K t_{K,1}}{t_K^2} y_1^K - \right. \\
 &- \frac{\delta_K}{t_K} k_{H1}) M_H^K - \frac{\delta_K}{t_K} k_{22} M_{22}^K + \frac{\delta_K t_{K,1}}{t_K^2 A_1^K} M_{13}^K - \frac{\delta_K}{t_K} y_1^K T_{13}^K - \frac{\delta_K}{t_K} T_{33}^K \left. \right], \\
 &= T_{13} + \sum_{K=1}^2 \left[(\frac{h_{K,1}}{2} - \frac{h_{K,1}}{2} k_{H1} y_1^K) T_H^K - h_K (\frac{k_{H1}}{2} + \frac{\delta_K}{t_K}) T_{13}^K + \right. \\
 &+ \left. (\frac{h_K}{t_K} \delta_K y_1^K k_{H1} - \frac{h_{K,1}}{t_K} \delta_K + \frac{h_K}{t_K^2} \delta_K t_{K,1}) M_H^K - \right. \\
 &- \left. \left\{ \frac{h_K t_{K,1}}{A_1^K t_K} \delta_K y_1^K - \frac{\delta_K}{A_1^K t_K} (y_{d,1}^K h_K + y_1^K h_{K,1}) \right\} M_{13}^K + \frac{h_K}{t_K} \delta_K y_1^K T_{33}^K \right], \\
 &= T_{33} + k_{H1} M_H + k_{22} M_{22} + \sum_{K=1}^2 \left[(\frac{h_K}{2} k_{H1} + \frac{h_{K,1}}{2} y_1^K) T_H^K + \right. \\
 &+ \frac{h_K}{2} k_{22} T_{22}^K - \frac{h_K}{t_K} \delta_K T_{33}^K - (\frac{h_K}{t_K} \delta_K y_1^K - \frac{h_{K,1}}{2}) T_{13}^K - \\
 &- (\frac{h_K}{t_K} \delta_K k_{H1} + \frac{h_{K,1}}{t_K} \delta_K y_1^K - \frac{h_K}{t_K^2} \delta_K t_{K,1} y_1^K) M_H^K - \\
 &- \frac{h_K}{t_K} \delta_K k_{22} M_{22}^K + \frac{\delta_K}{A_1^K t_K} (\frac{t_{K,1}}{t_K} h_K - h_{K,1}) M_{13}^K \left. \right],
 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \frac{1}{A_1} \left[T_{11} + \sum_{k=1}^2 \left(\frac{1}{2} T_{11}^k - \frac{\delta_k}{t_k} M_{11}^k + \frac{\delta_k}{\theta_1^k t_k} y_1^k M_{13}^k \right) \right], \\
 Q_2 &= \frac{1}{A_1} \left[T_{13} + \sum_{k=1}^2 \left(\frac{y_1^k}{2} T_{11}^k + \frac{1}{2} T_{13}^k - \frac{\delta_k y_1^k}{t_k} M_{11}^k - \frac{\delta_k}{\theta_1^k t_k} M_{13}^k \right) \right], \\
 Q_3 &= \frac{1}{A_1} \left[M_{11} + \sum_{k=1}^2 \left(\frac{h_k}{2} T_{11}^k - \frac{\delta_k h_k}{t_k} M_{11}^k + \frac{\delta_k h_k}{\theta_1^k t_k} y_1^k M_{13}^k \right) \right], \\
 Q_4 &= \frac{1}{A_1} \left[M_{13} + \sum_{k=1}^2 \left(\frac{h_k}{2} y_1^k T_{11}^k + \frac{h_k}{2} T_{13}^k - \frac{\delta_k h_k}{t_k} y_1^k M_{11}^k - \frac{\delta_k h_k}{\theta_1^k t_k} M_{13}^k \right) \right].
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Здесь u_i ($i = \overline{1,4}$) - компоненты вектора $u = \{u, w, \psi, \varphi\}$ упругого перемещения точек оболочки; X_i, P_i ($i = \overline{1,4}$) - заданные компоненты векторов поверхностных и контурных усилий и моментов, приведенные к срединной поверхности оболочки \mathcal{B} ; $A_i, A_i^k, k_{ii}, k_{ii}^k$ ($k = \overline{1,2}$) - параметры Ляме и кривизны координатных линий оболочки и упругих оснований $\alpha^i = \text{const}$ ($i = \overline{1,2}$):

$$\begin{aligned}
 A_i^k &= A_i \theta_i^k, \quad \theta_i^k = 1 + H_k k_{ii}, \quad H_k = h + t_k/2, \quad \delta_1 = -\delta_2 = 1, \\
 k_{11}^k &= \frac{k_{11}}{\theta_1^k} - \frac{1}{A_1^k} \frac{\partial y_1^k}{\partial \alpha^1}, \quad k_{22}^k = \frac{k_{22}}{\theta_2^k} - \frac{y_1^k}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha^1}, \quad y_1^k = (A_1 \theta_1^k)^{-1} H_{k,1}, \\
 &2h, t_k \quad (k = \overline{1,2}) - \text{толщины оболочки и оснований (рис. I)}.
 \end{aligned}$$

