

УДК 539.43

А. А. Козлов

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НЕСИММЕТРИЧНЫХ И СИММЕТРИЧНЫХ  
ЦИКЛОВ НАПРЯЖЕНИЙ

Для расчета долговечности конструкций несимметричные циклы напряжений обычно приводятся к эквивалентным симметричным. Для этой цели применяются известные формулы, некоторые из них приведены ниже.

Формула Гудмана:  $\sigma_{-1} = \frac{\sigma_a}{1 - \sigma_m / \sigma_B}$ , (1)

Формула Гербера:  $\sigma_{-1} = \frac{\sigma_a}{1 - (\sigma_m / \sigma_B)^2}$ , (2)

Формула Зодерберга:  $\sigma_{-1} = \frac{\sigma_a}{1 - \sigma_m / \sigma_T}$ , (3)

Формула И. П. Одянга:  $\sigma_{-1} = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_a \sigma_m}$ , (4)

Формула И. А. Биргера:  $\sigma_{-1} = \sqrt{\frac{\sigma_m^2}{1 - \sigma_m / \sigma_B}}$ . (5)

Формула М. Н. Степнова, С. П. Евстратовой (для алюминиевых сплавов):

$$\sigma_{-1} = \frac{\sigma_a}{1 - (\sigma_m / \sigma_B)^{0,65}}. \quad (6)$$

Формула А. И. Сочавы:

$$\sigma_{-1} = \frac{\sigma_a}{A^{x-x_0} \left( \frac{1-x^2}{1-x_0^2} \right)}, \quad (7)$$

где  $A = \frac{\lg \lg N}{\lg \lg N_B}$ ,  $N$  - расчетная долговечность,  $N_B$  - базовая долговечность,  $x = f(\sigma_m, \sigma_B)$ ,  $x_0 = f_1(\sigma_B)$ .

В этих формулах  $\sigma_{-1}$  есть  $\sigma_{\text{экв}}$ ;  $\sigma_m$ ,  $\sigma_a$  - среднее и амплитудное напряжение цикла;  $\sigma_B$ ,  $\sigma_T$  - предел прочности и предел

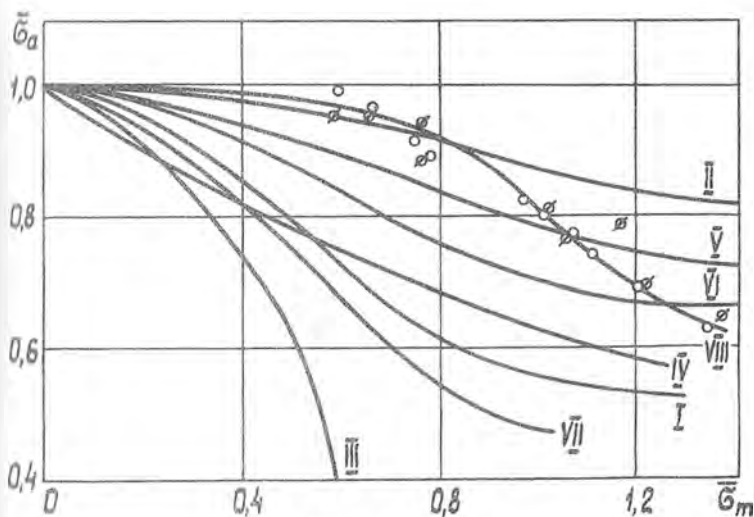


Рис. 1

Зависимость Гудмана	У. Зависимость Биргера
-"- Гербера	УІ. -"- Степнова-Евстратовой
-"- Зодерберга	УІІ. -"- Сочавы
-"- Одингга	УІІІ. о - расчет по формулам (12), (20)
	ø - эксперимент

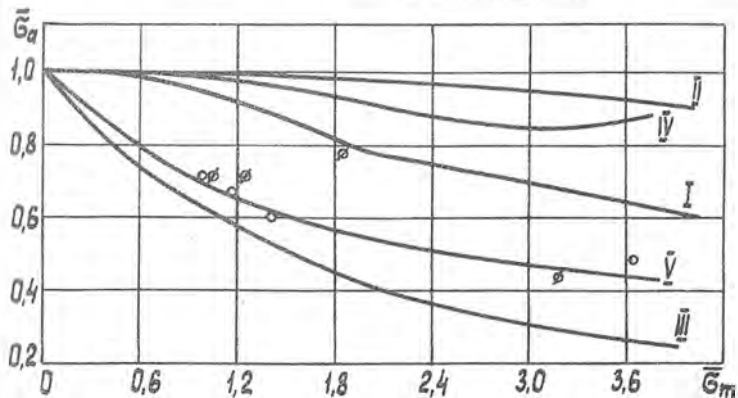


Рис. 2

Зависимость Гудмана	ІУ. Зависимость Биргера
-"- Гербера	У. о - расчет по формулам (12), (20)
-"- Одингга	ø - эксперимент

текучести материала.

