КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С.П. КОРОЛЕВА
Труды, выпуск 66, 1973 г.

М.В.Зацепина. Х.С.Хазанов

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С КРУГЛЫМ ВЫРЕЗОМ НА БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Вопрос устойчивости цилиндрических оболочек с отверстием рассматривается в ряде работ [1-3]. В основном, это экспериментальные исследования. Настоящая статья посвящена теоретическому исследованию устойчивости цилиндрической оболочки с круглым вырезом. Задача решается с позиций геометрически нелинейной теории пологой оболочки. Размеры выреза характеризуются безразмерным параметром

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}\,\frac{r_0}{\sqrt{Rh}},$$

где R, h - радиус срединной поверхности и толщина оболочки; r_0 - радиус выреза; μ - коэффициент Пуассона.

При расчете оболочек с учетом геометрической нелинейности, ввиду большой сложности задачи, широкое распространение получили приближенные методы и, в частности, методы, основанные на использовании вариационных принципов. Поскольку при расчете оболочек с отверстиями имеется определенная специфика, то для решения задачи будем пользоваться вариационными уравнениями, полученными в [4] применительно к рассматриваемому классу задач в полярных на развертке цилиндра координатах (r, θ).

Нормальные перемещения w, перемещения в срединной поверхности u, v и функция напряжений Φ представляются в виде суммы двух слагаемых:

$$u = u^\circ + u_1; \quad v = v^\circ + v_1; \quad w = w^\circ + w_1; \quad \Phi = \Phi^\circ + \Phi_1 .$$

Первые слагаемые, отмеченные индексом "о", соответствуют решению задачи в линейной постановке и могут быть найдены с использованием методики, изложенной в [5] . К ним добавляются величины (назовём их дополнительными), обусловленные геометрической нелинейностью. Учитывая локальность возмущений, вносимых вырезом, полагаем, что на некотором расстоянии от его края дополнительные перемещения и функция напряжений стремятся к нулю.

С введением безразмерных величин

$$x=\omega\frac{r}{r_0},\quad \bar\Phi=\frac{E}{R\sigma_0}\Phi,\quad \bar u=\frac{E}{R\sigma_0}u,\quad \bar v=\frac{E}{R\sigma_0}v,\quad \bar w=\frac{E}{R\sigma_0}w,$$

вариационные уравнения работы [4] для оболочки с неподкрепленным вырезом могут быть приведены к виду:

$$\int_{\omega}^{x_1}\int_0^{2\pi}\left[\nabla^2\nabla^2\bar w-8\mathcal{L}(\bar\Phi)+\frac{6B\lambda\sigma_0}{E}\mathcal{L}_1(\bar\Phi,\bar w)-\frac{64\lambda}{\sigma_0}p\right]x\,\delta\bar w_1\,dx\,d\theta+$$

$$+\frac{64\omega^2\lambda}{\varkappa R\sigma_0}\int_0^{2\pi}\Big[N_\rho\delta\bar u_1+T_{\rho\theta}\delta\bar v_1+\Big(\overset{*}{Q}_\rho+\frac{\omega\sigma_0}{\varkappa E}N_\rho\frac{\partial\bar w}{\partial r}+\frac{\sigma_0}{\varkappa E}T_{\rho\theta}\frac{\partial\bar w}{\partial\theta}\Big)\delta\bar w_1+ \qquad (\mathrm{I})$$

$$+\frac{\omega}{r_0}\mathcal{M}_\rho\delta\Big(\frac{\partial\bar w_1}{\partial x}\Big)\Big]_{x=\omega}d\theta=0$$

$$\int_{\omega}^{x_1}\int_0^{2\pi}\left[\nabla^2\nabla^2\bar\Phi+8\mathcal{L}(\bar w)-\frac{3B\lambda\sigma_0}{E}\mathcal{L}_1(\bar w,\bar w)\right]x\,\delta\bar\Phi_1\,dx\,d\theta=0,$$

где

N_ρ, $T_{\rho\theta}$ – нормальное и сдвигающее усилия;

