

Л и т е р а т у р а

1. Ахмедьянов И.С. О расчете сферической оболочки при симметричном нагружении. - Изв. вузов. Авиационная техника, 1980, № 4, с. 7-12.

2. Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. СМБ. - М.: Наука, 1965. - 384 с.

УДК 539.3

Б.А.Горлач, Е.А.Ефимов

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРА В ПРОЦЕССЕ ЕГО ОСАДКИ

Для построения математической модели процесса формообразования деталей в качестве базового рассматривается вариационное уравнение Гамильтона-Остроградского, которое для конечного равновесного состояния тела записано в виде /1/:

$$\int_{V_{\tau}} [T : \nabla \delta U + \mathcal{R}(\dot{V} - K) \cdot \delta U] dV_{\tau} = \int_{\mathcal{Q}_{\tau}} T_N \cdot \delta U d\mathcal{Q}_{\tau}. \quad (1)$$

Здесь T - тензор напряжения Коши; T_N - вектор напряжения на поверхности \mathcal{Q} тела с единичной нормалью N ; \dot{V} , K - векторы ускорения и массовой силы; δU - вариация вектора перемещения U ; ∇ - векторный оператор Гамильтона; $V_{\tau} = \mathcal{Q}_{\tau}$ - объем и поверхность тела в четырехмерном пространстве (включая время τ); \mathcal{R} - плотность тела. Точками, стоящими между буквами, обозначено скалярное произведение тензорных функций; над буквами - скорость. Прописные буквы относятся к функциям, описывающим конечное состояние тела.

Для решения задач вариационное уравнение (1) преобразуется к метрике некоторого, в общем случае неравновесного, промежуточного состояния. Преобразование производится в предположении, что функции, характеризующие конечное состояние, выражаются через сумму соответствующих функций промежуточного состояния (ниже эти функции записываются строчными буквами, соответствующими вышеприведенным обозначениям) и их приращений, сопровождаемых знаком Δ . Кроме того, при преобразовании используется условие сохранения массы

тела и известное соотношение между элементарными поверхностями двух конфигураций деформируемого тела /2/.

В результате преобразований вариационное уравнение (I) приводится к виду

$$\int_{v_{\tau}} [\mathbf{t} : \nabla \delta \mathbf{u} + \rho (\dot{\mathbf{v}} - \kappa) \cdot \delta \mathbf{u}] d v_{\tau} - \int_{\omega_{\tau}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d \omega_{\tau} =$$

$$= - \int_{v_{\tau}} [\mathbf{G} : \nabla \delta \mathbf{u} + \rho \Delta (\dot{\mathbf{v}} - \kappa) \cdot \delta \mathbf{u}] d v_{\tau} + \int_{\omega_{\tau}} d \mathbf{u} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{v} d \omega_{\tau},$$

где

$$\mathbf{G} = \Delta \mathbf{t} + (\mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}) \cdot \boldsymbol{\zeta}$$

$$\boldsymbol{\zeta} = (I_{\nabla \mathbf{u}} + \bar{I}_{\nabla \mathbf{u}}) \mathbf{I} - (1 + I_{\nabla \mathbf{u}}) \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^2,$$

$I_{\nabla \mathbf{u}}$, $\bar{I}_{\nabla \mathbf{u}}$ - первый и второй инварианты градиента вектора перемещения $\nabla \mathbf{u}$; \mathbf{I} - единичный тензор.

В качестве меры деформации выбран логарифмический тензор Генки /2/:

$$\mathbf{h} = \frac{1}{2} \ln (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla + \mathbf{u} \nabla \cdot \nabla \mathbf{u}),$$

который представляется в виде суммы упругой \mathbf{h}_e и пластической \mathbf{h}_p составляющих:

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_e + \mathbf{h}_p.$$

Это представление в силу доказанного равенства

$$\mathbf{d} = \mathbf{h}' = \mathbf{h}' + \mathbf{h} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{h}$$

соответствует записи тензора деформации скорости в виде

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_e + \mathbf{d}_p,$$

(\mathbf{d} - тензор деформации скорости; \mathbf{w} - спин, ему соответствующий; \mathbf{h}' - производная от \mathbf{h} по Яуманку-Нолду).