Предположим, что основания и оболочка выполнены из ортотропных материалов, главные оси ортотропии которых совпадают с направлениями координатных линий. В этом случае соотношения упругости для оболочки с учетом температурных воздействий имеют вид

$$\begin{aligned}
 T_{11} &= B_1 \left[\sum_{i=1}^3 A_{1i} \varepsilon_{ii} + \frac{A_{11}(k_{22} - k_{11})H^2}{3} \varepsilon_{11} \right] - \frac{E_1}{\nu} T_T^{(1)}, \\
 T_{22} &= B_2 \left[\sum_{i=1}^3 A_{2i} \varepsilon_{ii} + \frac{A_{22}(k_{11} - k_{22})H^2}{3} \varepsilon_{22} \right] - \frac{E_2}{\nu} T_T^{(2)}, \\
 T_{33} &= B_3 \left[\sum_{i=1}^3 A_{3i} \varepsilon_{ii} + \frac{A_{31}k_{22}H^2}{3} \varepsilon_{11} + \frac{A_{32}k_{11}H^2}{3} \varepsilon_{22} \right] - \frac{E_3}{\nu} T_T^{(3)}, \\
 T_{13} &= B_c \left[\gamma_{13} + \frac{(k_{22} - k_{11})H^2}{3} \Gamma_{13} \right],
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

$$M_{11} = D_1 \left[\sum_{i=1}^2 A_{ii} \varepsilon_{ii} + A_{13} k_{22} \varepsilon_{33} + A_{11} (k_{22} - k_{11}) \varepsilon_{11} \right] - \frac{E_1}{\nu} T_M^{(1)},$$

$$M_{22} = D_2 \left[\sum_{i=1}^2 A_{2i} \varepsilon_{ii} + A_{23} k_{11} \varepsilon_{33} + A_{22} (k_{11} - k_{22}) \varepsilon_{22} \right] - \frac{E_2}{\nu} T_M^{(2)},$$

$$M_{13} = D_c \left[\Gamma_{13} + (k_{22} - k_{11}) \gamma_{13} \right],$$

$$B_i = \frac{E_i H}{\nu}, \quad B_c = k_c G_{13} H, \quad D_j = \frac{E_j H^3}{12 \nu},$$

$$D_0 = \frac{k_c G_{13} H^3}{12}, \quad (i = \overline{1,3}; j = 1,2), \quad H = 2H, t_1, t_2;$$

$\nu = 1 - \nu_{31} \nu_{13}$ - приведенный коэффициент Пуассона ортотропного материала; E_i, G_{13} - модули упругости I и 2 рода; k_c - коэффициент скрутки для оболочки

$$A_{11} = A_{33} = 1, \quad A_{22} = 1 - \nu_{31} \nu_{13}, \quad A_{13} = \nu_{13}, \quad A_{31} = \nu_{31},$$

ν_{13}, ν_{31} - коэффициенты Пуассона

$$T_M^{(i)} = \int_{-h}^h \alpha_{mT} T dz, \quad (i = \overline{1,3}); \quad T_M^{(j)} = \int_{-h}^h \alpha_{mT} T z dz \quad (j = 1,2) -$$

интегральные характеристики объемного температурного поля, воздействующего на оболочку; α_{mT} ($m = 1,3$) - коэффициенты линейного температурного расширения материала оболочки в направлении координат x^i ($i = 1,2$) и z ($i = 3$).

Для верхнего и нижнего оснований компоненты внутренних усилий и моментов через соответствующие компоненты деформаций вычисляются по тем же формулам (5), в которых $H = t_1$ для верхнего слоя и $H = t_2$ для нижнего слоя, а всем остальным величинам присваивается индекс "k", $k = 1,2$.

Для компонентов деформации оснований имеют место следующие выражения /1/:

$$\varepsilon_{11}^k = \frac{u_{,1}^k}{A_1^k} + k_{11}^k w^k, \quad \varepsilon_{22}^k = k_{22}^k w^k, \quad \varepsilon_{33}^k = \varphi^k,$$

$$\varepsilon_{11}^k = \frac{\psi_{,1}^k}{A_1^k} + k_{11}^k \varphi^k, \quad \varepsilon_{22}^k = k_{22}^k \varphi^k, \quad (6)$$

$$\Gamma_{13}^k = \frac{\varphi_{,1}^k}{A_1^k}, \quad \gamma_{13}^k = \varphi^k + \frac{w_{,1}^k}{A_1^k} - k_{11}^k u_k,$$

где компоненты вектора упругих перемещений слоев будут выражаться через искомые функции u , w , ψ , φ с помощью выражений

$$u^k = \frac{1}{2} [u + \delta_k h \psi + y_1^k (w + \delta_k h \varphi)], \quad \psi^k = -2 \frac{\delta_k}{t_k} u^k, \quad (7)$$

$$w^k = \frac{1}{2} [w + \delta_k h \varphi - y_1^k (u + \delta_k h \psi)], \quad \varphi^k = -2 \frac{\delta_k}{t_k} w^k, \quad (k=1, 2).$$

Отметим, что компоненты деформаций оболочки определяются по формулам вида (6), в которых все величины заменяются соответствующими величинами без индекса "k".

