

УДК 624.074.4

С. Х. Хазанов

МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ КРИВОЛИНЕЙНОГО СТЕРЖНЯ
С ПРОИЗВОЛЬНЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ ИНЕРЦИИ
ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Шпангоуты с произвольным расположением главных осей инерции поперечного сечения являются распространенным элементом конструкции летательных аппаратов. В целях экономии веса зачастую проектируются шпангоуты переменного сечения. Весьма эффективным методом расчета подобных систем является метод конечных элементов. При достаточно мелком членении можно в пределах каждого конечного элемента считать поперечное сечение постоянным. Тогда для получения матрицы жесткости элемента можно воспользоваться точным решением дифференциальных уравнений крутового кольца. В такой постановке в работе [1] получена в замкнутом виде матрица жесткости конечного элемента для случая, когда одна из главных осей инерции сечения лежит в плоскости кольца.

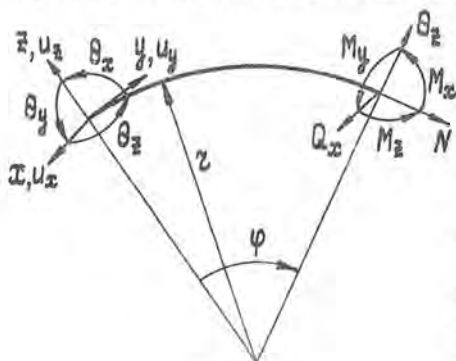


Рис. 1

Рассмотрим тонкое круговое кольцо постоянного сечения. Расположение главных осей инерции поперечного сечения будем предполагать произвольным.

Примем следующие обозначения:

\bar{z} — радиус осевой линии кольца, проходящей через центры тяжести поперечных сечений; φ — угловая координата точки осевой линии

кольца; x, y, z - подвижная правая прямоугольная система координат; U_x, U_y, U_z - проекции перемещения точки осевой линии на координатные оси; $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ - углы поворота поперечного сечения кольца относительно координатных осей; Q_x, Q_z, N - перерезывающие и нормальная силы в сечении кольца; M_x, M_y, M_z - изгибающие и крутящий моменты в сечении кольца; F - площадь сечения кольца; I_x, I_z, I_{xz} - моменты инерции поперечного сечения кольца; E - модуль упругости материала кольца; $\nu < E$; $B_x = EI_x$; $B_z = EI_z$; $B_{xz} = EI_{xz}$; C - жесткость сечения кольца на кручение.

Принятая система координат, а также положительные направления сил, моментов, перемещений и углов поворота показаны на рис. 1.

В работе [2] интегрированием дифференциальных уравнений равновесия бесконечно малого элемента кругового стержня получены выражения для перемещений, сил и моментов. При отсутствии внешних распределенных нагрузок они имеют вид:

$$U_x = A_1 \sin \varphi + A_2 \cos \varphi + A_3 \varphi \cos \varphi + A_4 \varphi \sin \varphi + A_5 \varphi + A_6$$

$$U_y = B_1 \sin \varphi + B_2 \cos \varphi + B_3 \varphi \cos \varphi + B_4 \varphi \sin \varphi + B_5 \varphi + B_6$$

$$U_z = (B_2 - \alpha B_4 - \beta A_3) \sin \varphi + (-B_1 - \alpha B_3 + \beta A_4) \cos \varphi + B_3 \varphi \sin \varphi - B_4 \varphi \cos \varphi - B_5$$

$$\theta_x = \frac{1}{2} [((1 + \alpha) B_3 - \beta A_4) \sin \varphi - ((1 + \alpha) B_4 + \beta A_3) \cos \varphi - B_5 \varphi - B_6]$$

$$\theta_y = \frac{1}{2} [(A_1 + \alpha A_3 - \beta B_4) \sin \varphi + (A_2 - \alpha A_4 - \beta B_3) \cos \varphi + A_3 \varphi \cos \varphi + A_4 \varphi \sin \varphi + \beta B_5]$$

$$\theta_z = \frac{1}{2} [(A_2 - A_4) \sin \varphi - (A_1 + A_3) \cos \varphi + A_3 \varphi \sin \varphi - A_4 \varphi \cos \varphi - A_5], \quad (I)$$

$$Q_x = \frac{1}{2} \ell A_5$$

$$N = \frac{1}{2} [(\ell B_3 + g A_4) \cos \varphi + (\ell B_4 - g A_3) \sin \varphi]$$

$$Q_z = \frac{1}{z} [(f B_3 + g A_4) \sin \varphi + (g A_3 - f B_4) \cos \varphi]$$