Для энергетической пары $\mathbf{t} - \mathbf{h}$ ($\mathbf{t} - \mathbf{d}$) записаны соотношения, соответствующие ассоциированному закону пластического течения /3/:

$$I_{\mathbf{h}} = \frac{1}{3K} \frac{\rho}{\mathcal{R}} I_{\mathbf{t}}; \quad I_{\mathbf{h}_p} = 0$$

$$\mathbf{h}'_e = \frac{1}{2\mu} \frac{\rho}{\mathcal{R}} \mathbf{t}'; \quad \mathbf{d}_p = \sigma N \mathbf{a}.$$

Здесь

$$N = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{I}} \mathbf{I}_d + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}'_e} : \mathbf{d}' \right) \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}'_e} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}'_p} \right) : \mathbf{a} \right]^{-1}$$

$$f = \frac{1}{2} \mathbf{a} : \mathbf{a} - \varkappa \leq 0; \quad \mathbf{a} = \frac{J^p}{\mathcal{R}} \mathbf{t}' - g \mathbf{h}_p$$

$$\sigma = \begin{cases} \mathbf{I} & \text{для пластической деформации;} \\ 0 & \text{для упругой деформации;} \end{cases}$$

K, μ - упругие постоянные; $\varkappa = \varkappa(\mathbf{h}_p)$ - предел текучести; $g = g(\mathbf{h}_p)$ - экспериментально определяемый коэффициент, характеризующий величину остаточных микронапряжений; f - поверхность нагружения; \mathbf{a} - тензор активных напряжений; штрихом отмечены девиаторные составляющие тензоров.

Подстановка геометрических (3) и определяющих (4) соотношений в вариационное уравнение (2) позволит преобразовать его к уравнению с одним неизвестным - вектором перемещения \mathbf{u} . Оно может быть приведено к виду

$$\int_{V_\tau} [\mathbf{t} : \nabla \delta \mathbf{u} + \rho (\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{k}) \cdot \delta \mathbf{u}] dV_\tau - \int_{\omega_\tau} \mathbf{t}_p \cdot \delta \mathbf{u} d\omega_\tau = \\ = \int_{V_\tau} \nabla \mathbf{u} : {}^{(4)}\mathbf{m} : \nabla \delta \mathbf{u} dV_\tau + \int_{\omega_\tau} (\nabla \mathbf{u} : {}^{(4)}\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{u} d\omega_\tau, \quad (5)$$

где

$${}^{(4)}\mathbf{m} = (K - \frac{2}{3}\mu) {}^{(4)}\mathbf{c}_1 + 2\mu {}^{(4)}\mathbf{c}_3 + ({}^{(4)}\mathbf{c}_2 - {}^{(4)}\mathbf{c}_3) \cdot \mathbf{t}' + ({}^{(4)}\mathbf{c}_1 - {}^{(4)}\mathbf{c}_3) \cdot \mathbf{t} - \\ - 2\mu \left\{ [2\mu + g + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{h}'_p} : \mathbf{h}_p] \mathbf{a} + \frac{\partial \varkappa}{\partial \mathbf{h}'_p} : \frac{\mathbf{a}}{2\mu} \right\}^{-1} ({}^{(4)}\mathbf{c}_3 - \frac{1}{3} {}^{(4)}\mathbf{c}_1) : \mathbf{a} \mathbf{a}$$

${}^{(4)}\mathbf{c}_i$ ($i = 1, 2, 3$) - изотропные тензоры 4 ранга /2/, зависящие лишь от базисных векторов системы координат.

Уравнение (5) записано в виде, удобном для решения его итерационным методом. Если конфигурация деформируемого тела соответствует его равновесному состоянию, то правая часть уравнения (5) обращается в нуль и решение задачи является искомым. В противном случае „невязка“ решения дает возможность определить приращение перемещений на очередной итерации, а также скорректировать перемещения, конфигурацию тела и другие функции. Для сходящегося процесса „невязка“ решения (правая часть уравнения) стремится к нулю.

Решение осуществляется шаговым методом по нагрузке. Приращение нагрузки выбирается настолько малым, чтобы сходился итерационный процесс и с достаточной точностью, требуемой теорией течения, прослеживался путь нагружения.

