

УДК 539.3:629.7.028

В.Б.Карякин, Х.С.Хазанов.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ
МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С КРУГЛЫМ ВЫРЕЗОМ

В работе [1] обсуждается задача о расчете оболочки с круглым вырезом, подкрепленным широким кольцом постоянного сечения, представляемым как элемент цилиндрической оболочки. Приведена методика расчета и некоторые числовые результаты. Анализ результатов расчета показывает, что в случае, например, растяжения оболочки наибольшие напряжения в подкрепляющем кольце возникают в поперечном сечении, проходящем через центр выреза. Выравнивания напряжений по контуру выреза можно достигнуть, подкрепляя вырез кольцом переменного сечения, увеличивая долю подкрепляющего материала, приходящегося на область повышенных напряжений.

Рассмотрим задачу растяжения цилиндрической оболочки с круглым вырезом, подкрепленным широким кольцом переменной жесткости. Подкрепляющее кольцо представим как элемент цилиндрической оболочки постоянной толщины h_1 . Переменность сечения реализуется за счет изменения ширины кольца, как показано на рис. 1. Через r_0 обозначен радиус выреза, $2r_1$ - наибольший размер подкрепляющего кольца, R, h - радиус средней поверхности и толщина оболочки, $\rho = \frac{r}{r_1}$, θ - безразмерные координаты.

При переменной ширине подкрепления аналитическое решение задачи приводит к большим математическим затруднениям. Поэтому более целесообразным может оказаться использование численных методов. В настоящей работе используется метод конечных элементов.

Выделим часть оболочки, ограниченную контуром выреза и окружностью радиуса r_1 , и будем ее в дальнейшем условно называть зоной подкрепления. В этой зоне оболочку можно представить

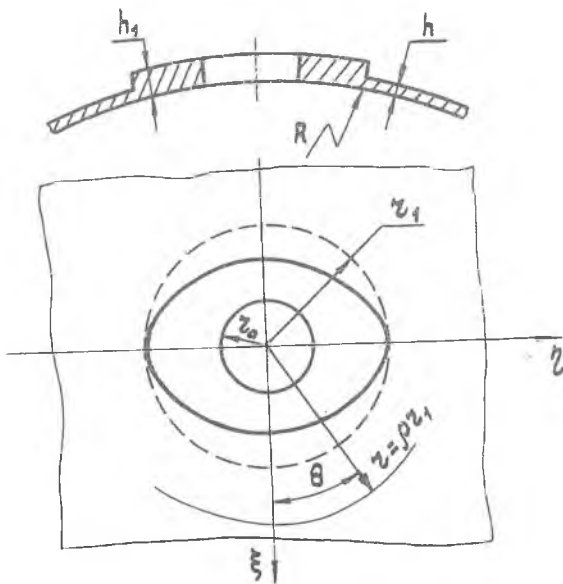


Рис. 1

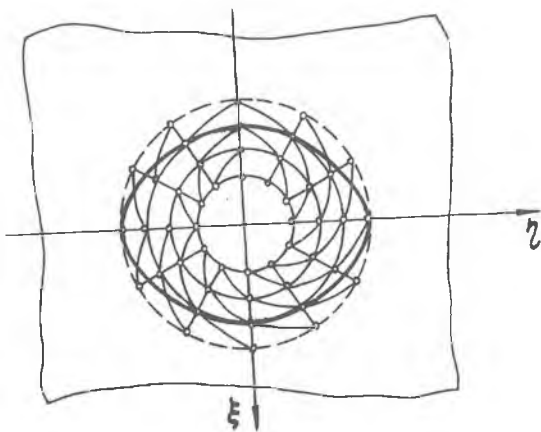


Рис. 2

набором криволинейных треугольных конечных элементов толщиной h и h_1 (рис. 2), позволяющих достаточно хорошо аппроксимировать контур выреза и внешний контур подкрепления.

Оболочку с круглым вырезом радиуса r_1 представим одним конечным элементом, узлы которого совпадают с узлами треугольных элементов по внешнему контуру зоны подкрепления. При построении матрицы жесткости этого элемента будем использовать аналитическое решение задачи для оболочки с круглым вырезом. Подобный подход был впервые предложен в работе [2] для построения матрицы жесткости консольной цилиндрической оболочки, подкрепленной свободному торцу шпангоутом переменного сечения.

