ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ
АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, вып. 5, 1979

УДК 539.3

В.Н.Паймушин, Е.С.Сомова

К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ТРЕХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК СЛОЖНОЙ ФОРМЫ, ПОЛОГИХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОВЕРХНОСТИ ОТСЧЕТА

I. Рассматривается задача расчета трехслойных оболочек сложной формы с легким ортотропным заполнителем. Данный класс оболоч является расчетной схемой трехслойных обтекателей и фонарей совр менных летательных аппаратов. При расчете таких оболочек встает задача параметризации срединных поверхностей трехслойного пакета и определение их метрик.

В статье для решения этой задачи используется подход, предложенный в работе [I]. В соответствии с этим подходом срединная поверхность заполнителя σ отображается на некоторую поверхность простой геометрии σ_0, отнесенную к линиям кривизны $\alpha_i = const \in \sigma_0$ и называемую поверхностью отсчета, с помощью векторного уравнения

$$\bar{r}(\alpha_1,\alpha_2)=\bar{r}^0(\alpha_1,\alpha_2)+H(\alpha_1,\alpha_2)\bar{m}^0, \qquad (I)$$

где $\bar{r}$ - радиус-вектор точки $M\in\sigma$, отображающейся в точку $M_0\in\sigma_0$, H - расстояние между M и M_0, измеренное по нормали $\bar{m}^0$ к σ_0. При этом, если σ полога относительно σ_0, выполняются условия [I]:

$$y_i y_k = (A_i^0 A_k^0 \theta_i \theta_k)^{-1} H_{,i} H_{,k} \ll 1$$

$$y_i = (A_i^0\theta_i)^{-1}H_{,i}, \quad \theta_i = 1 + Hk_{ii}^0, \quad A_i^0 = |\bar{r}_i^0|. \qquad (2)$$

...тогда для единичных векторов $\bar{e}_i$ координатных линий $\beta_i \in G$, ...шихся прообразом координатных линий $\alpha_i = const \in G_0$, для ...ничного вектора $\bar{m}$ к G и их производных по α_i с точностью $y_i y_k \ll 1$ имеют место следующие зависимости:

$$\bar{e}_i = \bar{e}_i^{\,0} + y_i \bar{m}^0, \quad \bar{m} = \bar{m}^0 - y_1 \bar{e}_1^{\,0} - y_2 \bar{e}_2^{\,0}, \tag{3}$$

$$\bar{e}_{1,1} = -A_2^{-1} A_{1,2} \bar{e}_2 - A_1 K_{11} \bar{m}, \quad \bar{e}_{1,2} = A_1^{-1} A_{2,1} \bar{e}_2 - A_2 K_{12} \bar{m},$$

$$\bar{m}_{,1} = A_1 (K_{11} \bar{e}_1 - K_{12} \bar{e}_2), \quad \overrightarrow{\underleftarrow{1,2}}, \tag{4}$$

$A_i = A_i^0 \theta_i$ – параметры Ляме на G,

$$K_{11} = K_{11}^0 \theta_1^{-1} - (A_1^0 \theta_1)[y^2 (A_2^0)^{-1} A_{1,2}^0 + y_{1,1}],$$

$$K_{12} = (A_1^0 \theta_1)^{-1} [y_1 (A_2^0)^{-1} A_{1,2}^0 - y_{2,1}]$$

...ривизны и кручение координатных линий $\beta_i \in G$.

Рассмотрим трехслойную оболочку с тонкими слоями постоянной ...щины, геометрические параметры которой удовлетворяют условиям: $A_i (1 + \delta_k h_k K_{ii}) \approx A_i$, $K_{ij}^k \approx K_{ij}$, где $\delta_k (\delta_1 = -\delta_2 = 1)$ – введен... символ; $H_k = h + h_k$ – расстояние от G до G_k, измеренное ...направлению $\bar{m}$ к G; $G_k (k = 1, 2)$ – срединные поверх...ти внешних слоев, $2h$, $2h_k$ $(k = 1, 2)$ – толщины заполни...ля, верхнего $(k = 1)$ и нижнего $(k = 2)$ слоев.

