

УДК 539.3:629.7.028

В.И.Леонов, Е.Г.Спивак

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОУПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ
В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЕЧАЙКЕ С ВЫРЕЗОМ

Элементы в виде цилиндрических оболочек со свободными, а также закрытыми крышкой вырезами находят широкое распространение в конструкциях летательных аппаратов. Часто эти конструкции работают в условиях действия неравномерных температурных полей.

Задача о концентрации температурных напряжений в цилиндрической оболочке, ослабленной отверстием, с учетом конвективного теплообмена с поверхностями слабо исследована. В работе [1] намечены пути решения такого рода задач. Некоторые вопросы расчета температурных напряжений в оболочках с круглыми отверстиями, находящимися в нестационарном температурном поле, рассмотрены в работах [2, 3]. Исследованию концентрации напряжений при действии стационарного температурного поля посвящена работа [4].

В настоящей работе рассматривается концентрация температурных напряжений вблизи теплоизолированного свободного и закрытого жесткой крышкой отверстия в цилиндрической оболочке с учетом конвективного стационарного теплообмена между ее поверхностями и окружающей средой.

Если пренебречь обратным термоупругим эффектом, то поставленная задача может быть решена в два этапа. Первоначально необходимо рассмотреть вопрос об определении температурного поля в оболочке при заданных условиях теплообмена на ее поверхности. В дальнейшем решается задача термоупругого равновесия оболочки и определяются компоненты напряженного и деформированного состояния, обусловленные найденным распределением температур.

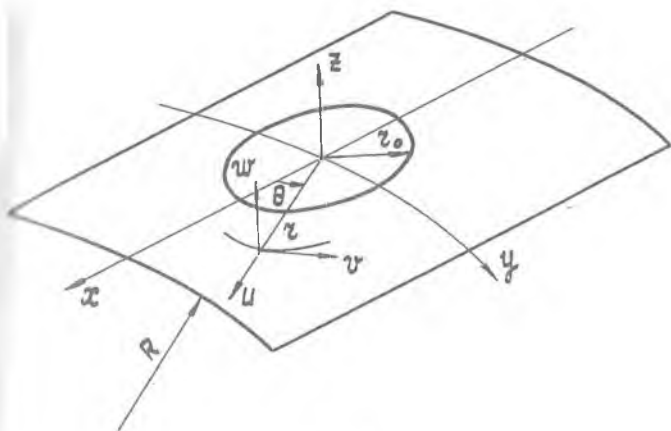


Рис. I

Рассмотрим бесконечную цилиндрическую оболочку радиуса R и толщины h с круглым отверстием, радиус которого будем обозначать через r_0 (см. рис. I). Так как контур отверстия принят теплоизолированным, то температурное поле оболочки с учетом кривизны срединной поверхности определяется уравнением [3]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (I)$$

и следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial z} + h_t^{(1)} (T - t_1) &= 0 & \text{при } z = \frac{h}{2} \\ \frac{\partial T}{\partial z} - h_t^{(2)} (T - t_2) &= 0 & \text{при } z = -\frac{h}{2}, \end{aligned}$$

где t_1 и t_2 - температура окружающей среды снаружи и внутри оболочки; $h_t^{(1)}$ и $h_t^{(2)}$ - относительные коэффициенты теплоотдачи с поверхностей $z = \pm \frac{h}{2}$.

Дифференциальное уравнение теплопроводности (I) легко интегрируется, и температура внутри оболочки может быть записана в виде

$$T = A - B e^{-\frac{z}{R}}, \quad (2)$$

где A и B - постоянные, зависящие от геометрических и физических параметров рассматриваемой задачи.

В теории оболочек большое значение имеют так называемые интегральные температурные характеристики

$$T_1 = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T dz, \quad T_2 = \frac{12}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T z dz, \quad (3)$$

которые при известном распределении температуры по сечению оболочки (2) могут быть вычислены.

В силу линейности рассматриваемых задач напряженно-деформируемое состояние оболочки с отверстием при действии температурного поля, согласно [1, 5], представляется в виде суммы двух слагаемых: основного и возмущенного. Основное состояние, оно обозначается индексом "t", - это напряженное состояние оболочки без отверстия с заданными условиями теплообмена на ее поверхностях. В качестве возмущенного, обозначаемого индексом "0", принимается напряженное состояние, вызванное наличием отверстия в оболочке.

При наличии температурного поля с интегральными характеристиками T_1 и T_2 в сечениях оболочки возникают внутренние изгибающие моменты

$$M_p^t = -\frac{Eh^2\alpha T_2}{6(1-\mu)}, \quad M_\theta^t = -\frac{Eh^2\alpha T_2}{6(1-\mu)}, \quad (4)$$

а перемещения точек срединной поверхности оболочки будут равны

$$\begin{aligned} u^t &= \frac{r_0 \alpha T_1}{2} \rho (1 + \cos 2\theta), \\ v^t &= -\frac{r_0 \alpha T_1}{2} \rho \sin 2\theta, \\ W^t &= R \alpha T_1, \end{aligned} \quad (5)$$

вызванные температурным расширением материала.

