

ИДК 539.385  
 И.М. ДУПЛЯКИН

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ОЦЕНКИ  
 ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЧНОСТИ МИКРООБЪЕМОВ  
 МАТЕРИАЛА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ УСТАЛОСТНЫХ ИСПЫТАНИЙ

Рассматриваются вопросы оптимизации алгоритмов, совокупность которых составляет основу процедуры численной оценки параметров распределения прочности микрообъемов материала по результатам усталостных испытаний лабораторных образцов.

При интегрировании уравнений теории "слабого" звена, связывающих вероятность разрушения  $P$  с уровнем переменных напряжений  $\sigma_{max}$  соотношением вида

$$-\ln(1-P) = \int_V \left( \frac{\sigma(\sigma_{max, x, y, z}) - \sigma_0}{\sigma_0} \right)^m dV, \quad (I)$$

необходимо иметь численные оценки параметров  $\sigma_0$ ,  $m$ ,  $\sigma_0$  исходного распределения прочности микрообъемов материала для заданной серии испытаний  $N_{\delta i}$ .

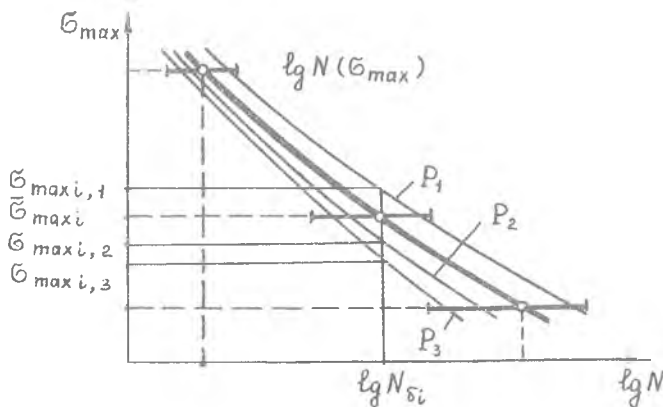


Рис. I

Представим результаты испытаний лабораторных образцов графически, как это показано на рис. I. Кроме квантильных кривых усталости для соответствующих вероятностей на рис. I представлена зависимость между средними значениями логарифмов долговечности и средними значениями напряжений  $\lg N(\sigma_{\max})$ .

В соответствии с большим объемом известных литературных данных для описания семейства квантильных кривых усталости можно использовать нормальное распределение логарифма долговечности.

В сечении квантильных кривых усталости для данной базы испытаний  $N_{\delta i}$  имеем напряжения  $\sigma_{\max i,1}$ ,  $\sigma_{\max i,2}$ ,  $\sigma_{\max i,3}$ , которые соответствуют вероятностям разрушения  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ . Подставив полученные значения напряжений в выражение (I), запишем систему уравнений для оценки параметров  $\mu$ ,  $m$ ,  $\sigma_0$  в виде

$$J_j \sigma_0^m = S(\mu, m, \sigma_{\max i, j}); \quad j = 1, 2, 3$$

$$J_j = -\ln(1 - P_j), \quad N_{\delta i} = \text{const}, \quad (2)$$

$$S(\mu, m, \sigma_{\max i, j}) = \int_V (\sigma^{\text{экв}}(x, y, z, \sigma_{\max i, j}) - \mu)^m dV,$$

$i = 1, 2, \dots, n$ , где  $n$  - число уровней нагружения.

Если закон распределения напряжений для данной базы испытаний, получаемый расчетным путем из выражения (I), можно привести в полное соответствие с экспериментальным распределением напряжений, получаемым в сечении квантильных кривых усталости за счет подбора значений параметров  $\mu$ ,  $m$ ,  $\sigma_0$ , то вероятности  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  могут быть выбраны произвольно, но так, чтобы они были различными.

Очевидно, что такого соответствия законов распределения в рассматриваемой постановке быть не может, т.к. один из них получается перестроением нормального распределения логарифма долговечности, а другой соответствует интегральному преобразованию распределения Вейбулла. Эти законы существенно различаются при малых вероятностях. Закон Вейбулла имеет выраженную нижнюю границу рассеяния, задаваемую параметром  $\mu$ . Нормальный закон такого свойства не имеет.

