

УДК 539.3:629.7.028

В.И.Леонов

К ВОПРОСУ О РАСЧЕТЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ НА  
ДЕЙСТВИЕ ЛОКАЛЬНЫХ НАГРУЗОК

В работах [1-3] рассматривалось напряженное состояние полой цилиндрической оболочки с круглым жестким включением при действии нормальной к срединной поверхности силы, изгибающего момента относительно образующей оболочки и крутящего момента. Исследовалось влияние размера включения и геометрии оболочки на значения наибольших напряжений, возникающих в ней. При решении использовался приближенный подход, согласно которому расчет оболочки заменяется расчетом панели радиуса  $r_1$ , вырезанной из цилиндрической оболочки. Если размеры панели выбраны достаточно большими, то в зоне приложения нагрузки это решение будет с достаточной точностью совпадать с решением для оболочки. Такой подход объясняется тем, что используемые фундаментальные решения являются возрастающими на бесконечности. В связи с этим в работе [4] построены функции, представляющие собой линейную комбинацию фундаментальных решений и частных решений однородного дифференциального уравнения изгиба оболочки [5], для которых по крайней мере внутренние усилия являются убывающими с ростом аргумента. Целью настоящей работы является сопоставление результатов расчета цилиндрической оболочки, использующего убывающие решения, с результатами работ [1-3].

Фундаментальное решение дифференциального уравнения полой цилиндрической оболочки, соответствующее действию в начале координат сосредоточенной нормальной силы  $P$ , для которого внутренние усилия являются убывающими по мере роста аргумента,

уравнение [ 4 ] имеет вид

$$F(\rho, \theta) = - \frac{16i\omega^2 \lambda \mathcal{P}}{\pi E \alpha z_0} \sum_{\nu=0,2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \ell_{\nu} i^{\nu} k \bar{D}_{k\nu}(z) \cos \nu \theta, \quad (I)$$

$$F(\rho, \theta) = w(\rho, \theta) + i \Phi(\rho, \theta), \quad \omega^2 = \frac{1}{4} \sqrt{3(1-\mu^2)} \alpha^2 \lambda,$$

$$\bar{D}_{k\nu}(z) = \Pi_k(z) [J_{k-\nu}(z) + J_{k+\nu}(z)],$$

$$\Pi_k(z) = P_k(z) - \frac{L\pi}{2} J_k(z),$$

$$P_k(z) = \left. \frac{\partial J_{\mu}(z)}{\partial \mu} \right|_{\mu=k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{k+2n}}{n!(k+n)!} \left[ \ln \frac{z}{2} - \psi(n+k+1) \right],$$

$$z = \alpha \sqrt{2i}, \quad \alpha = \omega \rho, \quad \lambda = \frac{R}{h}, \quad \alpha = \frac{z_0}{R}, \quad \rho = \frac{z}{z_0}.$$

Здесь  $\rho, \theta$  - полярные на развертке цилиндра координаты (угол  $\theta$  отсчитывается от образующей);  $R, h$  - радиус средней поверхности и толщина оболочки<sup>\*</sup>;  $z_0$  - характерный линейный размер (радиус жесткого включения);  $w$  - нормальное к поверхности оболочки перемещение;  $\Phi$  - функция напряжения;  $E, \mu$  - модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки;  $J_k(z)$  - функция Бесселя первого рода;  $\psi(n)$  - логарифмическая производная гамма-функции;  $\ell_{\nu} = 0,5$  при  $\nu = 0$  и  $\ell_{\nu} = 1$  при  $\nu \neq 0$ .

Решение однородного дифференциального уравнения изгиба цилиндрической оболочки берется в форме, предложенной П. Кизановым [ 5 ]. Постоянные интегрирования, входящие в это решение, определяются из условия равенства перемещений и углов поворота жесткого включения и оболочки по линии их контакта.

Первоначально было рассмотрено действие на оболочку сосредоточенных нормальной к средней поверхности силы  $\mathcal{P}$  и изгибающего момента относительно образующей  $M_k$ , приложенных в начале координат. На этих задачах изучались особенности внутренних усилий в точке приложения нагрузки и затухание их по мере роста аргумента [ 4 ]. Характерной особенностью полученных решений являются значения окружных и радиальных изгибающих моментов и нормальных сил в сечениях оболочки ( $M_{\rho} = M_{\theta}, N_{\rho} = N_{\theta}$ ), которые выполняются в каждой точке направляющей, проходящей через начало координат.

