

В.И.Леонов, Х.С.Хазанов

РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАГРУЖЕННОЙ
ЧЕРЕЗ КРУГЛУЮ УПРУГУЮ ПЛОЩАДКУ ПОВЕРХНОСТНЫМИ СИЛАМИ

Вопросам прочности цилиндрических оболочек, нагруженных по площадке нормальными поверхностными силами, посвящен ряд работ отечественных и зарубежных авторов.

В работах В.М.Даревского [1, 2] дано строгое решение основных дифференциальных уравнений теории цилиндрической оболочки, соответствующее равномерно распределенной по прямоугольной площадке нагрузке. Решение построено с помощью тригонометрических рядов и интегралов Фурье. Получены обширные числовые результаты. В менее строгой постановке та же задача решалась Бейлардом [3]. В работах Ю.П. Жигалко и Н.Г.Гурьянова [4], Н.Г.Гурьянова [5] исследовано распределение прогибов и напряжений по поверхности оболочки. В.А.Сибиряков и Б.В.Нерубайло в [6, 7] задачу о нормальной локальной нагрузке, действующей по квадратной площадке, решали в двойных тригонометрических рядах. Для определения усилий и изгибающих моментов в различных точках оболочки построены номограммы "усилие-изгибающий момент" для широкого диапазона изменения параметров оболочки и площадки нагружения.

Случай круглой площадки нагружения весьма малого размера рассмотрен В.П.Шевченко и Ю.А.Шевляковым [8].

Некоторые рекомендации по выбору подкрепляющих прямоугольных накладок в случае действия локальных нагрузок содержатся в работе В.М.Даревского [2]. Исследование этого вопроса теоретико-экспериментальным методом приведено в статье Ю.Г.Ко-

ноплева и А.В.Саченкова [9] .

В настоящей работе исследуется напряженное состояние круговой цилиндрической оболочки (R, δ - радиус срединной поверхности и толщина оболочки) с круглым упругим включением радиуса r_1 . На упругое включение толщины $\delta_1 \geq \delta$, рассматриваемое как элемент цилиндрической оболочки, действует нормальная поверхностная нагрузка $q = \frac{P}{\pi r_1^2}$. Оболочка и включение имеют общую срединную поверхность.

Поставим себе задачей определить номинальные напряжения в системе без учета концентрации напряжений, обусловленной резким изменением толщины в зоне сочленения оболочки с включением. Будем приближенно полагать, что выражения для усилий и перемещений упругого включения записываются у линии спая так же, как и вдали от нее. Это допущение не должно существенно сказываться на напряженном состоянии оболочки. Номинальные же напряжения по краю включения не будут превышать напряжений в оболочке.

Для решения задачи воспользуемся приближенным способом, предложенным Г.Н.Чернышевым [10], для чего выделим из цилиндрической оболочки круглую панель радиуса r_0 . Если радиус r_0 будет достаточно велик, то вблизи включения решение для панели с достаточной точностью будет совпадать с решением для оболочки.

При исследовании напряженного состояния панели и упругого включения используется известное [11] дифференциальное уравнение пологой цилиндрической оболочки относительно комплексной функции $F = w + i\phi$ (w - нормальное перемещение, ϕ - функция напряжений) .

Для панели решение уравнения представим в полярных координатах ρ, θ (начало координат совмещается с центром включения, угол θ отсчитывается от образующей) в виде двух следующих.

$$F^0(\rho, \theta) = F_1(\rho, \theta) + F_2(\rho, \theta),$$

$$F_1(\rho, \theta) = \sum_{j=0,2,\dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_j i^j [A_n H_n^{(1)}(z) + B_n J_n(z)] [J_{n-j}(z) + J_{(n+j)}(z)] \cos j\theta, \quad (1)$$

$$F_2(\rho, \theta) = -\frac{16i\omega^2 \lambda \Phi}{\pi E \alpha r_0} \sum_{j=0,2,\dots}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_j i^j \Phi_k(z) [J_{k-j}(z) + J_{k+j}(z)] \cos j\theta, \quad (2)$$

где $\ell_{\nu} = \frac{1}{2}$ при $\nu = 0$ и $\ell_{\nu} = 1$ при $\nu \neq 0$,

$$z = x\sqrt{2i}, \quad x = \omega\rho, \quad \rho = \frac{r}{r_0}, \quad \lambda = \frac{R}{\delta}, \quad \alpha = \frac{r_0}{R},$$

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \frac{r_0}{\sqrt{R\delta}}, \quad \mathcal{P}_{\kappa}(z) = \frac{\partial J_{\mu}(z)}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\kappa}.$$

A_n и B_n - комплексные постоянные.

Через $J_n(z)$ и $H_n^{(1)}(z)$ обозначены функция Бесселя первого ряда и первая функция Ганкеля.

