

УДК 629.02:539.4

Э.И.Миноранский, А.П.Тарасов

ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕМЕНТА КОНСТРУКЦИИ
ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ЗАКОНЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАГРУЗКИ

В работе предложена методика оценки надежности конструкции, находящейся под действием стационарной случайной нагрузки с произвольным законом распределения.

В качестве элемента конструкции выбран сферический пояс, воспринимающий механическую нагрузку в виде силы P и изгибающего момента M (рис. 1), которые передаются на пояс через жесткую шайбу. Отказом будем считать исчерпание конструкции несущей способности по прочности. Для оценки надежности воспользуемся общей теорией надежности В.В.Болотина [1]:

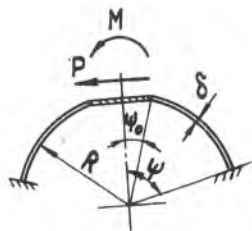


Рис. 1

$$H(t) = P[v(\tau) \in \Omega_0; 0 \leq \tau \leq t], \quad (1)$$

где $H(t)$ - функция надежности, $v(\tau)$ - функция качества, Ω_0 - предельная область.

Согласно [1] схема вычисления $H(t)$ складывается из четырех этапов: схематизация, решение задачи статистической динамики, выбор пространства качества, определение надежности.

В большинстве случаев нагрузки, действующие на конструкцию в течение срока службы, непрерывно меняются случайным образом. Положим, что $M(t)$ и $P(t)$ - случайные, некоррелированы, стационарны и приложены квазистатически. Законы распределения $f(M)$ и $f(P)$ отличны от нормального (рис. 2). Разложим их на нормальные составляющие [2]:

$$f(P) = \sum_{i=1}^n P_i f_i(P), \quad f(M) = \sum_{j=1}^s P_j f_j(M). \quad (2)$$

Здесь P_i, P_j - вероятность того, что имеет место нормальное распределение $f_i(P), f_j(M)$ с математическими ожиданиями m_i, m_j и среднеквадратическими отклонениями S_i, S_j .

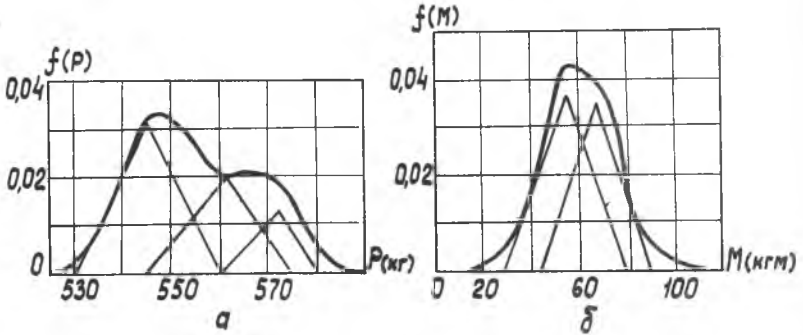


Рис. 2

В таблице I приведены результаты аналитического (№1) и графического (№2) расчета вероятностей и параметров нормальных составляющих по методике работы [2].

Таблица I

Вид нагр.	№	P_1	P_2	P_3	m_1	m_2	m_3	\bar{S}_1	\bar{S}_2	\bar{S}_3
P	I	0,6	0,3	0,1	540	560	570	34,5	37,5	17
	2	0,6	0,3	0,1	545	560	573	36	38	15
M	I	0,48	0,52	-	50	69	-	104,1	124,2	-
	2	0,5	0,5	-	53	65	-	100	125	-

Согласно исследованиям работы [3] законы распределения толщины δ и модуля упругости материала E приняты нормальными. В таблице 2 приведены геометрические и вероятностные параметры исследуемой конструкции (см. рис. I).

Исследуемая конструкция представляет собой систему с бесконечным числом степеней свободы. Для описания ее стохастического

поведения нужно ставить и решать стохастическую краевую задачу. Однако еще слаба исходная информация о вероятностном поведении геометрических и физических параметров, которые в данном случае представляют собой некоторые случайные поля. Теория выбросов случайных полей за некоторую поверхность также недостаточно еще разработана.

Таблица 2

ψ_0 град	ψ град	m_E кг/мм ²	\bar{S}_E кг/мм ²	m_g мм	\bar{S}_g мм
6	30	$7,15 \cdot 10^5$	$0,2 \cdot 10^4$	0,921	0,032

С учетом этого задача статистической динамики решена приближенно с использованием подхода работы [3], согласно которому конструкция приводится к системе с конечным числом степеней свободы.

Ограничимся случаем, когда напряженное состояние системы может быть охарактеризовано одной случайной величиной - напряженным состоянием в опасной зоне. Опасная зона устанавливается при анализе напряженного состояния конструкции в детерминистической постановке.