По теории трехслойных оболочек Григолюка-Чулкова [2] векто... перемещений в заполнителе и во внешних слоях при слабом и ...щем изгибах можно представить в виде:

$$\bar{V}^z = \sum_{i=1}^{2} (u_i + z \psi_i) \bar{e}_i + w \bar{m}, \quad -h \le z \le h \tag{5}$$

$$\bar{V}_k^z = \sum_{i=1}^{2} (u_i^k - z_k \omega_i^k) \bar{e}_i + w \bar{m}, \quad -h_k \le z_k \le h_k, \tag{6}$$

... u_i, u_i^k – тангенциальные перемещения точек G и G ...ответственно; w – прогиб, общий для всех слоев; ψ_i – ком...поненты вектора поворотов нормали $\bar{m}$ к G; ω_i^k – компонен... вектора поворотов нормали $\bar{m}_k$ к G_k по гипотезе Кирхгофа...ва.

Используя условия сопряжения внешних слоев с заполнителем по перемещениям $\bar{V}_k^z(z_k=-\delta_k h_k)=\bar{V}_z\ (z=\delta_k h)$, с точностью $1+\delta_k h_k k_{ij}\approx 1$ выразим функции u_i , ψ_i через u_i^k и w :

$$u_i=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(u_i^k+A_i^{-1}\delta_k h_k w_{,i}),$$

$$\psi_i=\frac{1}{2h}\sum_{k=1}^{2}(\delta_k u_i^k+A_i^{-1}\delta_k h_k w_{,i}). \tag{7}$$

При слабом изгибе трехслойной оболочки с легким заполните компоненты деформации слоев, соответствующие векторам перемеще (5) и (6), могут быть представлены:

$$2\varepsilon_{ij}^k=e_{ij}^k+e_{ji}^k+z_k(\varkappa_{ij}^k+\varkappa_{ji}^k),$$

$$\varepsilon_{i3}=(u_i^1-u_i^2)/2h+cA_i^{-1}w_{,i},\quad c=1+(h_1+h_2)/2h, \tag{8}$$

где принято

$$\varkappa_{11}^k=-A_1^{-1}\omega_{1,1}^k-(A_1A_2)^{-1}\omega_2^k A_{1,2},\quad \varkappa_{12}^k\approx-A_1^{-1}\omega_{2,1}^k+(A_1A_2)^{-1}\omega_1^k$$

$$e_{11}^k=A_1^{-1}u_{1,1}^k+(A_1A_2)^{-1}A_{1,2}u_2^k+k_{11}w,$$

$$e_{12}^k=A_1^{-1}u_{2,1}^k-(A_1A_2)^{-1}A_{1,2}u_1^k+k_{12}w,$$

$$\omega_1^k=A_1^{-1}w_{,1}-u_1^k k_{11}-u_2^k k_{12},\quad \overleftrightarrow{1,\ 2}. \tag{9}$$

Уравнения равновесия, соответствующие компонентам деформа ции (8), можно получить из вариационного уравнения Лагранжа $\sum_{k=1}^{3}\delta A_k=\delta W$, где δA_k – элементарная работа заданных усили и моментов, действующих на внешние слои (k = 1, 2) и заполнитель (k = 3), δW – вариация потенциальной энергии деформаци внешних слоев и заполнителя:

$$\delta W=\iint\limits_{G_0}\Big[\int_{-h}^{h}\sum_{i=1}^{2}\sigma_{i3}\,\delta\varepsilon_{i3}\,dz+\int_{-h_k}^{h_k}\sum_{i,j,k=1}^{2}\sigma_{ij}^k\,\delta\varepsilon_{ij}^k\,dz_k\Big]dG=$$

$$=\iint\limits_{G_0}\Big[\sum_{i=1}^{2}N_i^3\,\delta\varepsilon_{i3}+\sum_{i,j,k=1}^{2}(T_{ij}^k\,\delta e_{ij}^k+M_{ij}^k\,\delta\varkappa_{ij}^k)\Big]dG, \tag{10}$$