Выражение (1) представляет собой [12] решение однородного уравнения пологой оболочки, соответствующее напряженному состоянию, симметричному относительно образующей к направляющей цилиндра, проходящих через начало координат. Выражение (2) является фундаментальным решением уравнения пологой цилиндрической оболочки [13], соответствующее нормальной сосредоточенной силе.

Для области упругого включения решение берется в виде суммы

$$\bar{F}(\rho, \theta) = F_3(\rho, \theta) + F_4(\rho, \theta),$$

$$F_3(\rho, \theta) = \sum_{\nu=0,2,\dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \ell_{\nu} i^{\nu} C_n J_n(z_1) [J_{n-\nu}(z_1) + J_{n+\nu}(z_1)] \cos \nu \theta, \quad (3)$$

$$F_4(\rho, \theta) = -\frac{4i\lambda_1 R}{E\pi r_0^2} \mathcal{P} x_1^2, \quad (4)$$

где $z_1 = x_1\sqrt{2i}$, $x_1 = \omega_1 \rho_1$, $\rho_1 = \frac{r_1}{r_0}$, $\lambda_1 = \frac{R}{\delta_1}$,

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \frac{r_1}{\sqrt{R\delta_1}}.$$

Выражение (3) представляет собой возрастающую часть решения (1). Выражение (4) является частным решением неоднородного дифференциального уравнения оболочки, соответствующим действию постоянной нормальной поверхностной нагрузки.

Граничные условия по линии спая включения с панелью при $r = r_1$ имеют вид:

$$w^{\circ} + v = \bar{w} + a, \quad u^{\circ} - \frac{1}{2} \alpha v (1 - \cos 2\theta) = \bar{u} - \frac{1}{2} \alpha a (1 - \cos 2\theta),$$

$$\frac{\partial w^0}{\partial \tau} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau}, \quad v^0 - \frac{1}{2} \alpha \beta \sin 2\theta = \bar{v} - \frac{1}{2} \alpha \beta \sin 2\theta,$$

$$M_p^0 = \bar{M}_p, \quad N_p^0 = \bar{N}_p, \quad T^0 = \bar{T}, \quad Q_p^0 = \bar{Q}_p^* \quad (5)$$

Здесь u , v - перемещения в срединной поверхности (u направлено по координате ρ); M_p , N_p и T - изгибающий момент, нормальные и касательные силы в сечении $\rho = \text{const}$; Q_p^* - перерезывающая сила в смысле Кирхгофа в этом же сечении; α и β - жесткое смещение включения и панели. Индексом "0" и чертой сверху обозначены величины, относящиеся к панели и включению соответственно.

Наружный контур панели предполагается либо шарнирно опертым, либо жестко защемленным. В случае шарнирного опирания граничные условия при $\tau = \tau_0$ запишутся в виде

$$M_p^0 = 0, \quad u^0 - \frac{1}{2} \alpha \beta (1 - \cos 2\theta) = 0,$$

$$w^0 + \beta = 0, \quad v^0 - \frac{1}{2} \alpha \beta \sin 2\theta = 0. \quad (6)$$

При жестком защемлении контура первое граничное условие системы (6) заменяется на

$$\frac{\partial w^0}{\partial \tau} = 0. \quad (7)$$

Ряды для усилий и перемещений срединной поверхности, соответствующие решению и фундаментальному решению, приведены в [12, 13].

Из граничных условий (5) и (6) вытекает система линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования. Ниже приведены некоторые результаты вычислений на ЭВМ БЭСМ-4 при значениях коэффициента Пуассона $\mu = 0,3$. На графиках напряжения отнесены к $\sigma_0 = \frac{P}{\delta^2}$, а перемещения к $\frac{C_0 R}{E}$.

В качестве иллюстрации на рис. 1 показано распределение изгибных σ_p^u , σ_θ^u и мембранных σ_p^c , σ_θ^c напряжений для шарнирно опертой гладкой панели ($\delta_1 = \delta$) при $\omega_0 = 0,8$ и $\omega = 4$. Параметр

$$\omega_0 = \frac{1}{2} \sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \frac{\tau_1}{\sqrt{R\delta}}$$