2. Для численного интегрирования уравнений (I) при граничных условиях (2) в интервале $\alpha'_H \leq \alpha' \leq \alpha'_K$ используем устойчивый численный метод конечных сумм в варианте /3/. Для этого введем в рассмотрение следующие интегральные операторы:

$$J_1(\dots) = \int_{\alpha'_H}^{\alpha'} (\dots) d\alpha', \quad J_2(\dots) = \int_{\alpha'}^{\alpha'_K} (\dots) d\alpha'. \quad (8)$$

Действуя на уравнение равновесия (I) оператором J_2 , получим

$$J_2 L_i + Q_i - C_i = J_2 X_i \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (9)$$

где $C_i = Q_i(\alpha'_K)$ - константы интегрирования.

Примем в качестве искомого функций задачи первые производные от u , w , ψ , φ и, вводя обозначения $C^u = u(\alpha'_H)$, $C^w = w(\alpha'_H)$, $C^\psi = \psi(\alpha'_H)$, $C^\varphi = \varphi(\alpha'_H)$, запишем следующие очевидные равенства:

$$u(\alpha') = C^u + J_1 u_{,1}(\alpha'), \quad w(\alpha') = C^w + J_1 w_{,1}(\alpha'),$$

$$\psi(\alpha') = C^\psi + J_1 \psi_{,1}(\alpha'), \quad \varphi(\alpha') = C^\varphi + J_1 \varphi_{,1}(\alpha'). \quad (10)$$

Подставляя в уравнение (9) и граничные условия (2) выражения усилий и моментов (5), с учетом (3), (6) и (10) получим замкнутую систему разрешающих интегро-алгебраических уравнений относительно вектора неизвестных $X = \{du/d\alpha', dw/d\alpha', d\psi/d\alpha', d\varphi/d\alpha', C_1, C_2, C_3, C_4, C^u, C^w, C^\psi, C^\varphi\}$. Алгебраический аналог этой системы строится путем замены интегральных операторов (8) конечно-суммарными /3/.

3. На основе разработанного метода была составлена программа на языке ФОРТРАН-IV применительно к ЭВМ типа ЕС. Она позволяет рассчитывать оболочки вращения с произвольной формой меридиана при произвольных граничных условиях и воздействия на них как

внешней поверхностной нагрузки, так и температурного поля.

В качестве примера было проведено исследование напряженно-деформированного состояния оболочки вращения с упругими основаниями, подверженной равномерному внешнему давлению χ_3 . Образующая оболочки изменялась по параболическому закону. Решение задачи проведено при следующих численных значениях геометрических и физико-механических параметров упругой системы:

$$E = 7 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2; \quad E' = E^2 = 7 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2; \quad G_{13} = 2,36 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2; \\ G'_{13} = G_{13}^2 = 2,36 \cdot 10^8 \text{ н/м}; \quad 2h = 0,06 \text{ м}; \quad t_1 = t_2 = 0,02 \text{ м}; \quad \ell/2 = 0,1 \text{ м}; \\ \ell_1 = 0,02 \text{ м}; \quad \nu = \nu_{13} = \nu_{31} = 0,33; \quad R = 0,1 \text{ м}; \quad R(z) = R + 0,03z^2; \\ \chi_3 = -10^6 \text{ н/м}^2.$$

На графиках, представленных на рис.1, сплошными линиями показано изменение прогиба W , перерезывающего усилия T_{13} и изгибающего момента M_{11} вдоль образующей оболочки, взаимодействующей с основаниями, а штриховыми линиями изображено изменение этих же величин в оболочке, жестко защемленной в сечении $z = \ell_1$. Как видно из этих результатов, учет податливости опор приводит к существенному уточнению напряженно-деформированного состояния в районе закрепления оболочки.

Л и т е р а т у р а

1. Кузнецов С.П., Паймушин В.Н., Фирсов В.А. Об одном варианте теории оболочек, взаимодействующих с упругими основаниями. - В сб.: Прочность, устойчивость и колебания тонкостенных и монолитных авиационных конструкций. Казань, 1982.
2. Паймушин В.Н. Соотношения теории тонких оболочек типа Тимошенко в криволинейных координатах поверхности отсчета. - Прикладная математика и механика, 1978, 42, № 4.
3. Вахитов М.Б., Сафариев М.С., Снегирев В.Ф. Расчет крыльовых устройств судов на прочность. - Казань: Таткнигоиздат, 1975.