σ_{ij}^k , σ_{i3} – напряжения во внешних слоях и в заполнителе, прин $\delta_{ij}+zk_{ij}\approx\delta_{ij}$, $\delta_{ij}+z_k k_{ij}\approx\delta_{ij}$, $dG_k=A_1^kA_2^k d\alpha_1 d\alpha_2\approx A_1A_2 d\alpha_1 d\alpha_2=$ и введены усилия и моменты в слоях

$$T_{ij}^k=\int_{-h_k}^{h_k}\sigma_{ij}^k\,dz_k,\quad M_{ij}^k=\int_{-h_k}^{h_k}\sigma_{ij}^k z_k\,dz_k,\quad N_i^3=\int_{-h}^{h}\sigma_{i3}\,dz,\quad i,j,k=1,2.$$

Для оболочек с нормальной проекцией контурных линий $\Gamma \in \Sigma$ Σ_0, совпадающей с координатными линиями $\alpha_i = 0,\ \ell_i \in \Sigma_0$, можно записать:

$$\delta A = \iint\limits_{\Sigma_0} \sum_{k=1}^{2} \Big[\sum_{i=1}^{2} (X_i^k \delta u_i^k - L_i^k \delta\omega_i^k) + X_3^k \delta w \Big] d\Sigma +$$
$$+ \int_0^{\ell_2} \sum_{k=1}^{2} \Big[\sum_{i=1}^{2} (p_{1i}^k \delta u_i^k - L_{1i}^k \delta\omega_i^k) + p_{13}^k \delta w \Big] A_2 d\alpha_2 \Big|_0^{\ell_1} +$$
$$+ \int_0^{\ell_1} \sum_{k=1}^{2} \Big[\sum_{i=1}^{2} (p_{2i}^k \delta u_i^k - L_{2i}^k \delta\omega_i^k) + p_{23}^k \delta w \Big] A_1 d\alpha_1 \Big|_0^{\ell_2} +$$
$$+ \int_0^{\ell_2} p_{13}^c \delta w A_2 d\alpha_2 \Big|_0^{\ell_1} + \int_0^{\ell_1} p_{23}^c \delta w A_1 d\alpha_1 \Big|_0^{\ell_2}, \qquad (11)$$

где $\bar{X}^k = \sum_{i=1}^{2} X_i^k \bar{e}_i + X_3^k \bar{m}$, $\bar{L}^k = \sum_{i=1}^{2} L_i^k \bar{e}_i + L_3^k \bar{m}$, $\bar{p}_i^k = \sum_{j=1}^{2} p_{ij}^k \bar{e}_j + p_{i3} \bar{m}$, $\bar{L}_i^k = \sum_{j=1}^{2} L_{ij}^k \bar{e}_j + L_{i3} \bar{m}$ – векторы поверхностных и контурных усилий и моментов, приведенных к срединным поверхностям внешних слоев, $\bar{p}_i^c = p_{i3}^c \bar{m}$ – векторы контурных поперечных усилий, приведенных к срединным поверхностям заполнителя.

После обычных преобразований с точностью $1 + \hat{\delta}_k h_k k_{ij} = 1$ можно прийти к уравнению метода Бубнова, отнесенному к осям Σ, из которого следует система пяти дифференциальных уравнений равновесия:

$$(T_{11}^k A_2)_{,1} + (T_{12}^k A_1)_{,2} + T_{12}^k A_{1,2} - T_{22}^k A_{2,1} + A_1 A_2 (k_{11} N_1^k + k_{12} N_2^k -$$
$$- \delta_k N_1^3 / 2h + X_1^k + k_{11} L_1^k + k_{12} L_2^k) = 0, \qquad \overrightarrow{\underleftarrow{1,\ 2}}, \quad k = 1, 2,$$
$$\sum_k \{ [A_2 (N_1^k + L_1^k + c N_1^3)]_{,1} + [A_1 (N_2^k + L_2^k + c N_2^3)]_{,2} -$$
$$- A_1 A_2 (k_{11} T_{11}^k + 2 k_{12} T_{12}^k + k_{22} T_{22}^k - X_3^k) \} = 0 \qquad (12)$$