$\mathcal{M}_\rho$ – изгибающий момент;

$\overset{*}{Q}_\rho$ – обобщенная перерезывающая сила в смысле Кирхгофа;

p – нормальная поверхностная нагрузка;

σ_0 – напряжение в оболочке вдали от выреза;

x_1 – значение координаты x , при котором полностью затухают дополнительные возмущения, обусловленные геометрической нелинейностью, $\lambda=\frac{R}{h}$, $\varkappa=\frac{r_0}{R}$ – безразмерные параметры оболочки;

$$B=\frac{1}{3}\sqrt{3(1-\mu^2)};$$

$$\mathcal{L}(\bar\Phi)=\Big(\frac{1}{x}\frac{\partial\bar\Phi}{\partial x}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2\bar\Phi}{\partial\theta^2}\Big)\sin^2\theta+\frac{\partial^2\bar\Phi}{\partial x^2}\cos^2\theta-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{x}\frac{\partial\bar\Phi}{\partial\theta}\Big)\sin 2\theta;$$

$$\mathcal{L}_1(\bar\Phi,\bar w)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{\partial^2\bar\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\bar w}{\partial\theta^2}-2\frac{\partial^2\bar\Phi}{\partial x\partial\theta}\frac{\partial^2\bar w}{\partial x\partial\theta}+\frac{\partial^2\bar\Phi}{\partial\theta^2}\frac{\partial^2\bar w}{\partial x^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\bar\Phi}{\partial x}\frac{\partial\bar w}{\partial x}\right)+\frac{2}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial\bar\Phi}{\partial\theta}\frac{\partial\bar w}{\partial\theta}\right).$$

На характер изменения функции $\bar\Phi_1(x,\theta)$ наложим ограничение, потребовав, чтобы она удовлетворяла граничным условиям $[\bar N_{\rho 1}=\bar T_{\rho\theta 1}=0]_{x=\omega}$. Тогда в уравнениях (I) пропадут члены, содержащие вариации $\delta\bar u_1$ и $\delta\bar v_1$. Выражения для $\bar w^\circ$ и $\bar\Phi^\circ$ получаются из решения задачи в линейной постановке, т.е. они удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^2\nabla^2\bar w^\circ-8\mathcal{L}(\bar\Phi^\circ)-\frac{64\lambda}{\sigma_0}p=0,\quad \nabla^2\nabla^2\bar\Phi^\circ-8\mathcal{L}(\bar w^\circ)=0 \qquad (2)$$

и статическим граничным условиям на краю выреза. В итоге, вариационные уравнения (I) примут вид:

$$\int_\omega^{x_1}\int_0^{2\pi}\left[\nabla^2\nabla^2\bar w_1-8\mathcal{L}(\bar\Phi_1)+\frac{6B\lambda\sigma_0}{E}\mathcal{L}_1(\bar\Phi,\bar w)\right]x\,\delta\bar w_1\,dx\,d\theta-$$

$$-\omega\int_0^{2\pi}\left[\mathcal{L}_2(\bar w_1)\,\delta\bar w_1+\mathcal{L}_3(\bar w_1)\,\delta\left(\frac{\partial\bar w_1}{\partial x}\right)\right]_{x=\omega}d\theta=0,$$

$$\int_\omega^{x_1}\int_0^{2\pi}\left[\nabla^2\nabla^2\bar\Phi_1+8\mathcal{L}(\bar w_1)-\frac{3B\lambda\sigma_0}{E}\mathcal{L}_1(\bar w,\bar w)\right]x\,\delta\bar\Phi_1\,dx\,d\theta=0,$$

где

$$\mathcal{L}_2=\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2+(1-\mu)\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right),$$

$$\mathcal{L}_3=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\mu\left(\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right). \qquad (3)$$