Напряженное состояние тонкой цилиндрической пологой оболочки описывается дифференциальным уравнением относительно комплексной функции $F = w + i\varphi$ (w - нормальное к срединной поверхности перемещение, φ - функция напряжений) [3], которое в безразмерных декартовых координатах, отнесенных к радиусу r_1 , имеет вид

$$\nabla^2 \nabla^2 F + 8i\omega^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = 0,$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$, $\omega = 0,5 \sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \alpha \sqrt{\lambda}$,

$$\alpha = \frac{r_1}{R}, \quad \lambda = \frac{R}{h} \text{ - безразмерные параметры,}$$

μ - коэффициент Пуассона.

Поскольку рассматривается круглый на развертке цилиндра вырез, то решение уравнения (I) целесообразно иметь в полярных (полярных на развертке цилиндра) координатах ρ, θ . Такое решение применительно к расчету цилиндрической оболочки вырезом средних размеров получено в удобном для практического использования виде в работе [4]. В случае напряженного состояния симметричного относительно осей ξ и η , решение уравнения (I) для достаточно длинной оболочки записывается следующим образом

$$w(\rho, \theta) = d + \sum_{\nu=0,2,4,\dots}^{\infty} \ell_{\nu} w_{\nu}(\alpha) \cos \nu \theta, \quad (2)$$

$$\varphi(\rho, \theta) = \sum_{\nu=0,2,4,\dots}^{\infty} \ell_{\nu} \varphi_{\nu}(\alpha) \cos \nu \theta,$$

($\ell_0 = 0,5$ при $\nu = 0$, $\ell_{\nu} = 1$ при $\nu \neq 0$).

Здесь

$$\psi_{\nu}(x) = (-1)^{\nu/2} \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \bar{\alpha}_{n\nu}(x) - b_n \bar{\beta}_{n\nu}(x)],$$

$$\varphi_{\nu}(x) = (-1)^{\nu/2} \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \bar{\beta}_{n\nu}(x) + b_n \bar{\alpha}_{n\nu}(x)],$$

ωp ; d - жесткое смещение оболочки по нормали к срединной поверхности в начале координат;

a_n , b_n - произвольные постоянные.

Функции $\bar{\alpha}_{n\nu}(x)$, $\bar{\beta}_{n\nu}(x)$ подсчитываются через функции Том-и от аргумента $y = x\sqrt{2}$ по следующим формулам:

$$\bar{\alpha}_{n\nu}(x) = (-1)^{\nu+1} \frac{2}{\pi} (\operatorname{kei}_n y \operatorname{veer}_{n\nu} y + \operatorname{kez}_n y \operatorname{vei}_{n\nu} y),$$

$$\bar{\beta}_{n\nu}(x) = (-1)^{\nu} \frac{2}{\pi} (\operatorname{kei}_n y \operatorname{vei}_{n\nu} y + \operatorname{kez}_n y \operatorname{veer}_{n\nu} y),$$

$$\operatorname{veer}_{n\nu} y = \operatorname{ver}_{n-\nu} y + \operatorname{ver}_{n+\nu} y,$$

$$\operatorname{vei}_{n\nu} y = \operatorname{vei}_{n-\nu} y + \operatorname{vei}_{n+\nu} y.$$

Через ψ определяются моменты и перерезывающие силы в оболочке, а через φ - нормальные и касательные силы в срединной поверхности. Интегрирование геометрических соотношений позволяет определить перемещения в срединной поверхности u_p и v_p . Окончательные выражения для усилий и перемещений на основании работы [4] можно записать в виде:

$$N_p(r, \theta) = \sum_{\nu=0,2,4,\dots}^{\infty} \ell_{\nu} N_{p\nu}(x) \cos \nu \theta, \quad T_{p\theta}(r, \theta) = \sum_{\nu=2,4,\dots}^{\infty} T_{\nu}(x) \sin \nu \theta,$$

$$M_p(r, \theta) = \sum_{\nu=0,2,4,\dots}^{\infty} \ell_{\nu} M_{p\nu}(x) \cos \nu \theta, \quad Q_p^*(r, \theta) = \sum_{\nu=0,2,4,\dots}^{\infty} \ell_{\nu} Q_{p\nu}(x) \cos \nu \theta, \quad (3)$$

$$u_p(r, \theta) = -\frac{\alpha x}{2\omega} d(1 - \cos 2\theta) + \sum_{\nu=0,2,4,\dots}^{\infty} \ell_{\nu} u_{p\nu}(x) \cos \nu \theta,$$

$$v_p(r, \theta) = -\frac{\alpha x}{2\omega} d \sin 2\theta + \sum_{\nu=2,4,\dots}^{\infty} u_{p\nu}(x) \sin \nu \theta,$$

$$Q_p^*(r, \theta) = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \sum_{\nu=0,2,4,\dots}^{\infty} \ell_{\nu} v_{\nu}(x) \cos \nu \theta. \quad (4)$$

Здесь Q_p^* - обобщенная перерезывающая сила в смысле Кирхгофа. Численные направления усилий и перемещений показаны на рис. 3.

