

УДК 593.3:624.074

Б.А.Горлач, Б.В.Мокеев

ОСЕССИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ
 С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

В статье на основе теории оболочек среднего изгиба Муштари-Пилимова [1] и преобразований Мейснера-Лурье [2] получены и решены нелинейные уравнения осесимметричной деформации оболочек вращения. В качестве примера приведен числовой расчет эллипсоидальной оболочки.

Рассмотрим оболочку вращения с переменной толщиной h (рис. 1). Следуя теории среднего изгиба [1], составим сводку основных исходных соотношений.

Уравнения равновесия:

$$(A_2 T_1)' - A_2 T_2 + A_1 A_2 [N(\frac{1}{R_1} + \alpha_1) + q_1] = 0,$$

$$(A_2 N)' - A_1 A_2 [T_1(\frac{1}{R_1} + \alpha_1) + T_2(\frac{1}{R_2} + \alpha_2) - q_n] = 0,$$

$$(A_2 M_1)' - A_2' M_2 - A_1 A_2 N = 0. \quad (I)$$

Условия совместности деформаций:

$$(A_2 \alpha_2)' - \alpha_1 A_2' - \frac{1}{R_1} [(A_2 \varepsilon_2)' - \varepsilon_1 A_2'] = \frac{A_1 A_2^2}{2 A_2'} \alpha_2^2,$$

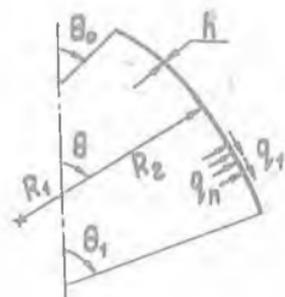


Рис. 1

$$A_1 A_2 \left(\frac{x_1}{A_2} + \frac{x_2}{A_1} \right) + \left\{ \frac{1}{A_1} [A_2 \varepsilon_2' + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) A_2'] \right\} = - \frac{1}{2} \left[\frac{A_1 A_2^2}{A_2} x_2^2 \right]' \quad (2)$$

Геометрические соотношения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{u'}{A_1} + \frac{W}{R_1} + \frac{1}{2} \nu^2, & \varepsilon_2 &= \frac{A_2'}{A_1 A_2} u + \frac{W}{A_2} \\ x_1 &= -\frac{\nu'}{A_1}, & x_2 &= -\frac{A_2'}{A_1 A_2} \nu, & \nu &= \frac{W'}{A_1} - \frac{u}{R_1} \end{aligned} \quad (3)$$

Физические соотношения:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2), & T_2 &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1) \\ M_1 &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} (x_1 + \mu x_2), & M_2 &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} (x_2 + \mu x_1) \end{aligned} \quad (4)$$

В соотношениях (I)-(4) введены следующие обозначения: T_1 , T_2 , M_1 , M_2 - меридиональные и окружные усилия и моменты; N - перерезывающая сила; A_1 и A_2 - коэффициенты Ляме; ε_1 , ε_2 , x_1 , x_2 - компоненты деформации и изменения кривизн; ν - угол поворота нормали к срединной поверхности оболочки; W , u - нормальное и касательное перемещения; E , μ - модуль Юнга и коэффициент Пуассона; $(\dots)'$ - производная по углу θ .

Тогда, следуя методике работы [2], систему (I)-(4) удает свести к следующим двум разрешающим уравнениям:

$$\begin{aligned} V'' + \left(3 \frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{A_1}{A_2} \cos \theta - \frac{A_1'}{A_1} \right) V' - \frac{A_1^2 \sin \theta}{B \alpha A_2} \psi &= 0, \\ \psi'' + \left(3 \frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{A_1}{A_2} \cos \theta - \frac{A_1'}{A_1} \right) \psi' - \frac{A_1^2 \sin \theta}{B \alpha A_2} V &= 4\gamma^4 \frac{A_1^2}{B^2 \alpha^2 A_2} (\Phi + \bar{\Phi}) \end{aligned}$$