Решение задачи для оболочки с круглым вырезом в линейной постановке получается в виде тригонометрических рядов относительно окружной координаты [5]. Функции $\bar\Phi_1$ и $\bar w_1$ представим в виде тригонометрических многочленов. Для напряженного состояния, симметричного относительно образующей и направляющей цилиндра, проходящих через центр выреза, имеем

$$\bar\Phi_1=\sum_{\nu=0,2,4\ldots}^{n}\bar\Phi_{1\nu}(x)\cos\nu\theta,\qquad \bar w_1=\sum_{\nu=0,2,4\ldots}^{n}\bar w_{1\nu}(x)\cos\nu\theta. \qquad (4)$$

Функциональные коэффициенты $\bar\Phi_{1\nu}(x)$ и $\bar w_{1\nu}(x)$ выберем таким образом, чтобы на краю отверстия имело место

$$\frac{\partial\bar\Phi_{1\nu}(\omega)}{\partial x}-\frac{\nu^2}{\omega}\bar\Phi_{1\nu}(\omega)=0;\qquad \frac{\partial\bar\Phi_{1\nu}(\omega)}{\partial x}-\frac{1}{\omega}\bar\Phi_{1\nu}(\omega)=0 \qquad (5)$$

и чтобы они приближались к нулю при значениях $x = x_1$
Этим требованиям удовлетворяют функции

$$\bar{\Phi}_{1\nu}(x) = \sum_{k=1,2,3...}^{\ell} A_{\nu k} \bar{\Phi}_{\nu k}(x), \quad \bar{w}_{\nu k}(x) = \sum_{k=1,2,3...}^{\ell} B_{\nu k} w_{\nu k}(x)$$

$$\bar{\Phi}_{\nu k}(x) = \frac{(e\varepsilon_{1k})^2}{4}(x-\omega)e^{-\varepsilon_{1k}(x-\omega)}; \quad \bar{w}_{\nu}(x) = e^{-\varepsilon_{2k}(x-\omega)^2}, \qquad (6)$$

где

$A_{\nu k}$, $B_{\nu k}$ – варьируемые постоянные;

ε_{1k}, ε_{2k} – некоторые константы, определяющие характер изменения выбираемых функций.

Примерный вид функций $\bar{\Phi}_{\nu k}(x)$ (сплошные линии) и $\bar{w}_{\nu k}(x)$ (штриховые линии) приведен на рис. I.

После подстановки в вариационные уравнения (3) линейного решения, а также выражений (4) и (6) относительно варьируемых постоянных $A_{\nu k}$ и $B_{\nu k}$ получается система нелинейных алгебраических уравнений. Применительно к нагружению оболочки сжимающими осевыми силами задача была запрограммирована и просчитана на ЭВМ БЭСМ-4.

В результате расчета получены выражения для суммарных нормальных перемещений в виде

$$\bar{w} = \sum_{\nu=0,2,4}^{n} \bar{w}_{\nu}(x)\cos\nu\theta. \qquad (7)$$

Подобную же структуру имеют и выражения для суммарных напряжений в сечениях оболочки.

Расчеты проводились с удерживанием в рядах (4) различного числа членов и для нескольких наборов констант ε_{1k} и ε_{2k}. Точность до четвертой значащей цифры обеспечивалась при 3-4 членах ряда.

На рис. 2, соответствующем $\omega = 2$ и $\lambda = 300$, построены графики изменения коэффициентов $\bar{w}_{\nu}$ для контура отверстия ($r = r_0$) в зависимости от величины внешней нагрузки. Штриховыми линиями на графике нанесены результаты расчета по линейной теории. С ростом нагрузки коэффициент нулевой гармоники $\bar{w}_0$ сначала по абсолютной величине уменьшается, меняет знак и затем интенсивно возрастает. Существенно возрастает по модулю и коэффициент второй гармоники $\bar{w}_2$. При некотором значении