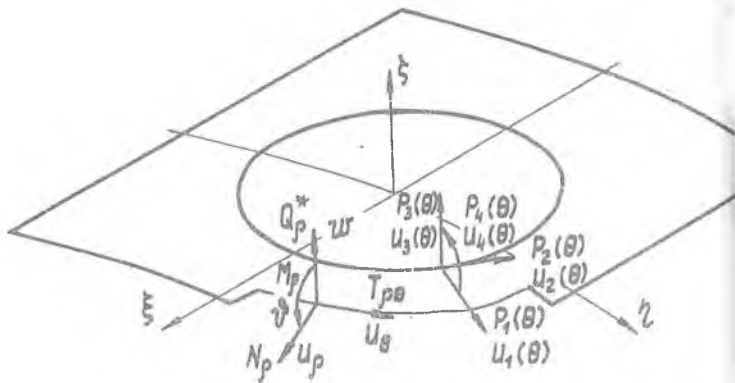


Рис. 3

Коэффициенты рядов (3), (4) подсчитываются по следующим формулам:

$$N_{p\nu}(x) = (-1)^{\frac{\nu}{2}+1} \frac{E}{8\lambda x} \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \bar{f}_{6,n\nu}(x) + b_n \bar{f}_{5,n\nu}(x)],$$

$$T_{p\nu}(x) = (-1)^{\frac{\nu}{2}+1} \frac{E}{8\lambda x} \nu \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \bar{f}_{8,n\nu}(x) + b_n \bar{f}_{7,n\nu}(x)],$$

$$M_{p\nu}(x) = (-1)^{\frac{\nu}{2}+1} \frac{E \nu x_1}{64\omega^2 \lambda} \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \bar{f}_{1,n\nu}(x) - b_n \bar{f}_{2,n\nu}(x)],$$

$$Q_{p\nu}(x) = (-1)^{\frac{\nu}{2}+1} \frac{E \nu}{64\omega \lambda} \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \bar{f}_{3,n\nu}(x) - b_n \bar{f}_{4,n\nu}(x)],$$

$$U_{p,0}(x) = \frac{\nu x}{8\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \{ a_n [S_{18,n}(x) + S_{19,n}(x)] + b_n [S_{17,n}(x) - S_{20,n}(x)] \},$$

$$U_{p\nu}(x) = \frac{\nu x}{8\omega} \frac{(-1)^{\nu/2}}{(\nu^2-1)} \sum_{n=0}^{\infty} \{ a_n [\bar{S}_{2,n\nu}(x) + \bar{S}_{3,n\nu}(x)] + b_n [\bar{S}_{1,n\nu}(x) - \bar{S}_{4,n\nu}(x)] \} \quad (\nu \neq 0)$$

$$U_{\theta\nu}(x) = \frac{\nu x}{8\omega} \frac{(-1)^{\nu/2}}{\nu(\nu^2-1)} \sum_{n=0}^{\infty} \{ a_n [\bar{S}_{6,n\nu}(x) + \bar{S}_{7,n\nu}(x)] + b_n [\bar{S}_{5,n\nu}(x) - \bar{S}_{8,n\nu}(x)] \},$$

$$\psi_{p\nu}(x) = (-1)^{\nu/2} \frac{\omega}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \bar{\alpha}'_{n\nu}(x) - b_n \bar{\beta}'_{n\nu}(x)].$$

Здесь и в дальнейшем штрихами обозначены производные по x .
 Формулы для функций $\bar{f}_{i,nv}(x)$, $\bar{S}_{i,nv}(x)$ приведены в ра-
 [4]. Чтобы показать структуру этих формул, приведем для
 выражения для некоторых из них:

$$\bar{f}_{1,nv}(x) = \bar{\alpha}_{nv}''(x) + \frac{\mu}{x} \bar{\alpha}_{nv}'(x) - \frac{\mu v^2}{x^2} \bar{\alpha}_{nv}(x),$$

$$\bar{f}_{2,nv}(x) = -x \bar{\alpha}_{nv}'''(x) + \frac{(2+\mu)v^2 + 1 - \mu}{x} \bar{\alpha}_{nv}'(x) - \frac{3v^3}{x^2} \bar{\alpha}_{nv}(x).$$

Как показано в [4], внутренние усилия в оболочке, действую-
 по контуру $\rho = const$ и соответствующие решению (2), дают
 равновесенную систему сил.