с общим порядком, равным двенадцати. Здесь приближенно принято $T_{ij}^k = T_{ji}^k$, $M_{ij}^k = M_{ji}^k$ и введены обозначения для перерезывающих усилий во внешних слоях:

$$N_1^k = (A_1 A_2)^{-1} [(M_{11}^k A_2)_{,1} + (M_{12}^k A_1)_{,2} + M_{12}^k A_{1,2} - M_{22}^k A_{2,1}] \ \overrightarrow{\underleftarrow{1,2}},\ k = 1,2. \qquad (13)$$

Различные комбинации статических и геометрических граничных условий на контурных линиях $\Gamma \in \Sigma$, являющихся прообразом контурных линий $\alpha_i = 0,\ \ell_i \in \Sigma_0$, при этом могут быть составлены из:

$$T_{1i}^k + k_{1i} M_{11}^k + k_{i2} M_{12}^k = p_{1i}^k + k_{1i} L_{11}^k + k_{i2} L_{12}^k \qquad \text{при} \quad \delta u_i^k \neq 0,$$

$$\sum_{K=1}^{2} M_{11}^{K} = \sum_{K=1}^{2} L_{11}^{K} \qquad \text{при } \delta w_{,1} \neq 0$$

$$\sum_{K=1}^{2} [N_1^K + cT_{13} + A_2^{-1}(M_{12}^K)_{,2}] = \sum_{K=1}^{2} [p_{13}^K - L_1^K + p_{13}^c + A_2^{-1}(L_{12}^K)_{,2}] \qquad \text{при } \delta w \neq 0 \qquad (14$$

2. На основе полученных соотношений разработана численная методика решения задачи термоупругости для незамкнутых оболочек сложной формы, срединная поверхность заполнителя которых полога относительно произвольной поверхности нулевой гауссовой кривизны (цилиндрической или конической). Предполагается, что трехслойная оболочка находится под воздействием поверхностных нормальных и тангенциальных нагрузок и объемного неравномерного температурного поля. Предусматривается учет изменения упругих и физических характеристик материала от температуры. Материалы внешних слоев оболочки считаются изотропными, материал заполнителя – ортотропным. Не накладывается ограничений на законы изменения модулей упругости и коэффициента линейного теплового расширения в зависимости от температуры, коэффициент Пуассона считается величиной постоянной.

Решение рассматриваемого класса задач основывается на использовании вариационного варианта интегрально-разностного метода [3]. Учитывая, что в данном случае $K_{11}^{o} = 0$, получаем $A_1 = 0$, где K_{11}^{o} – кривизна координатных линий $\alpha_i = const \in G_o$. Обозначая $A_2 = A$, $u_1^K = U^K$, $u_2^K = V^K$ (K = I, 2), $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = \theta$ и полагая контур оболочки свободным от внешнего загружения, запишем уравнения равновесия в форме метода Бубнова:

$$\int_{x_H}^{x_K}\int_{\theta_H}^{\theta_K} \{T_{11}^K A\delta u_{,1}^K + T_{12}^K \delta u_{,2}^K + [T_{22}^K A_{,1} + (\delta_K T_{13}/2h - X_1^K)A]\delta u^K\} d\theta dx = 0,$$

$$\int_{x_H}^{x_K}\int_{\theta_H}^{\theta_K} T_{12}^K A\delta v_{,1}^K + T_{22}^K \delta v_{1,2}^K + [-T_{12}^K A_{,1} + (\delta_K T_{23}/2h - X_2^K)A]\delta v^K\} d\theta dx = 0,$$