\* Основные обозначения совпадают с принятыми в работе [ 4 ].

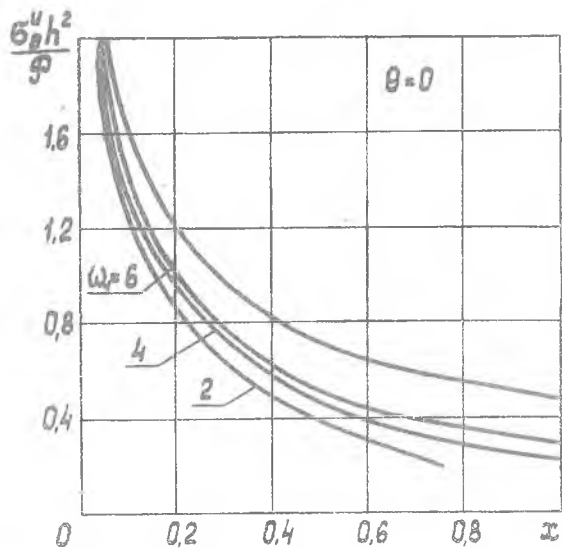


Рис. 1

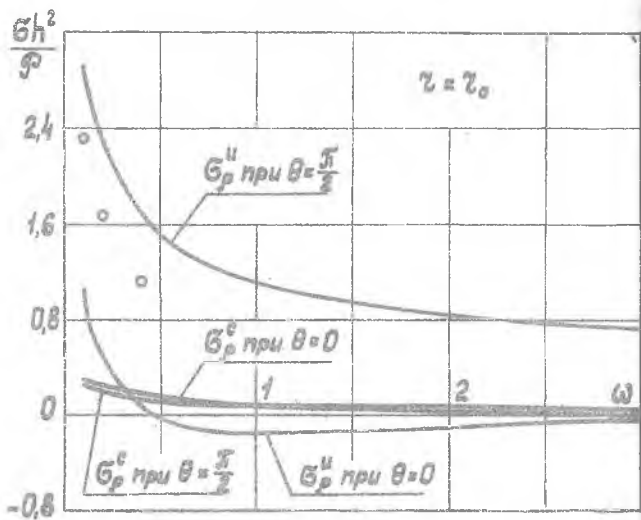


Рис. 2

Для случая действия сосредоточенной силы  $P$  на рис. 1 графически показана зависимость наибольших напряжений  $\sigma_{\theta}^u = \frac{6M_{\theta}}{h^2}$  вдоль образующей оболочки (верхняя кривая) от параметра

$$\omega = \omega\rho = \frac{1}{2} \sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \frac{z}{\sqrt{Rh}}$$

который, с одной стороны, при фиксированных значениях радиуса и толщины оболочки определяет расстояние от точки приложения нагрузки, а с другой стороны, для фиксированной точки и неизменной толщины определяет кривизну срединной поверхности оболочки. Три кривые на рис. 1 соответствуют полученным в работе [1] значениям напряжений  $\sigma_{\theta}^u$  для различных значений параметра

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \frac{z_1}{\sqrt{Rh}}$$

характеризующего размер и внутреннюю геометрию шарнирно закрепленной круглой панели, вырезанной из оболочки.

Отличие напряжений в панели от напряжений, возникающих в оболочке, увеличивается по мере роста значения  $\omega$  и для  $\omega_1 = 6$  составляет 13% при  $\omega = 0,1$  и 36% при  $\omega = 0,8$ .