В дальнейшем для практических расчетов перейдем от рядов к
 членным суммам, ограничив суммирование в (3)-(6) до $\nu_{max} = n_{max} = t$.
 Для построения матрицы жесткости оболочки рассмотрим сначала
 нагружение по контуру выреза ($\rho = 1$, $x = \omega$) симметричными
 относительно ξ и η распределенными силами и моментами, положи-
 тельные направления которых совпадают с положительными направле-
 ниями перемещений (рис. 3). Для удобства дальнейших рассуждений
 назовем их через $P_1(\theta)$, $P_2(\theta)$, $P_3(\theta)$, $P_4(\theta)$. Представим их
 положениями по окружной координате

$$\begin{aligned} P_1(\theta) &= \sum_{\nu=0,2,4,\dots}^t \ell_{\nu} P_{1\nu} \cos \nu \theta, & P_2(\theta) &= \sum_{\nu=2,4,\dots}^t P_{2\nu} \sin \nu \theta, \\ P_3(\theta) &= \frac{\alpha}{8} \sum_{\nu=0,2,4,\dots}^t \ell_{\nu} P_{3\nu} \cos \nu \theta, & P_4(\theta) &= \frac{\alpha}{8} \sum_{\nu=0,2,4,\dots}^t \ell_{\nu} P_{4\nu} \cos \nu \theta. \end{aligned} \quad (7)$$

Эти силы можно выразить через внутренние усилия в сечении
 1, так что имеют место зависимости

$$\begin{aligned} P_{1\nu} &= -N_{\rho\nu}(\omega), & P_{2\nu} &= -T_{\nu}(\omega), \\ P_{3\nu} &= -\frac{\delta}{\alpha} Q_{\rho\nu}(\omega), & P_{4\nu} &= \frac{\delta}{\alpha} M_{\rho\nu}(\omega). \end{aligned} \quad (8)$$

Перемещения точек контура выреза обозначим через $U_1(\theta)$,
 $U_2(\theta)$, $U_3(\theta)$ и $U_4(\theta)$ и запишем

$$\begin{aligned} U_1(\theta) &= \frac{\alpha}{8} \sum_{\nu=0,2,4,\dots}^t U_{1\nu} \cos \nu \theta, & U_2(\theta) &= \frac{\alpha}{8} \sum_{\nu=2,4,\dots}^t U_{2\nu} \sin \nu \theta, \\ U_3(\theta) &= \sum_{\nu=0,2,4,\dots}^t U_{3\nu} \cos \nu \theta, & U_4(\theta) &= \sum_{\nu=0,2,4,\dots}^t U_{4\nu} \cos \nu \theta, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$u_{1\nu} = \frac{8}{\alpha} u_{p\nu}(\omega), \quad u_{2\nu} = \frac{8}{\alpha} u_{\theta\nu}, \quad (\nu > 2)$$

$$u_{3\nu} = w_{\nu}(\omega) \quad (\nu \neq 0)$$

$$u_{4\nu} = l_{\nu} w'_{\nu}(\omega),$$

$$u_{1,0} = \frac{4}{\alpha} [u_{p,0}(\omega) - \alpha d], \quad u_{1,2} = \frac{8}{\alpha} [u_{p,2}(\omega) + 0,5 \alpha d],$$

$$u_{2,2} = \frac{8}{\alpha} [u_{\theta,2}(\omega) - 0,5 \alpha d], \quad u_{3,0} = d + 0,5 w_0(\omega). \quad (I)$$

Введем матрицу-столбец^ж амплитудных значений сил и переменных:

$$u = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4\}, \quad P = \{P_1 \ P_2 \ P_3 \ P_4\}, \quad (II)$$