$$\int_{x_H}^{x_K}\int_{\theta_H}^{\theta_K} \sum_{K=1}^{2} [-M_{11}^K A\delta w_{,11} - M_{22}^K A^{-1}\delta w_{,22} - 2M_{12}^K \delta w_{,12} + (-M_{22}^K A_{,1} + A_c T_{13} + AL_1^K)\delta w_{,1}$$
$$+ A^{-1}(A^{-1}A_{,2}M_{22}^K + 2M_{12}^K A_{,1} + AcT_{23} + AL_2^K)\delta w_{,2} +$$
$$+ A(T_{11}K_{11} + 2T_{12}^K K_{12} + T_{22}^K K_{22} - X_3^K)\delta w] d\theta dx = 0, \qquad (15)$$

упрощенные на основе допущения $\omega_i^K \approx A_i^{-1} w_{,i}$.

В соответствии с методом [3] разобьем область Ω_0, являющуюся проекцией области $\Omega \in G$ на поверхность отсчета G_0, n прямыми направлении θ. Заменяя в (I5) производные по θ конечно-разностными выражениями, а интегралы в том же направлении – формулами численного интегрирования, после некоторых преобразований получим систему 5 х n обыкновенных дифференциальных уравнений равновесия расчетных линиях

$$-(T_{11}^{kr} A^r)_{,1} + N_1^{kr} = 0$$

$$-(T_{12}^{kr} A^r)_{,1} + N_2^{kr} = 0, \quad k = 1, 2$$

$$-[(M_{11}^1 + M_{11}^2)^r A^r]_{,11} - (Q_1^r)_{,1} + Q_2^r = 0, \quad r = \overline{1,n} \qquad (I6)$$

статические граничные условия на контурных линиях, соответствующих $x = x_H$, x_K:

$$T_{11}^{kr} = 0, \quad T_{12}^{kr} = 0, \quad (M_{11}^1 + M_{11}^2)^r = 0, \quad Q_1^r = 0,$$

где обозначено

$$N_1^{kr} = \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_r} d^1_{r-1,r} T_{12}^{k,r-1} + \frac{\alpha_{r+1}}{\alpha_r} d^1_{r+1,r} T_{12}^{k,r+1} + d^1_{r,r} T_{12}^{kr} + T_{22}^{kr} A^r_{,1} + \delta_k T_{13}^r A^r/2h - X_1^{kr} A^r,$$

$$N_2^{kr} = \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_r} d^1_{r-1,r} T_{22}^{k,r-1} + \frac{\alpha_{r+1}}{\alpha_r} d^1_{r+1,r} T_{22}^{k,r+1} + d^1_{r,r} T_{22}^{kr} - T_{12}^{kr} A^r_{,1} + \delta_k T_{23}^r A^r/2h - X_2^{kr} A^r,$$

$$Q_1^r = \sum_{k=1}^{2} \Big[-M_{22}^{kr} A^r_{,1} + A^r c T_{13}^r + A^r L_1^{kr} - 2 d^1_{r,r} M_{12}^{kr} - 2 \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_r} d^1_{r-1,r} M_{12}^{k,r-1} -$$
$$- 2 \frac{\alpha_{r+1}}{\alpha_r} d^1_{r+1,r} M_{12}^{k,r+1} \Big]_{,1}$$

$$Q_2^r = \sum_{k=1}^{2} \Big\{ A^r (K_{11}^r T_{11}^{kr} + 2 K_{12}^r T_{12}^{kr} + K_{22}^r T_{22}^{kr} - X_3^{kr}) +$$
$$+ d^1_{r,r} (A^r)^{-1} [(A^r)^{-1} A^r_{,2} M_{22}^{kr} + 2 A^r_{,1} M_{12}^{kr} + A^r c T_{23}^r + A^r L_2^{kr}] +$$
$$+ \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_r} d^1_{r-1,r} (A^{r-1})^{-1} [(A^{r-1})^{-1} A^{r-1}_{,2} M_{22}^{k,r-1} + 2 A^{r-1}_{,1} M_{12}^{k,r-1} + A^{r-1} c T_{23}^{r-1} + A^{r-1} L_2^{k,r-1}] +$$
$$+ \frac{\alpha_{r+1}}{\alpha_r} d^1_{r+1,r} (A^{r+1})^{-1} [(A^{r+1})^{-1} A^{r+1}_{,2} M_{22}^{k,r+1} + 2 A^{r+1}_{,1} M_{12}^{k,r+1} + A^{r+1} c T_{23}^{r+1} + A^{r+1} L_2^{k,r+1}] -$$
$$- (A^r)^{-1} d^2_{r,r} M_{22}^{kr} - \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_r} d^2_{r-1,r} (A^{r-1}) M_{22}^{k,r-1} - \frac{\alpha_{r+1}}{\alpha_r} d^2_{r+1,r} (A_2^{r+1})^{-1} M_{22}^{k,r+1} \Big\} \qquad (I7)$$