Здесь α , E , μ - коэффициент линейного температурного расширения, модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки.

Остальные компоненты напряженно-деформированного состояния равны нулю.

В силу того, что возмущение, вносимое отверстием в напряженное состояние, носит локальный характер [5], для описания

деформированного состояния используется теория пологих оболочек [6]. Дифференциальное уравнение изгиба цилиндрической оболочки относительно комплексной функции $F = W + i\Phi$ имеет вид

$$\nabla^2 \nabla^2 F^0 + 8i\omega^2 \frac{\partial^2 F^0}{\partial \xi^2} = 0, \quad (6)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad \xi = \frac{x}{z_0}, \quad \eta = \frac{y}{z_0}, \quad \omega^2 = \frac{1}{4} \sqrt{3(1-\mu^2)} \frac{z_0^3}{Rh}.$$

Решение однородного уравнения (6) в полярной системе координат ρ и θ , в которой координатная линия $\rho = 1$ совпадает с контуром отверстия, для напряженного состояния симметричного относительно образующей и направляющей оболочки запишем, согласно работе [7] в виде

$$F^0(\rho, \theta) = \sum_{\nu=0,2}^{\infty} \sum_{n=0,1}^{\infty} \ell_{\nu} (-1)^{\frac{\nu}{2}} C_n H_n^{(1)}(z) [J_{n-\nu}(z) + J_{n+\nu}(z)] \cos \nu \theta, \quad (7)$$

где $\ell_{\nu} = 0,5$ при $\nu = 0$ и $\ell_{\nu} = 1$ при $\nu \neq 0$; $z = \omega \rho \sqrt{2i}$;

$C_n = A_n + iB_n$ - комплексные постоянные, подлежащие определению из граничных условий; $J_n(z)$, $H_n^{(1)}(z)$ - функции Бесселя первого рода и первая функция Ганкеля.

Через прогиб W и функцию напряжений Φ по известным формулам теории оболочек [6] находятся внутренние усилия, действующие в сечениях оболочки, и перемещения точек срединной поверхности. Они записываются, согласно [7], в виде тригонометрических рядов по окружной координате θ .

Для теплоизолированного и свободного от напряжений контура отверстия граничные условия запишутся в следующем виде:

$$M_{\rho}^0 + M_{\rho}^t = 0, \quad N_{\rho}^0 + N_{\rho}^t = 0, \quad Q_{\rho}^{*0} + Q_{\rho}^{*t} = 0, \quad N_{\rho\theta}^0 + N_{\rho\theta}^t = 0. \quad (8)$$

Здесь N_{ρ} , $N_{\rho\theta}$ - нормальные и касательные усилия; Q_{ρ}^* - обобщенная перерезывающая сила в смысле Кирхгофа.

Учитывая выражения для компонент внутренних усилий основного напряженного состояния (4), эти условия перепишем следующим образом:

$$M_{\rho}^0 = \frac{Eh^2 \alpha T_2}{6(1-\mu)}, \quad N_{\rho}^0 = 0, \quad Q_{\rho}^{*0} = 0, \quad N_{\rho\theta}^0 = 0. \quad (9)$$

Подставляя сюда выражения для усилий в виде тригонометрических рядов и приравнивая коэффициенты при одинаковых тригоно-

метрических функциях, а также исключая линейно-зависимые уравнения [7], получим замкнутую систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных интегрирования.

На рис. 2 показано распределение изгибающих и мембранных тангенциальных напряжений σ_θ^u и σ_θ^c вдоль образующей оболочки для различных значений параметра ω , характеризующего геометрию оболочки и отверстия. Через $\sigma_\theta^c = -\frac{E\alpha T_2}{1-\mu}$ на рис. 2 обозначены изгибные напряжения, возникающие в оболочке без отверстия. Наибольших значений напряжения достигают на контуре отверстия и по мере удаления от него стабилизируются.

Изменение мембранных тангенциальных напряжений вдоль контура отверстия для различных значений параметра ω представлено на рис. 3. Максимальное значение σ_θ^c имеет место при $\theta = 0$ для значений $\omega < 2$, свыше которого угол максимальных напряжений начинает перемещаться к 90° .

Изменение максимальных напряжений в зависимости от значения параметра ω показано на рис. 4. Отметим, что полученные результаты хорошо согласуются с данными, приведенными для аналогичной задачи в работе [4], где граничные условия удовлетворялись методом коллокаций.