где

$$u_m = \{u_{m0} \ u_{m2} \ \dots \ u_{m\nu} \ \dots \ u_{mt}\} \quad (m = 1, 3, 4)$$

$$u_2 = \{u_{22} \ u_{24} \ \dots \ u_{2\nu} \ \dots \ u_{2t}\}$$

$$P_m = \{P_{m0} \ P_{m2} \ \dots \ P_{m\nu} \ \dots \ P_{mt}\} \quad (m = 1, 3, 4)$$

$$P_2 = \{P_{22} \ P_{24} \ \dots \ P_{2\nu} \ \dots \ P_{2t}\}.$$

Введем также матрицу-столбец g , содержащую жесткое смещение оболочки d и произвольные постоянные a_n, b_n решения (2)

$$g = \{d \ a_0 \ b_0 \ a_1 \ b_1 \ \dots \ a_n \ b_n \ \dots \ a_t \ b_t\}.$$

Теперь с учетом (10), (8), (6), (5) можно записать соотношения

$$u = A g, \quad P = \frac{E}{8\lambda} B g, \quad (I2)$$

где A и B — квадратные матрицы, имеющие следующий блочный вид

^ж Для удобства записи матрицу-столбец будем располагать в строки и заключать ее в фигурные скобки.

$$A = \begin{bmatrix} A_d^{(1)} & A_o^{(1)} & A_1^{(1)} & \dots & A_n^{(1)} & \dots & A_t^{(1)} \\ A_d^{(2)} & A_o^{(2)} & A_t^{(2)} & \dots & A_n^{(2)} & \dots & A_t^{(2)} \\ A_d^{(3)} & A_o^{(3)} & A_1^{(3)} & \dots & A_n^{(3)} & \dots & A_t^{(3)} \\ A_d^{(4)} & A_o^{(4)} & A_1^{(4)} & \dots & A_n^{(4)} & \dots & A_t^{(4)} \end{bmatrix}, \quad (I3)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & B_o^{(1)} & B_1^{(1)} & \dots & B_n^{(1)} & \dots & B_t^{(1)} \\ 0 & B_o^{(2)} & B_1^{(2)} & \dots & B_n^{(2)} & \dots & B_t^{(2)} \\ 0 & B_o^{(3)} & B_1^{(3)} & \dots & B_n^{(3)} & \dots & B_t^{(3)} \\ 0 & B_o^{(4)} & B_1^{(4)} & \dots & B_n^{(4)} & \dots & B_t^{(4)} \end{bmatrix} \quad (I4)$$

Для $n = 0, 1, 2, \dots, t$ имеем

$$A_n^{(m)} = \{ A_{0n}^{(m)} \quad A_{2n}^{(m)} \quad \dots \quad A_{\nu n}^{(m)} \quad \dots \quad A_{tn}^{(m)} \} \quad (m = 1, 3, 4)$$

$$A_n^{(2)} = \{ A_{2n}^{(2)} \quad A_{4n}^{(2)} \quad \dots \quad A_{\nu n}^{(2)} \quad \dots \quad A_{tn}^{(2)} \}$$

$$B_n^{(m)} = \{ B_{0n}^{(m)} \quad B_{2n}^{(m)} \quad \dots \quad B_{\nu n}^{(m)} \quad \dots \quad B_{tn}^{(m)} \} \quad (m = 1, 3, 4)$$

$$B_n^{(2)} = \{ B_{2n}^{(2)} \quad \dots \quad B_{\nu n}^{(2)} \quad \dots \quad B_{tn}^{(2)} \},$$

где

$$[A_{0n}^{(1)}]^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S_{18,n}(\omega) + S_{19,n}(\omega) \\ S_{17,n}(\omega) - S_{20,n}(\omega) \end{bmatrix}$$

$$[A_{\nu n}^{(1)}]^T = \frac{(-1)^{\nu/2}}{\sqrt{2-1}} \begin{bmatrix} \bar{S}_{2,n\nu}(\omega) + \bar{S}_{3,n\nu}(\omega) \\ \bar{S}_{1,n\nu}(\omega) - \bar{S}_{4,n\nu}(\omega) \end{bmatrix} \quad (\nu \neq 0)$$

$$[A_{\nu n}^{(2)}]^T = \frac{(-1)^{\nu/2}}{\sqrt{(\nu^2-1)}} \begin{bmatrix} \bar{S}_{6,n\nu}(\omega) + \bar{S}_{7,n\nu}(\omega) \\ \bar{S}_{5,n\nu}(\omega) - \bar{S}_{8,n\nu}(\omega) \end{bmatrix}$$

$$[A_{0,n}^{(3)}] = \frac{1}{2} [\bar{\alpha}'_{n,0}(\omega) - \bar{\beta}_{n,0}(\omega)]$$

$$[A_{\nu n}^{(3)}] = (-1)^{\nu/2} [\bar{\alpha}'_{n\nu}(\omega) - \bar{\beta}_{n,\nu}(\omega)] \quad (\nu \neq 0)$$