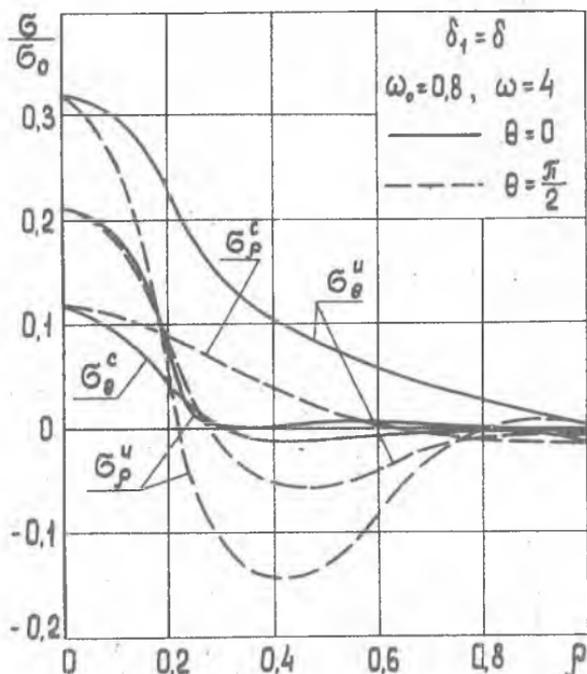


Рис. 1.

характеризует относительный размер площадки нагружения. Максимальных значений напряжения достигают в центре площадки нагружения. Влияние радиуса площадки нагружения на напряжения и перемещения в центре панели представлено для $\omega = 4$ на рис. 2. По мере уменьшения размеров площадки нагружения напряжения и перемещения в ее центре стремятся к предельному случаю — случаю нагружения панели сосредоточенной силой [14]. Результаты хорошо согласуются с данными В.М.Даревского [2], В.А.Сибирякова и Б.В.Нерубайло [6, 7], полученными для замкнутой цилиндрической оболочки с квадратной площадкой нагружения. Некоторые результаты указанных работ для σ_θ^u отмечены на графике кружочками. Влияние наружного радиуса панели на

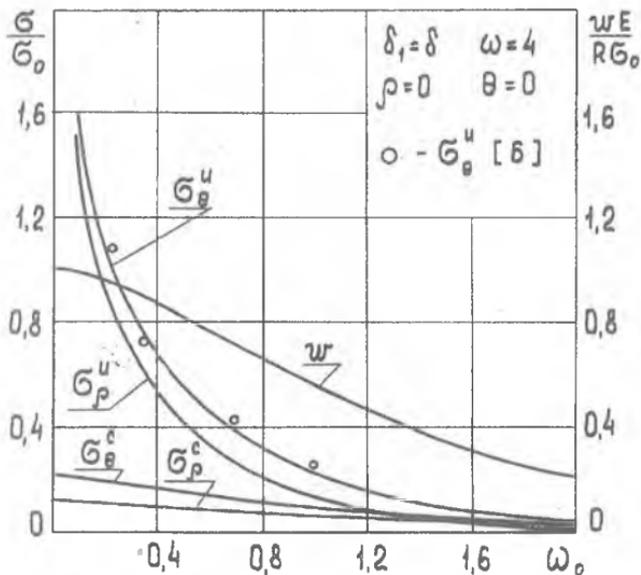


Рис. 2.

максимальные значения изгибных напряжений для различных размеров площадки нагружения показано на рис. 3. Сплошные линии соответствуют шарнирному опиранию, штриховые - жесткой заделке наружного контура. С ростом ω имеет место тенденция к стабилизации σ_{\max}^u . Характер закрепления контура панели влияет на величину максимальных напряжений незначительно.

Для случая $\delta_1 > \delta$ исследовалось напряженное состояние панели по линии спая с упругим включением. Для его оценки были подсчитаны эквивалентные напряжения σ_3 по теории прочности энергии формоизменения. Эквивалентные напряжения достигают максимума, как правило, при $\theta = \frac{\pi}{2}$ (если отношение δ_1/δ близко к единице, то максимум имеет место при $\theta = 0$). Из рис. 4 видно, что увеличение толщины упругого включения приводит к значительному росту σ_3^m . Однако, начиная с $\delta_1/\delta \approx 4$, дальнейший рост толщины включения практически не влияет на максимальные напряжения в панели. Приведенные