На рис. 1.2 для двух материалов (МА-2 и 30Х1СА соответственно) приведены результаты расчета в виде кривых  $\bar{\sigma}_a = \sigma_a / \sigma_{зкв}$  в функции от  $\bar{\sigma}_m = \sigma_m / \sigma_{зкв}$ , полученных по различным формулам, а также результаты эксперимента. Видно, что эти результаты плохо согласуются между собой. Это можно объяснить тем, что приведенные формулы не учитывают особенности материала, конструкции и вида нагружения.

Целью настоящей работы является установление эквивалентности несимметричных и симметричных циклов из условия равной повреждаемости. При этом в качестве критерия повреждаемости будем рассматривать относительную поврежденную площадь  $\bar{F}_n = F_n / F_0$ , где  $F_n$  - площадь, занятая усталостной трещиной,  $F_0$  - начальная площадь сечения. Линейно-дискретная теория накопления повреждений [1, 2] позволяет в любой момент усталостного нагружения определить значение  $\bar{F}_n$ .

Диапазон значений коэффициентов асимметрии  $R$ , ограничивающий область применения полученных ниже соотношений, обусловлен наличием экспериментальных данных, необходимых для сопоставления с расчетными. Этот диапазон составляет значения  $R$  от  $-2,1$  до  $+0,764$ .

Рассмотрим несимметричный цикл с коэффициентом асимметрии  $R \leq 0$  (рис. 3). Представим повреждение, накопленное за один цикл, как сумму повреждений, вносимых двумя полуциклами.

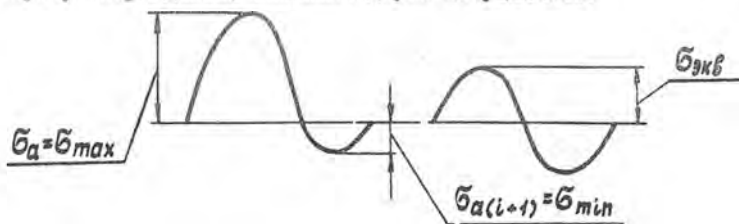


Рис. 3

Обозначим:  $\Delta \bar{F}_{n_i}$  - повреждение за  $i$ -й симметричный цикл;  $\sigma_{a_i}$  - амплитуда этого цикла;  $\omega$  - частота;  $\tau$  - время;  $K, b, c$  - постоянные.

Аппроксимируя кривую повреждения [1] выражением

$$\bar{F}_n = K \sigma_a^b \tau^c, \quad (8)$$

получим повреждение за один цикл

$$\Delta \bar{F}_n = \frac{d\bar{F}_n}{dn} = \frac{K \sigma_a^b \tau^{c-1} c}{\omega} \quad (9)$$

Условие равной повреждаемости, вносимой данным несимметричным и эквивалентным симметричным циклами, запишется в виде

$$K(\sigma_{a_i})^b \tau^{c-1} c \eta + K(\sigma_{a_{i+1}})^b \tau^{c-1} c \xi = K \sigma_{эKB}^b \tau^{c-1} c,$$

где  $\eta, \xi$  - корректирующие функции от  $R$  при напряжениях  $i$ -го (растягивающего) и  $(i+1)$ -го (сжимающего) полуциклов соответственно, полученные экспериментально; эти функции учитывают также разные значения  $\omega_{эKB}, \omega_i, \omega_{i+1}$ .

Из последнего выражения имеем:

$$\sigma_{эKB} = \sigma_{max} \sqrt[b]{\eta + |R|^b \xi} \quad (10)$$

Если  $R = -1$ , то  $\sigma_{эKB} = \sigma_{max}$ , и из (10) получаем

$$\eta_{-1} + \xi_{-1} = 1.$$

Как показывает сопоставление расчета с экспериментом, эта зависимость может быть принята для всего рассматриваемого диапазона  $R \leq 0$ , т.е.