$$\begin{aligned}
 [A_{0,n}^{(4)}] &= \frac{\omega}{2z_1} [\bar{\alpha}'_{n0}(\omega) \quad -\bar{\beta}'_{n0}(\omega)] \\
 [A_{\downarrow n}^{(4)}] &= (-1)^{\downarrow/2} \frac{\omega}{z_1} [\bar{\alpha}'_{n\downarrow}(\omega) \quad -\bar{\beta}'_{n\downarrow}(\omega)] \quad (\downarrow \neq 0) \\
 [B_{\downarrow n}^{(1)}] &= (-1)^{\downarrow/2} \frac{1}{\omega} [\bar{f}_{6,n\downarrow}(\omega) \quad \bar{f}_{5,n\downarrow}(\omega)] \\
 [B_{\downarrow n}^{(2)}] &= (-1)^{\downarrow/2} \frac{\downarrow}{\omega} [\bar{f}_{8,n\downarrow}(\omega) \quad \bar{f}_{7,n\downarrow}(\omega)] \\
 [B_{\downarrow n}^{(3)}] &= (-1)^{\downarrow/2} \frac{1}{\omega} [\bar{f}_{5,n\downarrow}(\omega) \quad -\bar{f}_{4,n\downarrow}(\omega)] \\
 [B_{\downarrow n}^{(4)}] &= (-1)^{\downarrow/2+1} \frac{z_1}{\omega^2} [\bar{f}_{1,n\downarrow}(\omega) \quad -\bar{f}_{2,n\downarrow}(\omega)].
 \end{aligned}$$

Подматрицы $A_d^{(m)}$ имеют размеры $A_n^{(m)}$ ($m = 1, 2, 3, 4$), записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 A_d^{(1)} &= \left\{ -\frac{\alpha}{2} \quad \frac{\alpha}{2} \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right\} \\
 A_d^{(2)} &= \left\{ \frac{\alpha}{2} \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right\} \quad A_d^{(3)} = A_d^{(4)} = \{0\}.
 \end{aligned}$$

Поскольку в (8) жесткое смещение d отсутствует, матрица B расширена введением слева нулевого столбца.

Если для матрицы A существует обратная ей матрица A^{-1} , с учетом (12) можно установить связь

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{E}{8\lambda} C U, \\
 C &= B A^{-1}.
 \end{aligned}$$

где

Итак, рассмотрев нагружение оболочки по контуру выреза ра- пределенными силами и моментами, мы получили матричную зависимость между амплитудными значениями нагрузки и амплитудными значениями перемещений в оболочке по контуру выреза.

В дальнейшем нам потребуются зависимости (7) и (9) в матричной записи. Для этого введем функциональные матрицы

$$\begin{aligned}
 U(\theta) &= \{U_1(\theta) \quad U_2(\theta) \quad U_3(\theta) \quad U_4(\theta)\} \\
 P(\theta) &= \{P_1(\theta) \quad P_2(\theta) \quad P_3(\theta) \quad P_4(\theta)\}
 \end{aligned}$$

элементы которых определяются конечными суммами (9) и (7). Тогда можно записать

$$u(\theta) = \chi u, \quad P(\theta) = \bar{\chi} P, \quad (16)$$

$\chi, \bar{\chi}$ - квазидиагональные матрицы следующей структуры*

$$\chi = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{8} \chi_1(\theta) & & & \\ & \frac{\pi}{8} \chi_2(\theta) & & \\ & & \chi_1(\theta) & \\ & & & \chi_1(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\bar{\chi} = \begin{bmatrix} \bar{\chi}_1(\theta) & & & \\ & \chi_2(\theta) & & \\ & & \frac{\pi}{8} \bar{\chi}_1(\theta) & \\ & & & \frac{\pi}{8} \bar{\chi}_1(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\chi_1(\theta) = [1 \quad \cos 2\theta \quad \cos 4\theta \quad \dots \quad \cos \nu\theta \quad \dots \quad \cos t\theta]$$

$$\bar{\chi}_1(\theta) = [\frac{1}{2} \quad \cos 2\theta \quad \cos 4\theta \quad \dots \quad \cos \nu\theta \quad \dots \quad \cos t\theta]$$

$$\chi_2(\theta) = [\sin 2\theta \quad \sin 4\theta \quad \dots \quad \sin \nu\theta \quad \dots \quad \sin t\theta]. \quad (17)$$

При построении матрицы жесткости оболочки, в силу симметрии приложенного состояния относительно осей ξ и η , достаточно рассмотреть четверть контура выреза. На интервале оси 0 до $\frac{\pi}{2}$ размещаем $\frac{t}{2} + 1$ узловых точек (рис. 4).