$$M_x = (f B_3 + g A_4) \cos \varphi + (f B_4 - g A_3) \sin \varphi - m B_5$$

$$M_y = (h A_3 - k B_4) \cos \varphi + (h A_4 + k B_3) \sin \varphi - l A_5$$

$$M_z = (h A_3 - k B_4) \sin \varphi - (h A_4 + k B_3) \cos \varphi, \quad (2)$$

где

$$a = \frac{1-\lambda \nu}{1+\lambda \nu}; \quad b = \frac{2\alpha \nu}{(\alpha+1)(1+\lambda \nu)}; \quad c = \frac{2\alpha [1+\nu(1-\alpha\beta)]}{(\alpha+1)(1+\lambda \nu)};$$

$$d = \frac{2B_x \alpha}{(\alpha+1)(1+\lambda \nu)}; \quad f = \frac{2B_x \lambda}{z^2(1+\lambda \nu)}; \quad g = \frac{2B_x \alpha}{z^2(\alpha+1)(1+\lambda \nu)};$$

$$h = \frac{2B_z [1+\nu(1-\alpha\beta)]}{z^2(\alpha+1)(1+\lambda \nu)}; \quad k = \frac{2B_z \beta}{z^2(\alpha+1)(1+\lambda \nu)}; \quad l = \frac{B_z}{\alpha z^2}; \quad m = \frac{B_x(1-\alpha\beta)}{z^2};$$

$$\alpha = \frac{B_{zx}}{B_x}; \quad \beta = \frac{B_{zy}}{B_z}; \quad \alpha = \frac{B_z}{C}; \quad \nu = \frac{B_x}{z^2 B}; \quad \lambda = 1 - \frac{\alpha\beta\alpha}{\alpha+1};$$

A_i, B_i - произвольные постоянные.

Рассмотрим конечный элемент кольца с угловым размером φ_0 и узлами I и 2. Введем векторы узловых сил и узловых перемещений, положительные направления которых показаны на рис. 2:

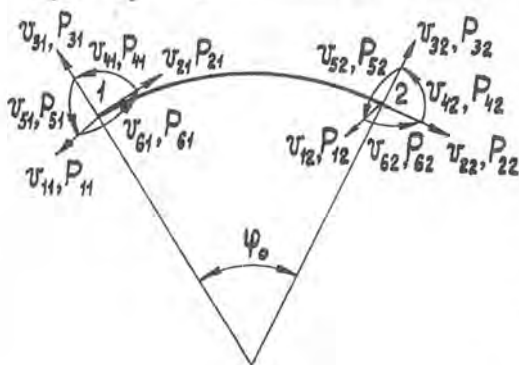


Рис. 2

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}; \quad V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix},$$

где

$$P_i = [P_{1i} P_{2i} P_{3i} P_{4i} P_{5i} P_{6i}]^T, \quad V_i = [v_{1i} v_{2i} v_{3i} v_{4i} v_{5i} v_{6i}]^T \quad (i=1,2)$$

Зависимость $P=KV$, где K - матрица жесткости конечного элемента кольца, можно записать в блочном виде

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix},$$

откуда вытекают равенства

$$P_1 = K_{11} V_1 + K_{12} V_2$$

$$P_2 = K_{21} V_1 + K_{22} V_2. \quad (3)$$

Блоки K_{11} , K_{12} , K_{21} , K_{22} матрицы жесткости будем искать с помощью приема, изложенного в [3]. Прежде всего из свойства симметрии матрицы жесткости вытекает соотношение $K_{12} = K_{21}^T$. Запишем далее в матричной форме уравнения равновесия, связывающие между собой узловые силы P_1 и P_2 :

$$P_1 = LP_2, \quad (4)$$

где

$$L = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\varphi_0 & -\cos\varphi_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r(1-\cos\varphi_0) & r\sin\varphi_0 & -1 & 0 & 0 \\ r(1-\cos\varphi_0) & 0 & 0 & 0 & -\cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0 \\ r\sin\varphi_0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi_0 & -\cos\varphi_0 \end{bmatrix}.$$