Для оболочки с отверстием, закрытым жесткой теплоизолированной крышкой, граничные условия на контуре отверстия $\beta = 1$ будут иметь вид

$$\begin{aligned} w^o + w^t &= c, & u^o + u^t &= \frac{\alpha}{2} c (1 - \cos 2\theta) \\ \frac{\partial w^o}{\partial z} + \frac{\partial w^t}{\partial z} &= 0, & v^o + v^t &= -\frac{\alpha}{2} c \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (10)$$

где c - перемещение крышки как жесткого целого.

С учетом соотношений (5) для отыскания значений произвольных постоянных интегрирования, а также величины c получим

$$\begin{aligned} w^o + R\alpha T_1 &= c & u^o + \frac{R_0\alpha T_1}{2} (1 + \cos 2\theta) &= -\frac{\alpha}{2} c (1 - \cos 2\theta) \\ \frac{\partial w^o}{\partial z} &= 0 & v^o - \frac{R_0\alpha T_1}{2} \sin 2\theta &= -\frac{\alpha}{2} c \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (11)$$

На рис. 5 и 6 показано распределение радиальных изгибающих и мембранных напряжений вдоль контура сопряжения оболочки с крышкой для различных значений параметра ω . Напряжения отнесены к $\sigma_1 = \alpha E T_1$. По мере увеличения ω и изгибные и мембранные напряжения существенно возрастают. Между радиальными и окружными