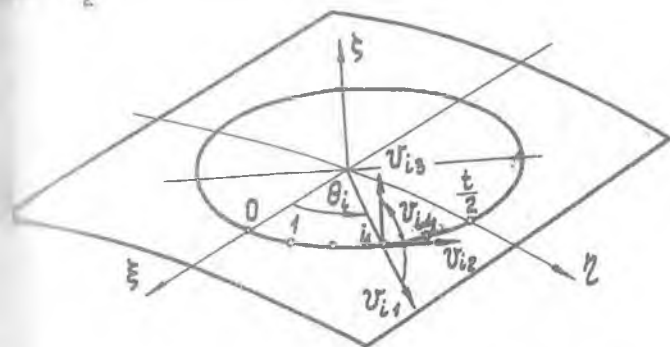


Рис. 4

Обозначим через u_{im} перемещения узла i в направлении перемещений u_{im} ($m = 1, 2, 3, 4$).

Диагональные матрицы будем располагать в строку и заключать в скобки вида $[\]$.

Составим матрицу-столбец узловых перемещений

$$v = \{ v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \},$$

где

$$v_m = \{ v_{0,m} \ v_{1,m} \ \dots \ v_{i,m} \ \dots \ v_{\frac{t}{2},m} \} \quad (m=1,3,4),$$

$$a \quad v_2 = \{ v_{1,2} \ \dots \ v_{i,2} \ \dots \ v_{\frac{t}{2}-1,2} \}$$

так как в силу симметрии напряженно-деформированного состояния

$$v_{0,2} = v_{\frac{t}{2},2} = 0.$$

Обозначим через S матрицу-столбец узловых сил

$$S = \{ S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4 \}$$

где

$$S_m = \{ S_{0,m} \ S_{1,m} \ \dots \ S_{i,m} \ \dots \ S_{\frac{t}{2},m} \} \quad (m=1,3,4)$$

$$S_2 = \{ S_{1,2} \ \dots \ S_{i,2} \ \dots \ S_{\frac{t}{2}-1,2} \}.$$

Здесь через $S_{i,m}$ обозначена сила, приложенная в узле i действующая в направлении узлового перемещения $v_{i,m}$ (рис. 4)

Связь между узловыми силами и узловыми перемещениями может быть записана в стандартной форме

$$S = K U,$$

где K - матрица жесткости.

Между узловыми перемещениями и амплитудными значениями перемещений U существует следующая зависимость:

$$v = \alpha U,$$

где α - квазидиагональная матрица вида

$$\alpha = \left[\frac{x}{8} \alpha_1 \quad \frac{x}{8} \alpha_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_1 \right].$$

Подматрицы α_1 и α_2 суть квадратные матрицы следующей структуры

$$\alpha_1 = \{ \chi_1(\theta_0) \quad \chi_1(\theta_1) \dots \chi_1(\theta_i) \dots \chi_1(\theta_{\frac{t}{2}}) \}$$

$$\alpha_2 = \{ \chi_2(\theta_1) \dots \chi_2(\theta_i) \dots \chi_2(\theta_{\frac{t}{2}-1}) \}.$$

Заметим, что матрица α_2 получится квадратной, если в U_2 вычеркнуть последний элемент $U_{2\frac{t}{2}}$.

При постоянном шаге между узловыми точками матрицы α_1, α_2 обладают свойством симметрии.

Амплитудные значения перемещений можно выразить через узловые перемещения оболочки

$$u = \beta v,$$

$$\beta = \left[\frac{\delta}{\alpha} \alpha_1^{-1} \quad \frac{\delta}{\alpha} \alpha_2^{-1} \quad \alpha_1^{-1} \quad \alpha_2^{-1} \right].$$

Дадим узловым точкам возможные перемещения $\delta v = \{ \delta v_1, \delta v_2, \delta v_3, \delta v_4 \}$.

$$\delta u = \beta \delta v, \quad (21)$$

и для приращения перемещений контура выреза оболочки получим

$$\delta u(\theta) = \chi \delta u. \quad (22)$$

Будем полагать, что работа узловых сил на возможных перемещениях δv равна работе распределенных нагрузок на перемещениях $\delta u(\theta)$, т.е.

$$(\delta v)^T S = \nu_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\delta u(\theta)]^T P(\theta) d\theta. \quad (23)$$