$d^1_{r,r}$, $d^2_{r,r}$ – весовые коэффициенты формул численного дифференцирования, α_r – коэффициенты численного интегрирования.

Для получения уравнений равновесия в перемещениях необходим подставить в полученную систему (I6) выражения усилий и моментов через перемещения:

$$T^k_{11} = B^k[u^k_{,1} + \nu A^{-1}(v^k_{,2} + A_{,1}u^k) + (k_{11} + \nu k_{22})w - (1+\nu)\varepsilon^k_T],$$

$$T^k_{22} = B^k[\nu u^k_{,1} + A^{-1}(v^k_{,2} + A_{,1}u^k) + (k_{22} + \nu k_{11})w - (1+\nu)\varepsilon^k_T],$$

$$T^k_{12} = B^k[1-\nu][v^k_{,1} + A^{-1}(u^k_{,2} - A_{,1}v^k) + 2k_{12}w]/2,$$

$$M^k_{11} = -D^k[w_{,11} + \nu A^{-1}(A^{-1}w_{,22} - A^{-2}A_{,2}w_{,2} + A_{,1}w_{,1}) + (1+\nu)æ^k_T],$$

$$M^k_{22} = -D^k[\nu w_{,11} + A^{-1}(A^{-1}w_{,22} - A^{-2}A_{,2}w_{,2} + A_{,1}w_{,1}) + (1+\nu)æ^k_T],$$

$$M^k_{12} = -D^k(1-\nu)[A^{-1}w_{,12} - A^{-2}A_{,1}w_{,2}], \qquad (I8)$$

$$T_{13} = 2hG_{13}[(u^1 - u^2)/2h + cw_{,1}], \quad T_{23} = 2hG_{23}[(v^1 - v^2)/2h + A^{-1}cw_{,2}].$$

Здесь B^k, D^k – жесткости при растяжении (сжатии) и изгибе; ε^k_T , $æ^k_T$ – интегральные характеристики действующего на оболочку температурного поля $T = T(x, \theta, \xi)$;

$$B_k = 2E^k h_k/(1-\nu^2), \qquad D_k = 2E^k h^3_k/[3(1-\nu^2)],$$

$$\varepsilon^k_T = \frac{1}{2h_k}\int_{-h_k}^{h_k}\alpha^k_T T\,d\xi, \qquad æ^k_T = \frac{3}{2h_k^3}\int_{-h_k}^{h_k}\alpha^k_T T\xi\,d\xi.$$

где E^k – модули упругости внешних слоев (k = I, 2), ν – приведенный коэффициент Пуассона [2], α^k_T – коэффициенты линейного расширения материалов слоев.