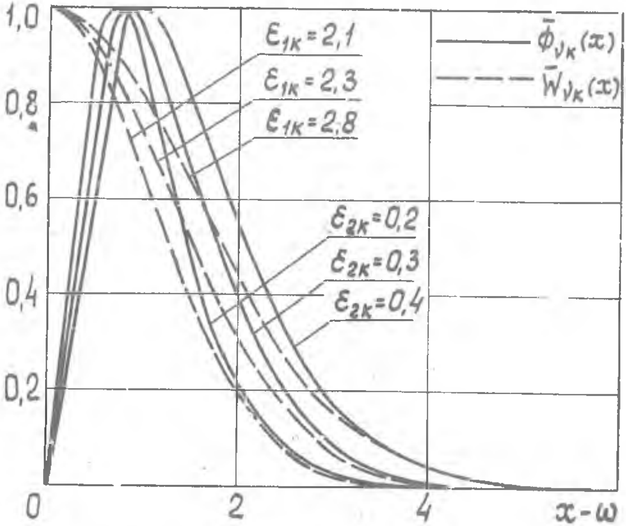

1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
2
4
$x-\omega$
$\varepsilon_{1K}=2,1$
$\varepsilon_{1K}=2,3$
$\varepsilon_{1K}=2,8$
$\varepsilon_{2K}=0,2$
$\varepsilon_{2K}=0,3$
$\varepsilon_{2K}=0,4$
$\bar{\Phi}_{\nu K}(x)$
$\bar{W}_{\nu K}(x)$

Рис. I

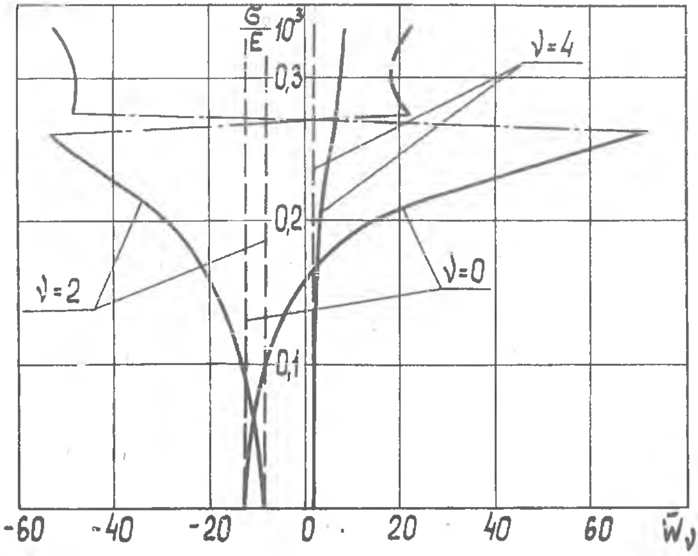

$\frac{G}{E}\,10^3$
0,3
0,2
0,1
$\nu=4$
$\nu=2$
$\nu=0$
-60
-40
-20
0
20
40
60
$\bar{W}_\nu$

Рис. 2

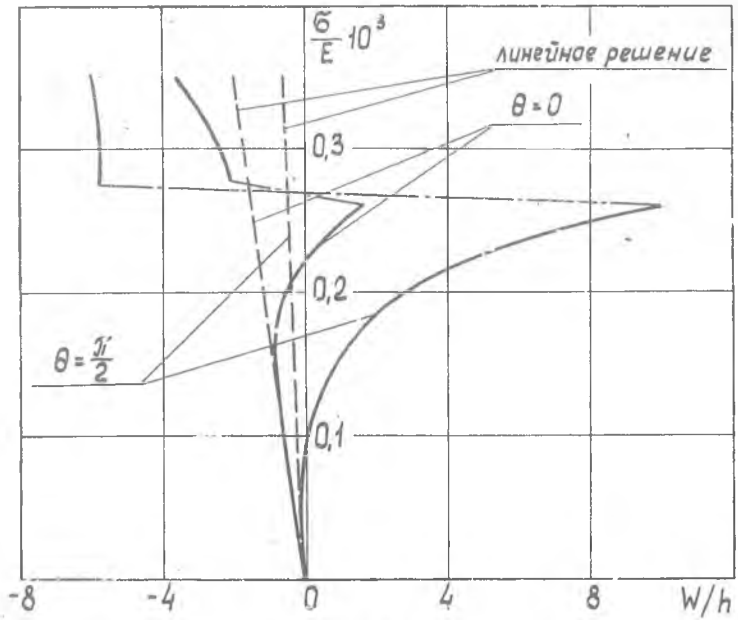
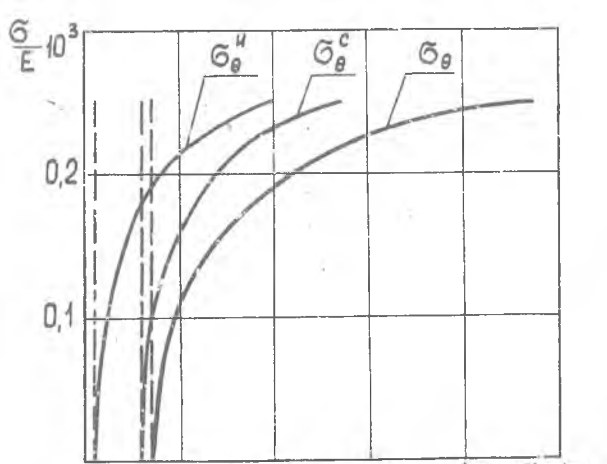