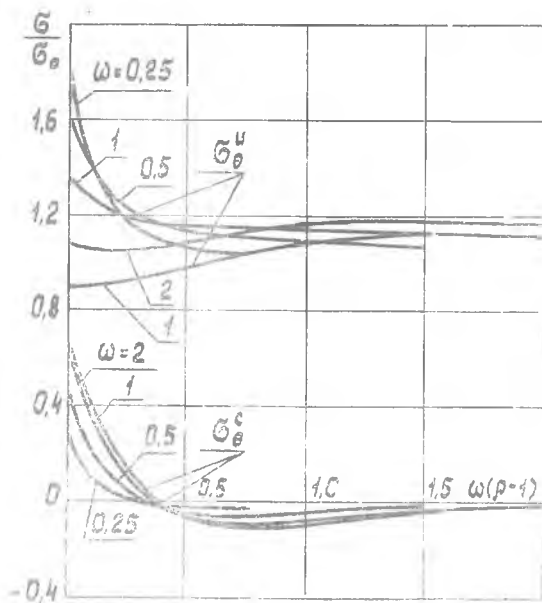


Рис. 2

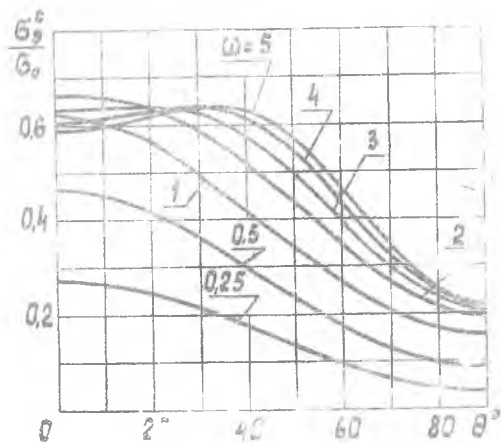


Рис. 3

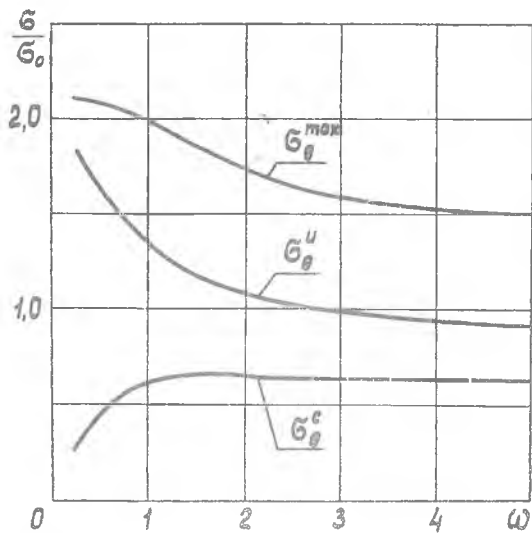


Рис. 4

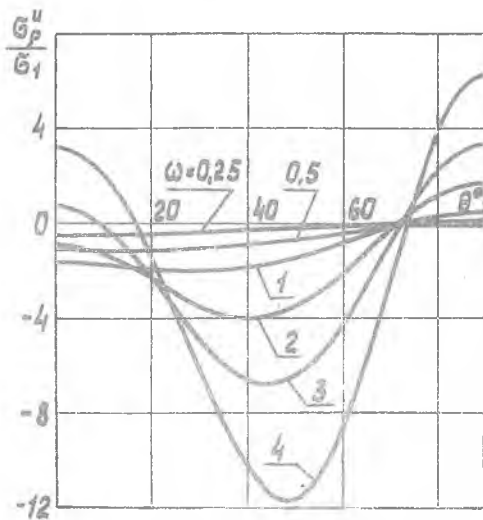


Рис. 5

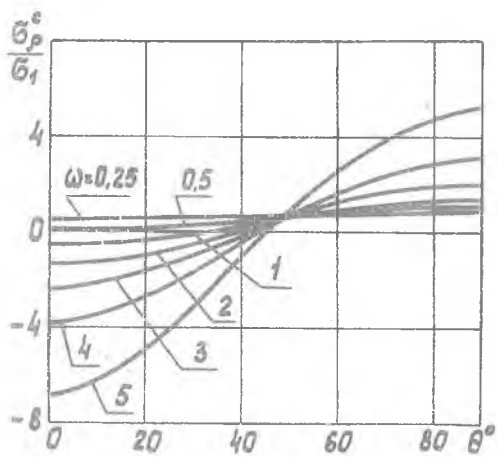


Рис. 6

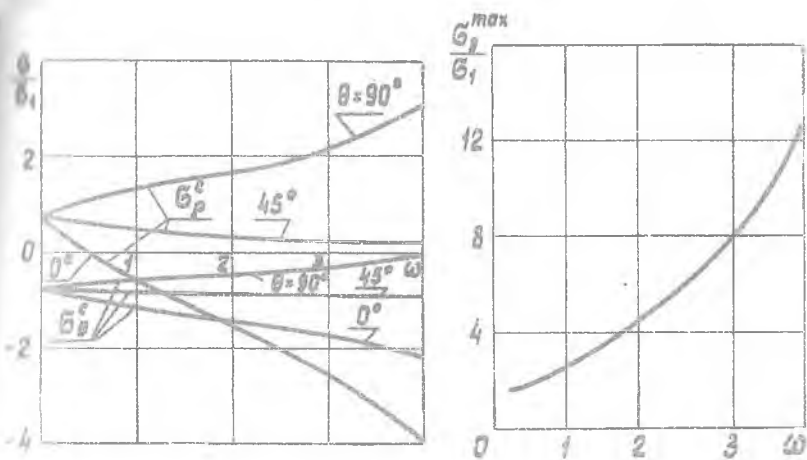


Рис. 7

Рис. 8

напряжениями, в силу отсутствия окружной деформации, по линии сопряжения оболочки с жесткой крышкой должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}^u - \mu \sigma_r^u &= 0 \\ \alpha E T_1 + (\sigma_{\theta}^c - \mu \sigma_r^c) &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

которые явным образом в граничных условиях (II) не фигурируют. Выполнение которых может служить в качестве контроля правильности полученных результатов. Следует заметить, что в работе [4] граничные условия для оболочки с жесткой крышкой записаны некорректно, что приводит к существенному различию результатов настоящей работы и данных, приведенных в [4].

Изменение мембранных напряжений, возникающих на контуре отверстия, закрытого крышкой, по мере роста значения параметра ω представлено на рис. 7. В предельном случае, когда $\omega = 0$, наблюдается стремление значений напряжения к $\sigma_r^c = \frac{1}{1+\mu} \alpha E T_1$ и $\sigma_{\theta}^c = -\frac{1}{1+\mu} \alpha E T_1$, т.е. напряжениям в плоской пластине. На рис. 8 показана зависимость наибольших эквивалентных напряжений, вычисляемых по теории прочности энергии формоизменения, от параметра ω . С ростом значения параметра ω напряжения быстро растут.

Л и т е р а т у р а

1. Цилиндрические оболочки, ослабленные отверстиями. Под ред. А.Н.Гузя "Наукова думка", К., 1974.
2. Швец Р.Н., Павленко В.Д., Матковский А.П. Квазистатическая задача термоупругости для тонких оболочек с круговым отверстием. Доклады АН УССР. Серия А, № 4, 1976.
3. Швец Р.Н., Павленко В.Д., Федик И.И., Матковский А.П. Температурные напряжения в цилиндрической оболочке с круговым отверстием. Математические методы и физико-механические поля. Республ. межвед. сборник, № 3, 1976.
4. Bond D.H., Pao K.P. *Thermal stresses in a cylindrical shell containing a circular hole or a rigid inclusion Nuclear Engineering and Design*. vol. 40, №2, 1977.
5. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. "Наукова думка". Киев, 1968.
6. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. Гостехиздат, 1949.
7. Хазанов Х.С. К расчету цилиндрических оболочек с круглыми отверстиями. Труды КуАИ, вып. 29, 1967.