Далее рассматривалась задача расчета цилиндрической оболочки, нагруженной силой  $P$  через круглое жесткое включение радиуса  $\rho$ . Наибольшие напряжения, как и следовало ожидать, возникают в оболочке по линии спая с включением при  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . На рис. 2 показано поведение изгибных и мембранных радиальных напряжений, вычисляемых по формулам  $\sigma_{\rho}^u = \frac{6M_{\rho}}{h^2}$ ,  $\sigma_{\rho}^c = \frac{N_{\rho}}{h}$ , по мере изменения безразмерного параметра

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \frac{z_0}{\sqrt{Rh}}$$

Значение окружных напряжений не приведено, так как в силу отсутствия окружных деформаций  $\epsilon_{\theta}$  на линии спая оболочки с включением имеют место соотношения  $\sigma_{\theta}^u = \mu \sigma_{\rho}^u$  и  $\sigma_{\theta}^c = \mu \sigma_{\rho}^c$ . Точками на рис. 2 отмечены значения напряжений  $\sigma_{\rho}^u$  при  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , полученные в работе [1]. Сопоставляя эти результаты, можно отметить, что возникающие в оболочке напряжения на 20-30% больше, чем напряжения, вычисляемые в шарнирно опертой панели с  $\omega_1 = 4$ , причем это различие растет по мере увеличения параметра  $\omega$ .