Подставляя в (4) выражения для P_1 и P_2 из (3), получим

$$K_{11} V_1 + K_{12} V_2 = LK_{21} V_1 + LK_{22} V_2.$$

Последнее равенство должно выполняться при любых V_1 и V_2 , поэтому из него вытекают соотношения:

$$K_{12} = LK_{22}; \quad K_{11} = LK_{21} = LK_{12}^T. \quad (5)$$

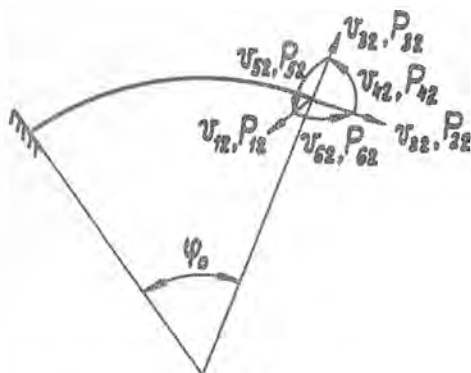


Рис. 3

из формул (1) при $\psi = 0$ получим

$$A_2 + A_6 = 0; \quad B_2 + B_6 = 0;$$

$$-B_1 - aB_3 + \beta A_4 - B_5 = 0; \quad (1+a)B_4 + B_6 - \beta A_3 = 0;$$

$$A_2 - cA_4 - dB_3 + \beta B_5 = 0; \quad A_1 + A_3 + A_5 = 0.$$

Положив в (2) $\psi = \psi_0$, можно записать

$$P_2 = RA,$$

где

$$A = [A_3 \ A_4 \ A_5 \ B_3 \ B_4 \ B_5]^T,$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & l/2 & 0 & 0 & 0 \\ -g \sin \psi_0 / 2 & g \cos \psi_0 / 2 & 0 & f \cos \psi_0 / 2 & f \sin \psi_0 / 2 & 0 \\ g \cos \psi_0 / 2 & g \sin \psi_0 / 2 & 0 & f \sin \psi_0 / 2 & -f \cos \psi_0 / 2 & 0 \\ -g \sin \psi_0 & g \cos \psi_0 & 0 & f \cos \psi_0 & f \sin \psi_0 & 0 \\ h \cos \psi_0 & h \sin \psi_0 & -l & k \sin \psi_0 & -k \cos \psi_0 & -m \\ h \sin \psi_0 & -h \cos \psi_0 & 0 & -k \cos \psi_0 & -k \sin \psi_0 & 0 \end{bmatrix}$$

Таким образом, задача сводится к определению матрицы K_{22} . Для этого возьмем узел I (рис. 3), полагая $V_1 = 0$, и из второго равенства (3) получим $P_2 = K_{22} V_2$. То есть, матрица K_{22} связана между собой силами P_2 и перемещениями V_2 при неподвижном узле I.

В дальнейших рассуждениях удобно начало координат совместить с узлом I. Тогда

Выражения (1) для перемещений содержат 12 постоянных. Ис-
 пользуя соотношения (6), можно свести их к шести постоянным, вхо-
 дящим в матрицу A . Тогда при $\varphi = \varphi_0$ получим

$$V_2 = WA, \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_0 \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 & \varphi_0 \sin \varphi_0 - c(1 - \cos \varphi_0) & \varphi_0 - \sin \varphi_0 \\ -b(1 - \cos \varphi_0) & b \sin \varphi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b(1 - \cos \varphi_0)/z & -b \sin \varphi_0/z & 0 \\ (\varphi_0 \cos \varphi_0 - (1-c) \sin \varphi_0)/z & \varphi_0 \sin \varphi_0/z & -\sin \varphi_0/z \\ \varphi_0 \sin \varphi_0/z & -((1-c) \sin \varphi_0 + \varphi_0 \cos \varphi_0)/z & -(1 - \cos \varphi_0)/z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -d(1 - \cos \varphi_0) & 0 & \beta(1 - \cos \varphi_0) \\ \varphi_0 \cos \varphi_0 - a \sin \varphi_0 & \varphi_0 \sin \varphi_0 - (1+a)(1 - \cos \varphi_0) & \varphi_0 - \sin \varphi_0 \\ \varphi_0 \sin \varphi_0 & \sin \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0 & -(1 - \cos \varphi_0) \\ (1+a) \sin \varphi_0/z & (1+a)(1 - \cos \varphi_0)/z & -\varphi_0/z \\ 0 & -d \sin \varphi_0/z & \beta(1 - \cos \varphi_0)/z \\ d \sin \varphi_0/z & 0 & -\beta \sin \varphi_0/z \end{bmatrix}$$

Исключив A из (7), (8), получим $P_2 = RW^{-1}V_2$, откуда

$$K_{22} = RW^{-1}. \quad (9)$$

Остальные подматрицы матрицы жесткости K получаются че-
 K_{22} в соответствии с равенствами (5).