где

V и ψ - функция Мейснера-Лурье,

$$\Phi = -\sin \theta \int_{\theta_0}^{\theta} (q_n \sin \theta + q_1 \cos \theta) A_1 A_2 d\theta - \cos \theta \int_{\theta_0}^{\theta} \left[\frac{P_2}{2l} + (q_n \cos \theta - q_1 \sin \theta) A_1 A_2 \right] d\theta$$

$$\psi = \sin \theta \left[(-T_1 x_1 - T_2 x_2) \sin \theta + N x_1 \cos \theta \right] A_1 A_2 d\theta - \cos \theta \left\{ \frac{\bar{P}_z}{2\pi} + \int_{\theta_0}^{\theta} [(-T_1 x_1 - T_2 x_2) \cos \theta - N x_1 \sin \theta] A_1 A_2 d\theta \right\}, \quad (6)$$

$$\alpha = \frac{h}{h_0}, \quad \gamma^4 = \frac{3(1-\mu^2)\beta^2}{h_0^2}. \quad (7)$$

В (5) и (7) через β обозначен характерный линейный размер радиальной поверхности оболочки, h_0 - толщина в некотором сечении оболочки, \bar{P}_z и \bar{P}_z - постоянные интегрирования.

Усилия и моменты через функции V и ψ выражаются следующим образом:

$$A_1 T_1 = V \alpha^2 \beta \cos \theta + (\Omega + \pi), \quad M_1 = -\frac{h^2}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\psi'}{A_1} + \mu \frac{\cos \theta}{A_2} \psi \right),$$

$$A_2 T_2 = V \alpha^2 \beta \sin \theta + (\Omega + \pi), \quad M_2 = -\frac{h^2}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\cos \theta}{A_2} \psi' + \frac{\mu}{A_1} \psi \right),$$

$$T_2 = \frac{\beta}{A_1} (V' \alpha^2 + 2\alpha \alpha' V), \quad (8)$$

$$q_n = -\cos \theta \int_{\theta_0}^{\theta} (q_n \sin \theta + q_n \cos \theta) A_1 A_2 d\theta + \sin \theta \left[\frac{\bar{P}_z}{2\pi} + \int_{\theta_0}^{\theta} (q_n \cos \theta - q_n \sin \theta) A_1 A_2 d\theta \right],$$

$$q_n = -\cos \theta \int_{\theta_0}^{\theta} [(-T_1 x_1 - T_2 x_2) \sin \theta + N x_1 \cos \theta] A_1 A_2 d\theta +$$

$$\sin \theta \left\{ \frac{\bar{P}_z}{2\pi} + \int_{\theta_0}^{\theta} [(-T_1 x_1 - T_2 x_2) \cos \theta - N x_1 \sin \theta] A_1 A_2 d\theta \right\} \quad (9)$$

Для численного решения уравнений (5) воспользуемся методом последовательных приближений, на каждом шаге которого решается линейная краевая задача.

В качестве исходного, нулевого приближения принимается решение линейной задачи ($\Phi = 0$). Согласно работе [2] оно имеет вид

$$\frac{\Phi}{h^2 \sin \theta} = \frac{\alpha}{\sqrt{A_2 \alpha \sin \theta}} \left[\frac{C_1' \sin \gamma x + C_1'' \cos \gamma x}{e^{\gamma x}} - \frac{C_2' \sin \gamma x_1 + C_2'' \cos \gamma x_1}{e^{\gamma x_1}} \right],$$

$$\frac{1}{\sqrt{A_2 \alpha \sin \theta}} \left[\frac{C_1' \sin \gamma x - C_1'' \cos \gamma x}{e^{\gamma x}} - \frac{C_2' \sin \gamma x_1 - C_2'' \cos \gamma x_1}{e^{\gamma x_1}} \right]. \quad (10)$$

Здесь

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{B}} \int_{\theta_0}^{\theta} A_1 \sqrt{\frac{1}{\alpha R_c}} d\theta,$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{B}} \int_{\theta_1}^{\theta} A_1 \sqrt{\frac{1}{\alpha R_c}} d\theta.$$

C'_1, C''_1, C'_2 и C''_2 - постоянные интегрирования, определяемые из заданных граничных условий.