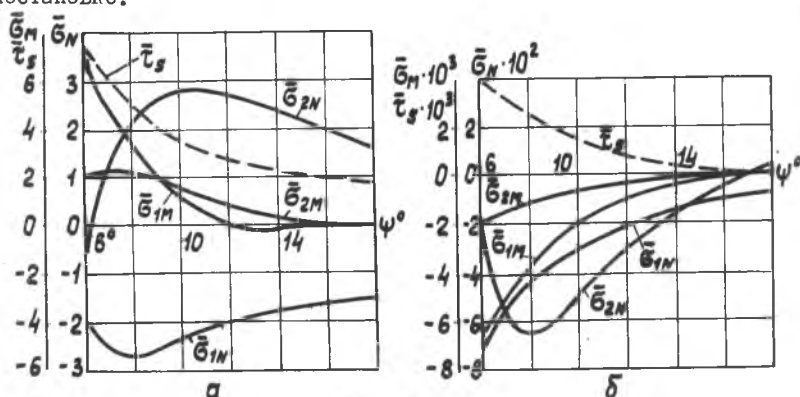


Рис. 3

На рис. 3 и 4 приведены результаты анализа напряженного состояния конструкции при детерминированных параметрах, проведенного по методике работы [4].

Анализ показал, что задачу статистической динамики (определение закона распределения напряжений) следует решать для сечения

$$\varphi = 30^\circ, \quad \psi = 6^\circ.$$

Исследуемая система - стохастическая, линейная, обладает вырожденным оператором [I], поэтому задача решена в два этапа. На первом этапе определены условные законы распределения напряжений $f(\sigma/E, \delta)$ при фиксированных $E ; \delta$. На втором этапе по формулам теории вероятности окончательно определен закон распределения $f(\sigma)$.

Для примера рассмотрим определение закона распределения нормальных напряжений $f(\sigma)$ на наружной поверхности конструкции. Остальные законы определяются аналогично.

Нормальные и касательные напряжения можно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых зависит от силы, второе от момента:

$$\begin{aligned} \sigma &= \overline{R}_1 P + \overline{R}_2 M, \\ \tau &= \overline{R}_3 P + \overline{R}_4 M. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь \overline{R}_i зависит от геометрии конструкции и нагрузки и определяется по формулам [4].

Учитывая линейность системы и некоррелированность P и M , определим $f(x/E, \delta)$ и $f(y/E, \delta)$.

При этом

$$x = \overline{R}_1 P, \quad y = \overline{R}_2 M$$

$$\begin{aligned} f_x(x/E, \delta) &= \frac{1}{\overline{R}_1} \sum_{i=1}^3 P_i f_i[(x/\overline{R}_1)/E, \delta], \\ f_y(y/E, \delta) &= \frac{1}{\overline{R}_2} \sum_{j=1}^2 P_j f_j[(y/\overline{R}_2)/E, \delta]. \end{aligned} \quad (4)$$

С учетом (3) запишем

$$f(\sigma/E, \delta) = \int_{-5\overline{S}_x}^{5\overline{S}_x} f_x(x/E, \delta) f_y[(\sigma - x)/E, \delta] dx. \quad (5)$$

Окончательно, учитывая независимость E и δ , получим

$$f(\sigma) = \int_{-5\overline{S}_E}^{5\overline{S}_E} dE \int_{-5\overline{S}_\delta}^{5\overline{S}_\delta} f(\sigma/E, \delta) f(E) f(\delta) d\delta. \quad (6)$$

Результаты расчета по формулам (6) и (4) и по формулам, полученным для закона касательных напряжений $f(\sigma, \tau)$, приведены в таблице 3.

Таблица 3

Параметры	$\sigma_{нар.}$	$\sigma_{внутр.}$	$\tau_{нар.}$	$\tau_{внутр.}$
P_1	0,48	0,54	0,48	0,61
P_2	0,52	0,46	0,52	0,39
m_1	590	-1542	962	495
m_2	607	-1561	980	512
\bar{s}_1	14,3	18,3	14	12,2
\bar{s}_2	20	16,3	15,1	10,2

Нормальные и касательные напряжения действуют одновременно, поэтому

$$f(\sigma, \tau) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 P_{ij} f_{ij}(\sigma, \tau), \quad (7)$$

где

$$P_{ij} = P_i P_j,$$

$$f_{ij}(\sigma, \tau) = \frac{1}{2\pi \bar{s}_{\sigma_i} \bar{s}_{\tau_j} \sqrt{1 - \rho_{ij}^2}} \exp\left[-\frac{\tilde{\sigma}_i^2 - 2\rho_{ij} \tilde{\sigma}_i \tilde{\tau}_j + \tilde{\tau}_j^2}{2(1 - \rho_{ij}^2)}\right],$$

$$\tilde{\sigma}_i = \frac{\sigma - m_{\sigma_i}}{\bar{s}_{\sigma_i}}, \quad \tilde{\tau}_j = \frac{\tau - m_{\tau_j}}{\bar{s}_{\tau_j}},$$

$$\rho_{ij} = \frac{\Omega_{\sigma_1} \Omega_{\sigma_2} (\bar{s}_{\sigma_1}^2 + m_{\sigma_1}^2) + \Omega_{\sigma_2} \Omega_{\tau_1} (\bar{s}_{\sigma_1}^2 + m_{\sigma_1}^2) - m_{\sigma_1} m_{\tau_1}}{\bar{s}_{\sigma_1} \bar{s}_{\tau_1}}.$$

Аналогично определяем $f_{ij}(\dot{\sigma}, \dot{\tau})$.