$$\eta + \xi = 1. \quad (11)$$

Тогда формула (10) запишется в виде

$$\sigma_{эKB} = \sigma_{max} \sqrt[b]{1 - \xi [1 - |R|^b]}. \quad (12)$$

Для пульсирующего цикла  $R = 0$  и

$$\sigma_{эKB} = \sigma_{max} \sqrt[b]{1 - \xi_0}. \quad (13)$$

На основании обработки экспериментальных данных принимаем

$$\xi = \xi_0 + A \sqrt[b]{R^5}. \quad (14)$$

Здесь  $\xi_0, A$  зависят только от материала и определяются из двух испытаний образцов. Испытание при  $R = 0$  позволяет определить  $\xi_0$  из формулы (13); испытание при  $R \neq 0$  позволяет определить  $\xi$  по формуле (12) и  $A$  - по формуле (14). Значение параметра "b" должно быть получено из аппроксимации кривых повреждения  $\bar{F}_n(\tau)$  (рис. 4), рассчитанных для данной конструкции по ме-

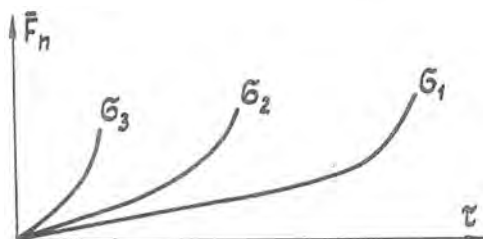


Рис. 4

(сечения, концентратора), выполненной из данного материала при данном нагружении. Это следует из индивидуальных свойств параметров  $\xi_0$ ,  $A$  и  $B$ .

тодике, изложенной [1, 2].

Из сказанного можно заключить, что для данного сочетания  $\sigma_a$ ,  $\sigma_m$  не существует единственного значения  $\sigma_{зкв}^{расч}$ . Оно должно быть определено для данной конструкции

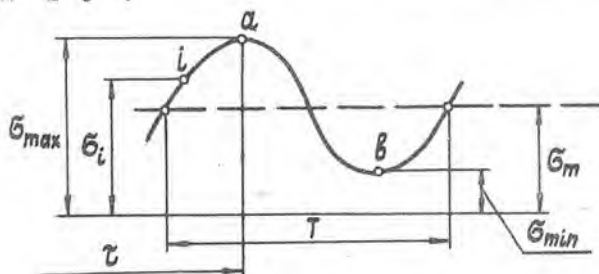


Рис. 5

Рассмотрим далее циклы с коэффициентом асимметрии  $R > 0$  (рис. 5). Для этого случая воспользуемся представлениями, изложенными в работе [3] о повреждении, накопленном на участке, составляющем часть цикла. Повреждение  $\Delta D_{ia}$ , вызванное участком  $ia$  (рис. 4) зависит от положения цикла в реализации, характеризуемого величиной  $\Delta D_{\tau} = \left(\frac{dD}{d\tau}\right)_{\tau}$  - повреждением за один цикл с амплитудой  $\sigma_{max}$  и временной координатой  $\tau$ , и от положения участка в цикле, характеризуемом отношением  $\sigma_i / \sigma_{max}$ . Это повреждение определяется выражением

$$\Delta D_{ia} = \Delta D_{\tau} (\psi_a - \psi_i), \quad (15)$$

где  $D$  - мера повреждения,  $\Delta D_{\tau} = \left(\frac{dD}{d\tau}\right) T$ ,  $T$  - период,

$$\psi_i = \frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{\sigma_i}{\sigma_{max}} - \frac{1}{8\pi} \sin 4 \arcsin \frac{\sigma_i}{\sigma_{max}}. \quad (16)$$

Повреждение за несимметричный цикл

$$2(\Delta \bar{F}_n)_{\alpha\beta} = 2 \Delta \bar{F}_{n\tau} (\psi_\alpha - \psi_\beta) = \Delta \bar{F}_{п экв}.$$

Используя (9) и учитывая, что  $\psi_\alpha = 1/4$ ,  $\psi_\beta = \psi(\sigma_{min})$ , получим

$$2 \sigma_{max}^6 \left[ \frac{1}{4} - \psi(\sigma_{min}) \right] \mu = \sigma_{экв}^6.$$

Здесь  $\mu$ , аналогично предыдущему, - корректирующая функция  $R$ , определяемая из эксперимента.

Далее

$$\sigma_{экв} = \sigma_{max} \sqrt[6]{2 \left[ \frac{1}{4} - \psi(\sigma_{min}) \right] \mu}. \quad (17)$$

Для  $R = 0$   $\sigma_{min} = 0$ ,  $\psi(\sigma_{min}) = 0$  и

$$\sigma_{экв} = \sigma_{max} \sqrt[6]{\mu_0/2}. \quad (18)$$

Из сравнения с формулой (13) заключаем, что

$$\mu_0 = 2(1 - \xi_0).$$

Хорошее согласование с экспериментом дает такая же зависимость для  $R > 0$ , т.е.

$$\mu = 2(1 - \xi), \quad (19)$$

где  $\xi$  определяется формулой (14).