По вычисленным значениям функций V_0 и ψ_0 находятся внутренние усилия, моменты и деформации. Располагая решением (10), находим по формуле (6) значения функции $\Phi = \Phi_1$ в первом приближении.

Подстановка $\bar{\Phi}$ в (10) вместо Φ позволяет найти нелинейные добавки $\bar{\psi}_1$ и \bar{V}_1 к нулевому приближению. Тогда решение системы (5) в первом приближении примет вид

$$\psi_1 = \psi_0 + \bar{\psi}_1, \quad V_1 = V_0 + \bar{V}_1.$$

Входящие в выражения для $\bar{\psi}_1$ и \bar{V}_1 произвольные постоянные определяются из однородных граничных условий.

Вычисляя далее по $\bar{\psi}_1$ и \bar{V}_1 значения $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_2$, находим решение во втором приближении и т.д. Для n -го приближения будем иметь

$$\psi_n = \psi_0 + \bar{\psi}_n, \quad V_n = V_0 + \bar{V}_n.$$

Здесь $\bar{\psi}_n$ и \bar{V}_n - нелинейные добавки n -го приближения.

Для улучшения сходимости выражения (14) целесообразно представить в следующем виде:

$$\psi_n = \psi_0 + \psi_n^w + \bar{\psi}_n, \quad V_n = V_0 + \psi_n^v + \bar{V}_n.$$

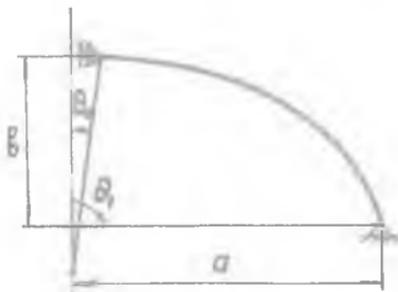


Рис. 2

Здесь множители ψ_n^w и ψ_n^v определяются формулами работы

$$\psi_n^w = \frac{\psi_0}{V_{n-1} - V_0},$$

$$\psi_n^v = \frac{V_0}{V_{n-1} - V_n}.$$

Решение задачи ведется до тех пор, пока разница двух последующих приближений не станет достаточно малой.