$\frac{\sigma}{E}\cdot 10^3$
линейное решение
$\theta = 0$
0,3
0,2
0,1
$\theta = \frac{\pi}{2}$
-8
-4
0
4
8
W/h

Рис. 3


$\frac{\sigma}{E}\cdot 10^3$
$\sigma_\theta^и$
σ_θ^c
σ_θ
0,2
0,1
0
-10
-20
-30
-40
σ_θ/σ_0

внешней нагрузки, соответствующем потере устойчивости, оба эти коэффициента скачкообразно меняют знак. Оболочка переходит в закритическое состояние. Коэффициенты старших гармоник относительно невелики и монотонно возрастают. Для $\nu > 4$ они ввиду малости на графике не показаны.

На рис. 3 приведены графики изменения относительного прогиба $\frac{w}{h}$ с ростом нагрузки для $\theta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$. Из графиков видно, что для просчитанных параметров к моменту потери устойчивости $\frac{w}{h} \approx 10$. Это говорит о невозможности решения задачи устойчивости оболочки с круглым вырезом в линейной постановке.

Теоретическое значение критической нагрузки $\left(\frac{\sigma_{кр}}{E} = 0{,}26 \cdot 10^{-3}\right)$ сопоставлялось с экспериментальными данными работ [1, 2]. Расхождение незначительное и составляет 6 ÷ 8%.

На рис. 4 приведены для $\theta = \frac{\pi}{2}$ графики напряжений в срединной поверхности σ_θ^c, а также изгибных $\sigma_\theta^и$ и суммарных σ_θ напряжений у внутренней поверхности края выреза. При небольших нагрузках напряжения близки к их значениям, полученным из решения задачи в линейной постановке (штриховые линии). Однако по мере роста внешней нагрузки геометрическая нелинейность начинает все более существенно сказываться на напряженном состоянии оболочки. Так при $\frac{\sigma_0}{E} = 0{,}1 \cdot 10^{-3}$ коэффициент концентрации напряжений возрастает по сравнению с расчетом в линейной постановке на 25%, при $\frac{\sigma_0}{E} = 0{,}15 \cdot 10^{-3}$ – на 75 %, а при $\frac{\sigma_0}{E} = 0{,}2 \cdot 10^{-3}$ – в 3 раза.

Литература

1. Коноплев Ю.Г. Сб."Исследования по теории пластин и оболочек", № 6, Казань, 1968.
2. Tennison R.C. Trans ASME, ser.B, vol. 90 № 4, 1968.
3. Голда Ю.Л и др. "Прикладная механика", том IX, вып. I.
4. Зацепина М.В.,Хазанов Х.С. Труды КуАИ, вып. 48, 1971.
5. Хазанов Х.С. Труды КуАИ, вып. 36, 1969.