Дополнительная трудность решения задач деформирования в пространстве, ограниченном жесткой матрицей, заключается в разработке алгоритма выхода тела на поверхность матрицы и дальнейшего скольжения по этой поверхности с трением. Момент пересечения граничных точек тела с поверхностью матрицы, задаваемой уравнением

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (6)$$

в пространстве x_k ($k = 1, 2, 3$), определяется на каждом n -ном шаге нагружения из совместного решения уравнения для вектора \mathbf{z} положения узловой точки границы тела

$$\mathbf{z}(n) = \mathbf{z}(n-1) + \mathbf{u}(n) \quad (7)$$

и уравнения (6).

Если точка границы тела пересекает матрицу или скользит по ее поверхности, то на перемещения узла накладываются дополнительные граничные условия по перемещениям. После выхода точки тела на поверхность матрицы могут иметь место две ситуации:

$$t^\alpha < \tau \quad \text{и} \quad t^\alpha \geq \tau, \quad (8)$$

где t^α - вектор касательного напряжения на границе тела; τ - предельное значение касательного напряжения, сопротивляющегося проскальзыванию. Это напряжение может быть определено, например, из закона Амонтона-Кулона по силе нормального давления или из других соображений /4/.

В первом случае (8), соответствующем „прилипанию” граничных точек тела к поверхности матрицы, перемещения точек границы тела считаются равными нулю; во втором случае -- из действующих на границе тела касательных сил вычитаются силы трения, определяемые величиной τ .

Запись уравнения (5) в символах прямого тензорного исчисления облегчает задачу сведения его к матричному виду, соответствующему методу конечных элементов. Для ее осуществления выбран изопараметрический конечный элемент, для которого основные переменные, описывающие конфигурацию тела; поля перемещений и температур, аппрокси-

мируются одними и теми же функциями формы. Для формализации перехода от тензорного уравнения (5) к его записи в координатно-матричной форме суммирование по всем узлам конечноэлементной модели деформируемого тела производится по повторяющимся индексам, стоящим в скобках, а по координатам - по индексам, не заключенным в скобки.

Использование описанного правила дает возможность представить слагаемые уравнения (5) в виде суммы, например:

$$\int_{V_{\tau}} \nabla u: {}^{(4)}m: \nabla \delta u dV_{\tau} = \sum_{(j)} \delta W_{(j)}^q \sum_{(i)} W_{(i)}^p \int_{V_{\tau}} (\tilde{\nabla}_k \Phi^{(i)})_{pk}^n m_{ne}^{ks} (\tilde{\nabla}_s \Phi^{(j)})_{qs}^e dV_{\tau}.$$

Здесь $W_{(j)}^q$ - узловое перемещение j -того узла в направлении x^q ; $\Phi^{(i)}$ - аппроксимирующая функция для i -того узла; m_{ne}^{ks} - физические компоненты тензора ${}^{(4)}m$ в рассматриваемой системе координат; $\tilde{\nabla}_k$ - оператор, связанный с ковариантной производной от тензора. Другие слагаемые выражения (5) представляются аналогичным образом. Приравнение к нулю множителей, стоящих при независимых вариациях $\delta W_{(j)}^q$, позволяет свести вариационное уравнение (5) к системе матричных уравнений, соответствующих МКЭ.

На основании описанного алгоритма решения составлена программа для ЭВМ на алгоритмическом языке ПД/1 для деформирования осесимметричных тел. Ниже приведены некоторые из примеров полученных на ЭВМ решений задач, иллюстрирующих возможности составленной программы.

При решении задачи осаживания сплошного кругового цилиндра рассматривалась лишь его четвертая часть. При этом предполагалось, что верхнее основание цилиндра нагружается перемещением через жесткое кольцо (рис.1). Проскальзывание между кольцом и цилиндром не допускалось. Считалось, что среднее сечение цилиндра опирается на основание через подвижные катки, стоящие в узловых точках конечных элементов.

На рисунке показаны первоначальное положение цилиндра, сетка конечных элементов с обозначенными номерами узлов по вертикали. Цифрами со штрихом отмечены и пунктирными линиями показаны сетки конечных элементов в состоянии, соответствующем перемещению жесткой плиты на расстояние $V = 0,1$ Н.