По разработанному алгоритму была составлена программа на
 языке ФОРТРАН-4. В качестве тестовой задачи рассмотрен расчет
 кольца, представляющего собой четверть кругового кольца, жестко
 защемленного на одном конце и нагруженного на свободном конце
 радиально направленной силой P , перпендикулярной плоскости кольца.

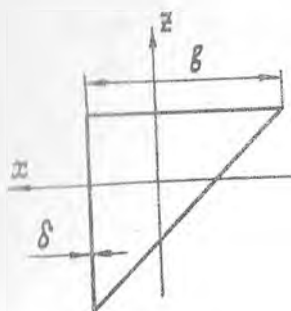


Рис. 4

В результате получим

$$U = \begin{bmatrix} u_x(\pi/2) \\ u_y(\pi/2) \\ u_z(\pi/2) \\ \theta_x(\pi/2) \\ \theta_y(\pi/2) \\ \theta_z(\pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \left[\frac{(\frac{\pi}{2} - c)f + dg}{fh - kg} + \frac{\frac{\pi}{2} - 1}{l} \right] \\ r \frac{bf + ag}{fh - kg} \\ -r \frac{\frac{\pi}{2} g}{fh - kg} \\ \frac{(1+a)g - bf}{fh - kg} \\ \frac{\pi/2 \cdot f}{fh - kg} - \frac{1}{l} \\ - \frac{(1-c)f + dg}{fh - kg} \end{bmatrix} P$$

Сечение кольца представляет собой тонкостенный контур в виде равнобедренного прямоугольного треугольника (рис. 4). Для этого сечения

$$B = (2 + \sqrt{2}) \delta b^2 E, \quad B_x = B_z = \frac{2 + 5\sqrt{2}}{24} \delta b^3 E$$

$$B_{zx} = -\frac{b - \sqrt{2}}{24} \delta b^3 E, \quad C = \frac{2 - \sqrt{2}}{4(1 + \mu)} \delta b^3 E.$$

Для рассматриваемой задачи перемещения свободного кольца можно подсчитать аналитически, положив в формулах (7), (8) $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, $P_2 = [P \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

Расчет на ЭВМ ЕС-1020 был выполнен при следующих числовых значениях параметров кольца: $r = 1$ м, $b = 0,02$ м, $\delta = 0,001$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$. Поскольку матрица W , которая подлежит обращению, содержит элементы вида $\varphi_0 - \sin \varphi_0$, $1 - \cos \varphi_0$ и т.п., то вычисление матрицы жесткости каждого элемента проводилось с удвоенной точностью. При разбиении четверти кольца на 2, 5, 10 конечных элементов и при решении разрешающей системы линейных уравнений по методу Гаусса с удвоенной точностью для перемещения свободного конца получены значения

$$\begin{bmatrix} 0,2732714129 \cdot 10^{-2} & 0,5614805565 \cdot 10^{-3} & 0,8819715957 \cdot 10^{-3} \\ -0,1122961113 \cdot 10^{-2} & 0,1149297424 \cdot 10^{-2} & 0,2497679602 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}^T P,$$

...надающие в десяти значащих цифрах с расчетом по формулам (10).
...есть сила берется в ньютонах, линейные перемещения получаются в
...трах, а угловые - в радианах.

Далее был проведен анализ работы алгоритма при малых углах.
Для этого при прежней схеме нагружения полный угловой
...мер стержня принимался равным 10^0 , и стержень разбивался на
... или десять конечных элементов. Результат расчета

$$\begin{bmatrix} 0,3935057945 \cdot 10^{-5} & 0,1295921649 \cdot 10^{-6} & 0,1978013764 \cdot 10^{-5} \\ -0,1706030259 \cdot 10^{-4} & 0,1480725363 \cdot 10^{-5} & 0,3381048770 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}^T P.$$

Таким образом, можно прийти к выводу, что разработанный ал-
...рм для построения матрицы жесткости конечного криволинейного
...ржня обеспечивает высокую точность.

Л и т е р а т у р а

1. Логунов В.Я. Матрица жесткости элемента кривого бруса. -
...н.: Вопросы прочности элементов авиационных конструкций. Меж-
...овский сборник, изд. КуАИ, вып. 2, 1975, с. 68-74.
2. Ахмедьянов И.С. Расчет кругового кольца при произвольном
...положении главных осей инерции поперечного сечения. - В кн.:
...просы прочности элементов авиационных конструкций. Труды КуАИ,
...н. 60, 1973, с. 97-102.
3. Хазанов Х.С., Савельев Л.М. Метод конечных элементов в
...ложении к задачам строительной механики и теории упругости. -
...бное пособие, часть 2. - Изд. КуАИ, 1976. - 74 с.