Поэтому встает вопрос о необходимости выбора значений  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  таким образом, чтобы добиться наилучшего соответствия исходного экспериментального распределения и того, которое описывается соотношением (I) с использованием оценки параметров, получаемых из

решения системы (2). Этот вопрос решается различными путями. Остановимся на одном из возможных алгоритмов, который доведен до реализации в виде программы для ЭВМ.

Допустим, что значения вероятностей  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  заданы и что система (2) решена относительно оценок параметров  $\mu^*$ ,  $m^*$ ,  $\sigma_0^*$  для базы испытаний  $N_{\delta i}$ .

Оценим математическое ожидание и дисперсию напряжений для теоретического распределения, задаваемого соотношением (1):

$$M_{расч} = \sum_j G_{\max i, j} P_j, \quad (3)$$

$$D_{расч} = \sum_j G_{\max i, j}^2 P_j - M_{расч}^2, \quad (4)$$

где  $P_j = P_j - P_{j-1}$  - приращение интегральной функции распределения.

Приведенные соотношения (3) и (4) могут быть реализованы только численно.

Рассматривая выражения вида (1) относительно  $G_{\max i, j}$ , можем оценить математическое ожидание и дисперсию экспериментального распределения напряжений  $M_{эксп}$ ,  $D_{эксп}$ .

Сравнивая расчетные и экспериментальные статистические характеристики, составим критериальные функции для выбора значений вероятностей  $P_1$ ,  $P_2$  в виде

$$F_1(P_1, P_2) = \frac{M_{расч} - M_{эксп}}{M_{эксп}}, \quad (5)$$

$$F_2(P_1, P_2) = \frac{D_{расч} - D_{эксп}}{D_{эксп}}. \quad (6)$$

Решая систему уравнений

$$F_i(P_1, P_2) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

можно определить  $P_1$  и  $P_2$ , если задано  $P_3$ .

Если параметры  $\mu$ ,  $m$ ,  $\sigma_0$  найдены, то расчетное распределение напряжений, построенное по уравнению (1), и соответствующее экспериментальное распределение будут пересекаться в трех точках, соответствующих вероятностям  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ , как показано на рис. 2.