На этом же рисунке штрихованными линиями показаны зоны, охваченные пластическими деформациями: сплошная линия соответствует границе пластической зоны при $V = 10^{-2}$ Н, пунктирная - нагружению цилиндра перемещениями, равными $0,1$ Н.

Размеры исходной заготовки $H = 40$ мм, $R = 40$ мм, диаграмма деформирования материала имела участок линейного упрочнения с $E' = 0,1E$, $E = 7,2 \cdot 10^4$ МПа, $t_T = 400$ МПа.

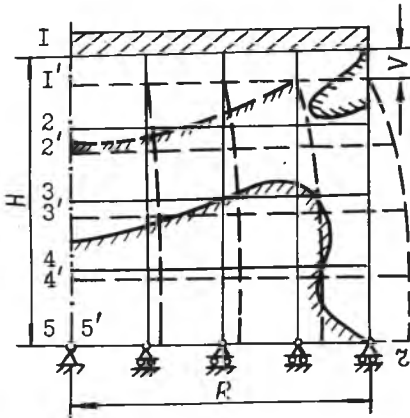


Рис. 1

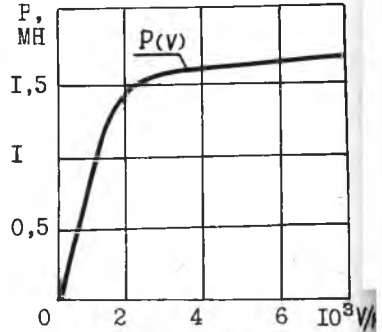


Рис. 2

Полученная в результате решения задачи зависимость усилия от перемещения (рис.2) сглаживает диаграмму деформирования.

Для исследования вопроса о влиянии высоты образца на величину и распределение контактного давления, возникающего между жесткой плитой и торцовой поверхностью цилиндра, рассмотрено 5 образцов цилиндров, имеющих разные высоты H и одинаковые радиусы R (см. таблицу).

№ вар.	1	2	3	4	5
H	5	10	20	50	100
R/H	10	5	2,5	1	0,5

Диаграмма деформирования образцов, выполненных из материала АМцМ, аппроксимировалась зависимостью $t = 25 \varepsilon^{0,27}$ ($E = 7,2 \cdot 10^4$ МПа). Коэффициент трения между поверхностями плиты и цилиндра принимался равным 0,1.

На рис.3 для образца № 2 изображены графики изменения сил P в узлах поверхностных конечных элементов и соответствующего им

давления $p = P/2\pi r$ (r - радиус узлов конечных элементов в деформированном состоянии, к которым прикладывается сила P) для различных относительных деформаций $\Delta H/H$: а - 0,02; б - 0,12; в - 0,2.

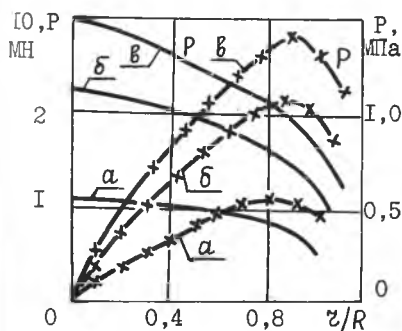


Рис. 3

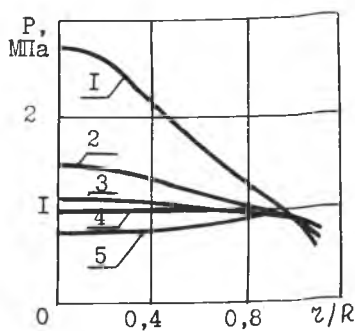


Рис. 4

На рис.4 показано изменение по радиусу цилиндра давления между плитой и заготовкой в зависимости от размеров последней (см. таблицу). Как видно из графиков, характер изменения давления существенно зависит от относительных размеров образцов, что подтверждается экспериментом /5/.

Л и т е р а т у р а

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. - М.: Наука, 1976. - 536 с.
2. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. - М.: Наука, 1980. - 512 с.
3. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. - М.: Машиностроение, 1975. - 400 с.
4. Леванов А.Н. и др. Контактное трение в процессах обработки металлов давлением. - М.: Металлургия, 1976. - 416 с.
5. Громов Н.П. Теория обработки металлов давлением. - М.: Металлургия, 1978. - 360 с.