Из выражения (17) и (19) получим

$$\sigma_{экв} = \sigma_{max} \sqrt[6]{4(1 - \xi) \left[ \frac{1}{4} - \psi(\sigma_{min}) \right]}. \quad (20)$$

Очевидно, что и в случае  $R > 0$  определение  $\sigma_{экв}$  для несимметричного цикла должно быть произведено для конкретной конструкции, выполненной из конкретного материала.

На графиках (рис. 1, 2) в координатах  $\bar{\sigma}_\alpha$  ( $\bar{\sigma}_m$ ) показаны результаты расчета по формулам (12), (20).

Для сравнения точности различных формул вычислим относительную ошибку в каждом эксперименте ( $i$ ) для различных формул ( $j$ )

$$\delta_{ij} = \frac{\sigma_{экв}^{расч} - \sigma_{экв}^{эксп}}{\sigma_{экв}^{расч}}. \quad (21)$$

Значения  $\sigma_{экв}^{эксп}$  приведены в таблице I.

Наиболее вероятная ошибка

$$M(\delta_{ij}) = \frac{\sum \delta_{ij}}{n}, \quad (22)$$

где  $n$  - число экспериментальных (и соответственно расчетных) значений  $\sigma_{эКВ}$ .

Таблица

Материал	$\sigma_a$ [кг/мм <sup>2</sup> ]	$\sigma_m$ [кг/мм <sup>2</sup> ]	R	$\sigma_{эКВ}^{эКП}$ [кг/мм <sup>2</sup> ]
МА-2	7,1	8,4	0,084	8,45
	9,0	12,5	0,163	11,82
	7,1	12,5	0,275	10,3
	7,1	5,8	-0,101	7,55
	9,5	5,8	-0,242	10,0
СОХТСА	12,0	16,8	0,166	16,8
	9,6	16,8	0,272	13,56
	7,2	16,8	0,4	9,24
	7,2	54,0	0,764	16,8

Наибольшую ошибку для данного критерия (формулы) определим как

$$\Delta_j \approx M(\delta_{ij}) + 3S(\delta_{ij}) = M(\delta_{ij}) + 3\sqrt{\frac{\sum[\delta_{ij} - M(\delta_{ij})]^2}{n-1}} \quad (23)$$

Значения  $M(\delta_{ij})$ ,  $S(\delta_{ij})$  и  $\Delta_j$  приведены в таблице 2.

Таблица

	по Гудману	по Герберу	по Зодербергу	по Одинггу
$M(\delta_{ij})$	-0,072	-0,303	0,226	0,047
$S(\delta_{ij})$	0,187	0,319	0,182	0,214
$\Delta_j$	0,634	1,261	1,225	0,784

	по Биргеру	по Степнову-Евстратовой	по Сочаве	по формулам (12), (20)
$M(\delta_{ij})$	-0,221	-0,147	-0,114	-0,015
$S(\delta_{ij})$	0,513	0,370	0,420	0,077
$\Delta_j$	1,762	1,256	1,373	0,220

Из рассмотрения таблицы 2 следует, что ошибка при определении  $\sigma_{3k}^2$  по линейно-дискретной теории накопления повреждений существенно меньше, (в 3+8 раз), чем для других критериев.

### Л и т е р а т у р а

1. Мостовой А.С. Определение долговечности образца на основе некоторых представлений о механизме усталостного разрушения. - В кн.: Вопросы прочности элементов авиационных конструкций. Труды КуАИ, вып. 39, 1968, с. 108-118.
2. Дуплякин В.М., Мостовой А.С. Развитие гипотезы линейно-дискретного накопления усталостных повреждений в статистическом аспекте. - Проблемы прочности, 1977, № 10, с. 22-25.
3. Мостовой А.С., Архипов В.В. К определению долговечности образца при случайном стационарном нагружении. - В кн.: Вопросы прочности элементов авиационных конструкций. Межвузовский сборник, изд. КуАИ, вып. 1, 1974, с. 140-147.
4. Редковец Н.Ф. О влиянии асимметрии цикла на усталостную прочность деталей. - В кн.: Прочность, надежность и долговечность авиационных конструкций. Межвузовский сборник, Киев, вып. 2, 1976, с. 37-42.
5. Сочава А.И. Об аппроксимации диаграммы предельных амплитуд с учетом области средних напряжений сжатия. - Проблемы прочности, 1977, № 10, с. 18-20.