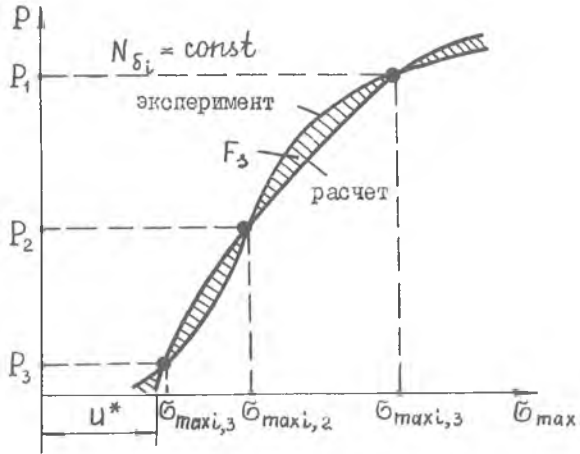


Рис. 2

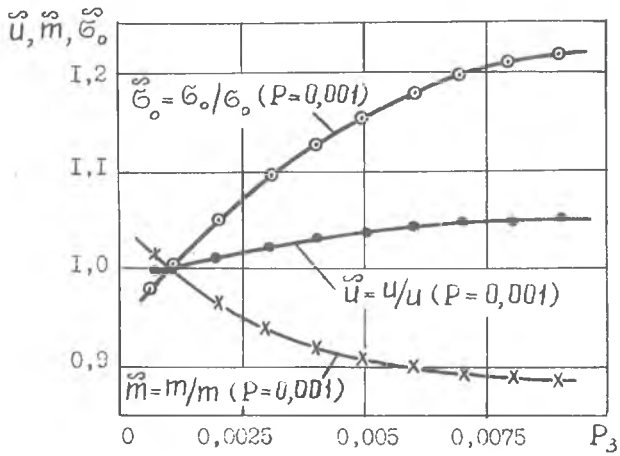


Рис. 3

По существу для выбора  $P_1$ ,  $P_2$  предложен метод моментов, который можно применить и для определения  $P_3$ . Эта кажущаяся простота обманчива, т.к. здесь проследивается только схема построения соответствующей процедуры расчета в отрыве от реализации конкретного алгоритма, который в этом случае значительно усложняется. Поэтому при выборе значения  $P_3$  предлагается принять любую вероятность на том участке функции распределения, который в последующей расчетной практике будет использоваться наиболее часто. Обычно таким участком является нижняя часть функции распределения, соответствующая вероятностям разрушения 0,01-0,01. Более низкие вероятности брать не рекомендуется, т.к. для оценки функций распределения в этой области требуется такое число образцов, которое значительно превышает объем обычных усталостных испытаний.

В силу нелинейности системы уравнений (7) и (2) имеет место неоднозначность их решений относительно оценок параметров  $U^*$ ,  $m^*$ ,  $\sigma_0^*$ . Практически в физически определенных областях изменения этих параметров число решений превышает несколько десятков. Поэтому встает вопрос об однозначном выборе наиболее подходящего решения. Критерием для этого выбора предлагается минимизация площади между кривыми для экспериментальной и теоретической функции распределения. Чтобы введенный критерий являлся также мерой относительной погрешности согласования двух функций распределения, соответствующая площадь относится к площади под кривой для экспериментального распределения

$$F_3 = \frac{\int_0^1 |\sigma_{\max i, P}^{\text{экс}} - \sigma_{\max i, P}^{\text{расч}}| dP}{\int_0^1 \sigma_{\max i, P}^{\text{экс}} dP}, \quad F_3 = \min. \quad (8)$$

Заканчивая данный раздел, следует отметить существенную особенность оценки параметров  $U$ ,  $m$ ,  $\sigma_0$ , связанную с тем, что они должны отражать используемые исходные экспериментальные данные. Эта первичная информация может быть получена для данного материала на различном оборудовании, для различных типов образцов и разных объемов экспериментальных данных. Поэтому встает вопрос о последующем усреднении результатов, полученных с использованием разнородных оценок искомых параметров.

Решить этот вопрос достаточно обоснованно можно только в том случае, если получаемые оценки параметров однозначно связываются с исходными данными. Под этим понимается возможность воспроизведения

расчетным путем математического ожидания и дисперсии исходных экспериментальных данных при найденных оценках искомых параметров. Можно подумать, что отмеченное условие выполняется безусловно, если достаточно точно решена система уравнений (7). Однако это не так, поскольку минимизация функций (5) и (6) обеспечивает выполнение этого условия для характеристик, получаемых перестроением исходных данных на основе принятого описания квантильных кривых усталости. Очевидно, что сказанное приводит к необходимости ограничений при выборе аппроксимирующих зависимостей  $\lg N(\sigma_{max})$  и  $3(\lg N(\sigma_{max}))$ . Эти зависимости должны точно воспроизводить экспериментальные данные при

$$\sigma_{max} = \bar{\sigma}_{max i}; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

где  $n$  - число экспериментальных точек.

Наиболее уязвимым моментом предлагаемого алгоритма оценки параметров исходного уравнения теории «слабого» звена с идейной точки зрения является произвольность значения согласующей вероятности  $P_3$ . На рис.3 графически представлены результаты численного эксперимента на ЭВМ по оценке параметров  $\mu$ ,  $m$ ,  $\sigma_0$  при варьировании значения  $P_3$ . Расчетные данные соответствуют материалу ЗОХТСА. Видно, что оценки искомых параметров слабо реагируют на изменение величины  $P_3$ , что подтверждает возможность использования предложенного алгоритма.

#### Библиографический список

1. Дуплякин В.М. Оценка параметров Вейбулла при прогнозировании сопротивления усталости // Вопросы прочности и долговечности элементов конструкций летательных аппаратов: Межвуз. сб. Куйбышев. авиац. ин-т. Куйбышев, 1988. С.78-83.