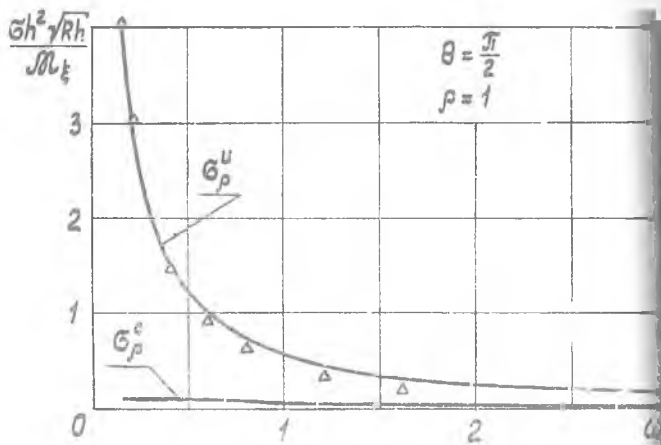


FIG. 3

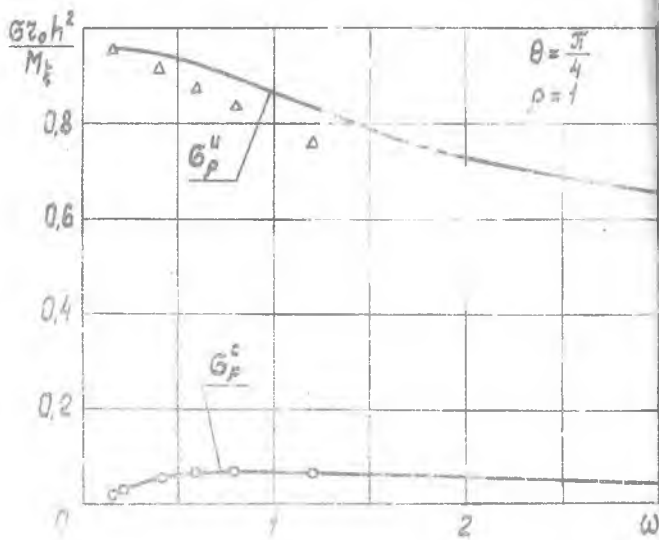


FIG. 5

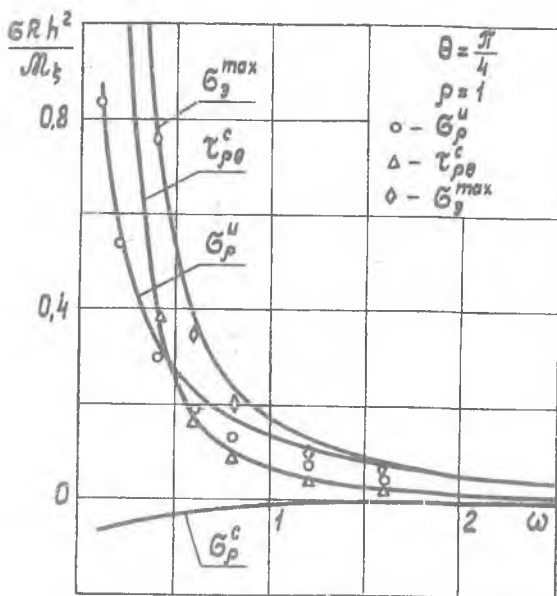


Рис. 5

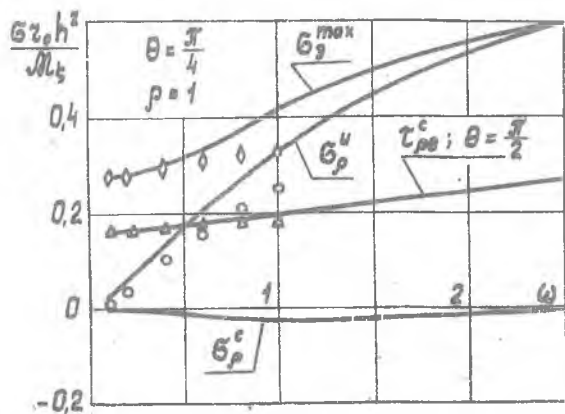


Рис. 6

Результаты расчета цилиндрической оболочки, нагруженной рез круглое жесткое включение изгибающим моментом относительно образующей  $M_z$ , приведены на рис. 3 и 4.

Наибольшего значения напряжения в оболочке достигают, так же как и в предыдущей задаче, на линии спая с включением в то  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . На рис. 3 показан график влияния размера жесткого включения  $\chi_0$  на наибольшие радиальные напряжения в цилиндрической оболочке. Влияние кривизны срединной поверхности оболочки на наибольшие напряжения представлено на рис. 4. Треугольными и круглыми точками на рис. 3 и 4 отмечены изгибающие и мембранные напряжения, полученные в работе [2]. По мере увеличения параметра  $\omega$  различие между наибольшими напряжениями, полученными в настоящей работе и работе [2], растет и при  $\omega = 1$  достигает 10%.

В дальнейшем решалась задача о передаче на цилиндрическую оболочку через жесткое включение крутящего момента относительно нормали к срединной поверхности оболочки  $M_z$ . На рис. 5 отражено влияние радиуса жесткого включения  $\chi_0$  на наибольшие изгибные мембранные напряжения  $\sigma_p^u, \sigma_p^c, \tau_{p\theta}^c = \frac{T}{h}$ , а также на максимальные эквивалентные напряжения  $\sigma_3^{max}$ , вычисляемые по теории прочности энергии формоизменения. Влияние кривизны срединной поверхности оболочки на вышеуказанные напряжения представлено на рис. 6. Круглыми, треугольными и ромбическими точками на рис. 5 и 6 показаны значения напряжений  $\sigma_p^u, \tau_{p\theta}^c$  и  $\sigma_3^{max}$  соответственно, полученные в работе [3], где решалась аналогичная задача для круглой панели, вырезанной из цилиндрической оболочки.

Сопоставляя результаты расчетов, полученных в настоящей работе, с результатами работ [1-3], можно сделать вывод, что наибольшее различие имеет место при действии на оболочку нормальной к срединной поверхности нагрузки.

#### Л и т е р а т у р а

1. Леонов В.И., Хазанов Х.С. К расчету искривленных круглых пластин на нормальные сосредоточенные воздействия. - В сб.: "Вопросы прикладной механики в авиационной технике", Труды КуАИ, вып. 63, 1972.

1. Леонов В.И., Хазанов Х.С. Расчет цилиндрической оболочки под действием локальных нагрузок, приводящихся к изгибающему моменту относительно образующей. В сб. "Вопросы прикладной механики в авиационной технике". Труды КуАИ, вып. 66, 1973.
2. Леонов В.И., Хазанов Х.С. Цилиндрическая оболочка под действием крутящего момента относительно нормали к срединной поверхности. "Вопросы прочности элементов авиационных конструкций". Межвузовский сборник, вып. I, изд. КуАИ, 1974.
3. Леонов В.И., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Передача локальных воздействий на цилиндрическую оболочку. "Механика деформируемого твердого тела". Межвузовский сборник, вып. 2, изд. КГУ, 1976.
4. Хазанов Х.С. К расчету цилиндрических оболочек с круглыми отверстиями. В сб. "Вопросы прочности элементов авиационных конструкций". Труды КуАИ, вып. 29, 1967.