С учетом (15), (16) и (21) правая часть последнего равенства имеет вид

$$\begin{aligned} \nu_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\delta u(\theta)]^T P(\theta) d\theta &= \nu_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\delta u)^T \chi^T \bar{\chi} P d\theta = \\ &= \frac{\nu_1 E}{8 \lambda} (\delta v)^T \beta^T \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \chi^T \bar{\chi} d\theta \right) C \beta v. \end{aligned}$$

В силу ортогональности тригонометрических функций, входящих в матрицы χ и $\bar{\chi}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \chi^T \bar{\chi} d\theta = \frac{\pi \alpha}{32} I,$$

где I - единичная матрица.

Окончательно равенство (23) примет вид

$$(\delta v)^T S = \frac{\pi r_0 \alpha E}{256 \lambda} (\delta v)^T \beta^T C \beta v.$$

Так как элементы матрицы δv произвольны, то

$$S = \frac{\pi r_0 \alpha E}{256 \lambda} \beta^T C \beta v.$$

Сопоставляя это равенство с (18), получим

$$K = \frac{\pi r_0 \alpha E}{256 \lambda} \beta^T C \beta.$$

Таким образом, задача сводится к построению матрицы C в основании аналитического решения оболочки с круглым вырезом, где для получения матрицы жесткости нужно лишь перемножить три числовые матрицы. При этом следует иметь в виду, что метод может дать достаточную точность, если вырез и обусловленная им зона возмущения лежат в пологой части оболочки.

Для оценки точности предлагаемого метода построения матрицы жесткости была рассмотрена в качестве теста задача о растяжении цилиндрической оболочки с неподкрепленным круглым вырезом. Напряженно-деформированное состояние оболочки представляется как сумма двух состояний: основного и дополнительного. В основном состоянии рассматривается растяжение оболочки без выреза, в дополнительном - по контуру выреза прикладываются силы, равные по величине и противоположные по направлению усилиям, возникающим здесь в оболочке без выреза [1]:

$$N_{\rho}^{\circ} = -\frac{N}{2} (1 + \cos 2\theta), \quad T_{\rho\theta}^{\circ} = \frac{N}{2} \sin 2\theta,$$

где N - погонное усилие в оболочке вдали от выреза.

Для дополнительного состояния было получено точное решение задачи с использованием рядов (3), (4), а также решение по методу конечных элементов, когда оболочка представлялась одним элементом с узлами по контуру выреза. Расчеты были выполнены для оболочки с размерами $R = 100$ см, $r_0 = 18$ см, $h = 0,6$ см, что соответствует $\omega = 1,493$, $\alpha = 0,18$, при $N = 100$ кг/см. Количество узлов на участке $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ принималось равным 10 и 15.

Таблица I

	Точное решение		Метод конечных элементов			
	$\theta = 0$	$\theta = \frac{\pi}{2}$	10 узлов		15 узлов	
			$\theta = 0$	$\theta = \frac{\pi}{2}$	$\theta = 0$	$\theta = \frac{\pi}{2}$
U_p , мм	0,0627	-0,00784	0,0625	-0,00738	0,0626	-0,00779
W , мм	0	-0,662	0	-0,663	0	-0,662
$W \cdot 10^3$ [рад]	-1,83	-1,62	-1,87	-1,63	-1,84	-1,62

Результаты вычислений для $\theta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$ приведены в таблице I. Условно принято, что за счет жесткого смещения на контуре выреза $W = 0$ при $\theta = 0$. Сопоставление результатов расчета по методу конечных элементов с точным решением позволяет утверждать, что по предлагаемому методу матрица жесткости оболочки подсчитывается с весьма высокой точностью.

Л и т е р а т у р а

1. Хазанов Х.С. Напряженное состояние цилиндрической оболочки с подкрепленным круглым отверстием. - В сб.: Вопросы прочности элементов авиационных конструкций. Труды КуАИ, вып. 39, 1968.
2. Хазанов Х.С., Логунов В.Я. Использование аналитического решения для построения матрицы жесткости цилиндрической оболочки. - В сб.: Вопросы прикладной механики в авиационной технике. Труды КуАИ, вып. 77, 1975.
3. Дурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек. - М., Гостехиздат, 1947.
4. Хазанов Х.С. К расчету цилиндрических оболочек с круглыми отверстиями. - В сб.: Вопросы прочности элементов авиационных конструкций. Труды КуАИ, вып. 29, 1967.