В дальнейшем будем рассматривать следующие граничные условия на контурных линиях:

1. $u^{k_r} = v^{k_r} = 0, \; w^r = w^r_{,1} = 0$ при $x = x_н$, $r = \overline{1,n}$ (I9)
2. $w^r = w^r_{,1} = 0, \; T^{k_r}_{11} = T^{k_r}_{12} = 0$ при $x = x_к$, $r = \overline{1,n}$ (20)
3. $u^{k_r} = v^{k_r} = 0, \; w^r = w^r_{,2} = 0$ при $\theta = \theta_н, \theta_к$, $r = 1,n$. (2I)

Для отыскания решения сформулированной краевой задачи в ...рме (I6)-(2I) используем метод конечных сумм с применением ин...грирующих матриц [4]. Для этого проинтегрируем уравнения систе...в пределах от x до x_K (первые четыре уравнения - один раз, ...тое - два раза). Тогда с учетом статических граничных условий (20) будем иметь

$$T_{11}^{K_r} A^r + \int_x^{x_K} N_1^{K_r} dx = 0$$

$$T_{12}^{K_r} A^r + \int_x^{x_K} N_2^{K_r} dx = 0 \qquad K = I,\ 2 \qquad (22)$$

$$(x_K - x) + C_2^r - (M_{11}^1 + M_{11}^2)^r A^r + \int_x^{x_K} Q_1^r dx + \int_x^{x_K}\int_x^{x_K} Q_2^r dx^2 = 0, \quad r = \overline{2, n-1}, \qquad (23)$$

...е предполагается, что все усилия и моменты выражены через пере...щения. Здесь C_1^r, C_2^r ($r = \overline{2,\ n - I}$) - постоянные интег...рования. Принимая во внимание граничные условия (I9), запишем ...тегральные соотношения

$$u_r^K = \int_{x_H}^{x} (u_r^K)_{,1}\, dx, \quad v_r^K = \int_{x_H}^{x} (v_r^K)_{,1}\, dx, \quad w_r = \int_{x_H}^{x}\int_{x_H}^{x} w_{,11}^r\, dx^2,$$

$$w_{,1}^r = \int_{x_H}^{x} w_{,11}^r\, dx \qquad K = I,\ 2, \qquad r = \overline{2,\ n - I}, \qquad (24)$$

...помощью которых полученную систему разностных уравнений (22), (23), принимая во внимание граничные условия (2I), можно привести ...системе интегрально-алгебраических уравнений относительно $(u_r^K)_{,1}$, $(v_r^K)_{,1}$, $(w_r)_{,11}$, C_1^r, C_2^r ($K = I,\ 2,\ r = \overline{2,\ n - I}$). Для замыкания ...той системы к ней необходимо добавить интегральные равенства

$$\int_{x_H}^{x_K} w_{,11}^r\, dx = 0, \quad \int_{x_H}^{x_K}\int_{x_H}^{x_K} w_{,11}^r\, dx^2 = 0, \qquad (25)$$

...дующие из (24) в силу геометрических граничных условий из (20). Заменяя в полученных уравнениях интегральные операторы

$$\mathcal{J}_1(\ldots) = \int_{x_H}^{x} (\ldots)\, dx, \quad \mathcal{J}_2(\ldots) = \int_{x}^{x_K} (\ldots)\, dx, \quad \mathcal{J}_3(\ldots) = \int_{x_H}^{x_K} (\ldots)\, dx$$

...нечно-суммарными с помощью формул [4], приходим к системе ...гебраических уравнений порядка $(5 \times m + 2) \times (n - 2)$ квазипяти...агональной структуры, решение которой отыскивается методом ...тричной прогонки [5].

Литература

I. Паймушин В.Н. Соотношения теории тонких оболочек типа Тимошенко в криволинейных координатах поверхности отсчета, ПМ 1978, 42, № 4.

2. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Устойчивость и колебания тр слойных оболочек. М., "Машиностроение", 1973.

3. Вахитов М.Б., Сафариев М.С. К применению метода прямы для расчета пластин. Труды КАИ, вып. 143, Казань, 1972.

4. Вахитов М.Б. Интегрирующие матрицы - аппарат численно решения дифференциальных уравнений строительной механики. ИВУ "Авиационная техника", № 3, 1966.

5. Снигирев В.Ф., Паймушин В.Н., Галимов Н.К. О возможно использования приближенных уравнений при расчете консольных т слойных пластин. Труды семинара по теории оболочек. Казанский физико-технический институт АН СССР, Казань, вып. 4, 1974.