Результаты расчета параметров для двумерных законов приведены в таблице 4.

Так как внешняя нагрузка действует квазистатически, то напряжения σ и τ , возникающие в конструкции, могут быть приняты за параметры качества V системы. Пространство качества будет при этом двумерным (плоскость $\sigma - \tau$).

Условие безотказности имеет вид

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} < \sigma_T,$$

т.е. область σ_T - эллипс.

Таблица 4

параметры	наружн.	внутрен.	параметры	наружн.	внутрен.
\bar{S}_{σ_1}	18,3	14,3	\bar{S}_{σ_1}	575	521
\bar{S}_{σ_2}	16,3	20	\bar{S}_{σ_2}	406	1019
\bar{S}_{τ_1}	12,2	14	\bar{S}_{τ_1}	627	227
\bar{S}_{τ_2}	10,2	15,1	\bar{S}_{τ_2}	726	159
m_{σ_1}	1590	542	m_{σ_1}	-	-
m_{σ_2}	1560	607	m_{σ_2}	-	-
m_{τ_1}	995	492	m_{τ_1}	-	-
m_{τ_2}	580	582	m_{τ_2}	-	-
ρ_{11}	0,11	0,107	τ_{11}	0,363	0,23
ρ_{12}	0,12	0,096	τ_{12}	0,435	0,213
ρ_{21}	0,118	0,07	τ_{21}	0,432	0,164
ρ_{22}	0,13	0,061	τ_{22}	0,517	0,152

В процессе эксплуатации происходит изменение прочностных характеристик, одной из причин которого может быть нагрев конструкции в полете. Это изменение примем в виде

$$\sigma_T(t) = \sigma_T^0 - \alpha t - \beta t^2, \quad (8)$$

где α и β - нормально распределенные коэффициенты, параметры для законов распределения которых найдем, используя данные работы [9]:

$$m_{\sigma_T}(t) = 1705 + 34,1t - 13,64t^2,$$

$$\bar{S}_{\sigma_T}^2(t) = 85 - 885t + 70t^2.$$

В исследуемой конструкции отказ может произойти из-за потери прочности наружной или внутренней поверхностей. Оба случая можно рассматривать как элементы [6], которые соединены между собой последовательно и зависят по нагрузке. Тогда надежность

конструкции может быть определена по формуле

$$H = \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2 - H_1 H_2} \quad (9)$$

Здесь H_i - надежность i -го элемента.

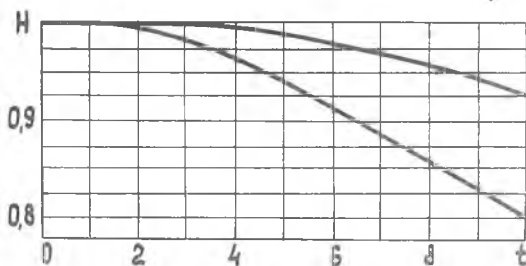


Рис. 4

Для определения нижней границы функции $H_i(t)$ воспользуемся формулой [1]

$$H_i(t) \geq 1 - \int_0^t \langle \nu + (\tau, \Gamma) \rangle d\tau. \quad (10)$$

Здесь $\langle \nu + (\tau, \Gamma) \rangle$ - математическое ожидание числа пересечений траекторией $\nu(t)$ границы Γ области \mathcal{D}_0 в единицу времени.

Как показывает анализ, проведенный в работе [7], для высоконадежных систем верхнюю границу для $H_i(t)$ можно определить, воспользовавшись зависимостью

$$H_i(t) \leq \exp \left[- \int_0^t \langle \nu + (\tau, \Gamma) \rangle d\tau \right]. \quad (11)$$

Для определения $\langle \nu + (\tau, \Gamma) \rangle$ используем формулы работы [8]. Результаты расчета функции надежности по формулам (10), (11) и (9) представлены на рис. 4.

Л и т е р а т у р а

1. Болотин В.В. Применение методов теории вероятностей к теории надежности в расчетах сооружений. М., Стройиздат, 1971.

2. Инуду К.А. Оптимизация устройств автоматики по критерию надежности. М., "Энергия", 1966.

3. Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике. М., Стройиздат, 1967.

4. Ахмедьянов И.С. Расчет сферической оболочки при обратно симметричном нагружении. - В сб.: Вопросы прочности элементов авиационных конструкций. Труды КуАИ, вып. 48, Куйбышев, 1971.

5. Haire E.T. Tutan-II Structures reliability analysis. Proceedings of the sixth symposium on ballistic missile and aerospace technology. London, Academic Press, 1961.

6. Кузнецов А.А. Надежность конструкции л. а. Изд. МАИ, 1971.

7. Болотин В.В. Двухсторонние и уточненные оценки для функции надежности. - В сб.: Проблемы надежности в строительной механике. Изд. РИТИП, Вильнюс, 1968.

8. Миноранский Э.И. К вопросу о выбросах случайного процесса с произвольным законом распределения (настоящий сборник).