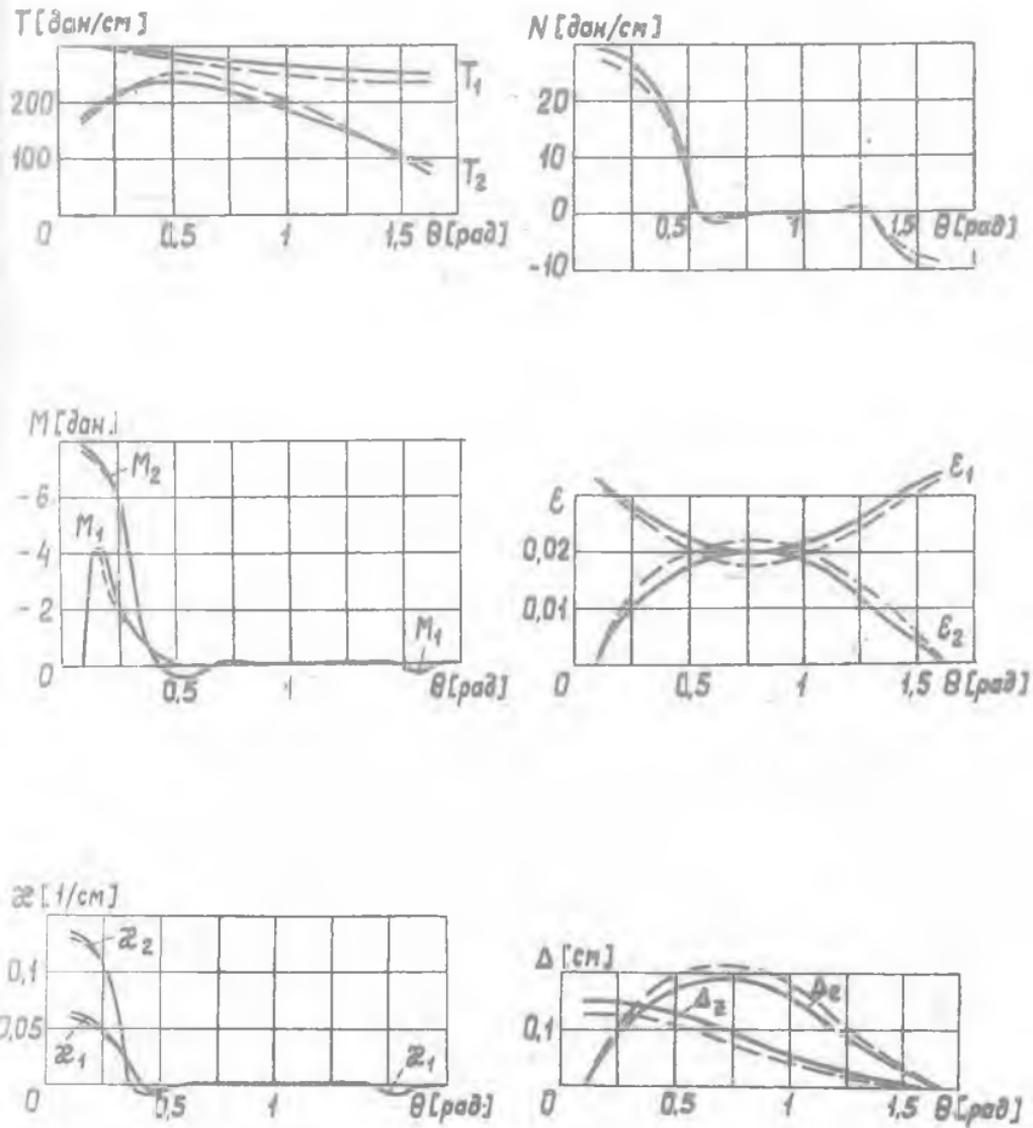


Рис. 3

В качестве примера была рассчитана эллипсоидальная оболочка (рис. 2), один край которой, $\theta_1 = 1,57$ рад, шарнирно оперт - $M_1(\theta_1) = 0$, $\varepsilon_2(\theta_1) = 0$, $\Delta_z(\theta_1) = 0$, а другой, $\theta_0 = 0,823$ рад, имеет скользящую шарнирную заделку - $M_1(\theta_0) = 0$, $\varepsilon_2(\theta_0) = 0$, $P_z = P [R_2(\theta_0) \cdot \sin \theta_0]^2$. Нагрузка q_n изменяется по следующему закону: $q_n = Q \cdot [R_2(\theta_0) \cos \theta_0 - R_2 \cos \theta] + P$, где Q и P - постоянные.

Расчет проводился для оболочки с полуосями $a = 15$ см, $b = 10$ см, $h = 0,1$ см, $Q = 0,00098$ дан/см³, $P = 392$ дан/см², выполненной из материала с модулем упругости $E = 7,1 \cdot 10^5$ дан/см².

Итерационный процесс показал устойчивую сходимость. При заданной нагрузке введение множителей ψ (16) ускорило процесс сходимости примерно в два раза. Для достижения точности $\Delta = 0,01\%$ потребовалось 25 шагов (примерно 1,5 минуты машинного времени БЭСМ-6). Результаты вычислений приведены на рис. 3.

Сплошной линией обозначено решение линейной задачи, штриховой - нелинейной.

Л и т е р а т у р а

1. Муштари Х.М., Галимов К.З. Нелинейная теория упругих оболочек. Таткнигоиздат, Казань, 1957.
2. Чернина В.С. Статика тонкостенных оболочек вращения. М., "наука", 1968.
3. Биргер И.С. Некоторые математические методы решения инженерных задач. М., Оборонгиз, 1956.