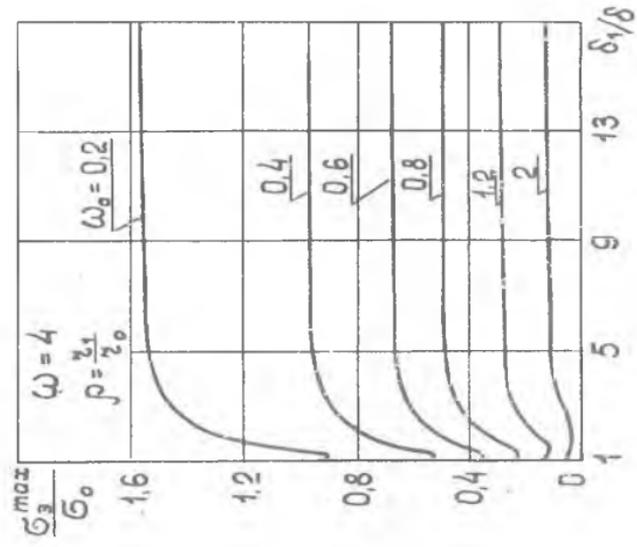


Рис. 4

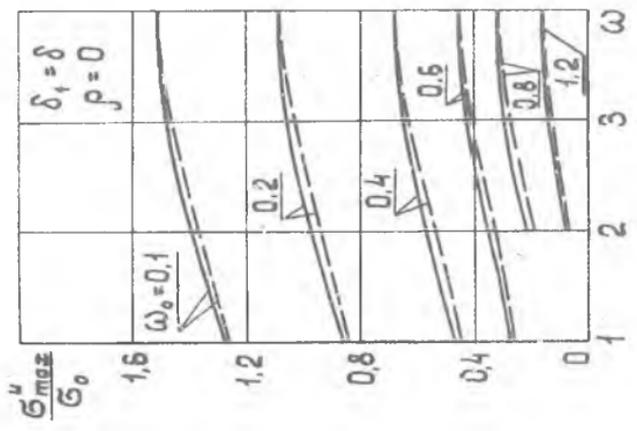


Рис. 3

графики качественно согласуются с выводами А.В.Саченкова и Ю.Г.Коноплева [9], полученными применительно к прямоугольному включению.

Для гладкой замкнутой цилиндрической оболочки, нагруженной по круглой площадке распределенными нормальными силами, были проведены экспериментальные исследования. Экспериментальная оболочка имела следующие размеры: $R = 224$ мм,

$\delta = 1,5$ мм. Длина оболочки равнялась 730 мм. По торцам к оболочке приваривались мощные опорные кольца. Нагружение осуществлялось через круглые металлические пуансоны, размер которых приведен в таблице I.

Таблица I.

№ п.п.	I	2	3	4
Диаметр пуансона 2 ^н ₁ [мм]	11,4	22,8	34,2	45,6
ω_0	0,2	0,4	0,6	0,8

Контактный торец пуансона был обработан по цилиндрической поверхности, радиус которой равнялся наружному радиусу оболочки. К этой поверхности приклеивался слой жесткой резины. Для замера деформаций использовались фольговые тензодатчики с базой 3 мм типа 2ФКПА-3-100ХВ. Розетки из двух взаимно перпендикулярных датчиков наклеивались в районе площадки нагружения вдоль образующей и направляющей оболочки. По замерным деформациям вычислялись напряжения.

На рис. 5 и 6 в качестве примера представлено распределение напряжений по наружной поверхности оболочки σ_r^H и σ_θ^H в районе площадки нагружения для $\omega_0 = 0,4$. Зависимость максимальных напряжений, имеющих место в центре площадки нагружения, от ее размеров показано на рис. 7. Сплошные линии на рис. 5 - 7 соответствуют расчетным значениям напряжений для круглой панели при $\omega = 4$. Сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными показывает их удовлетворительное совпадение.

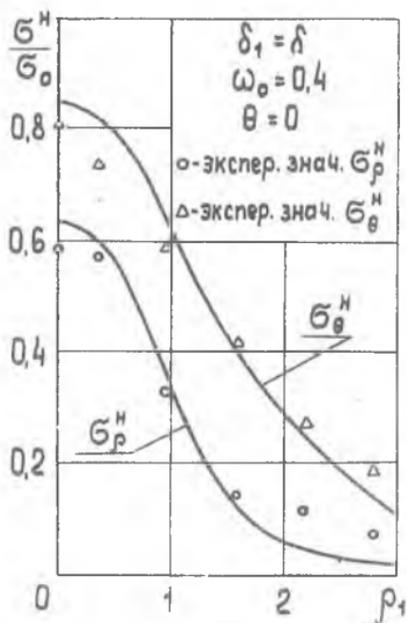


Рис. 5.

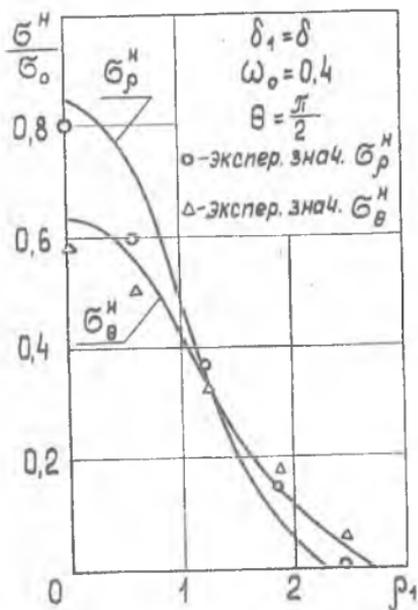


Рис. 6.

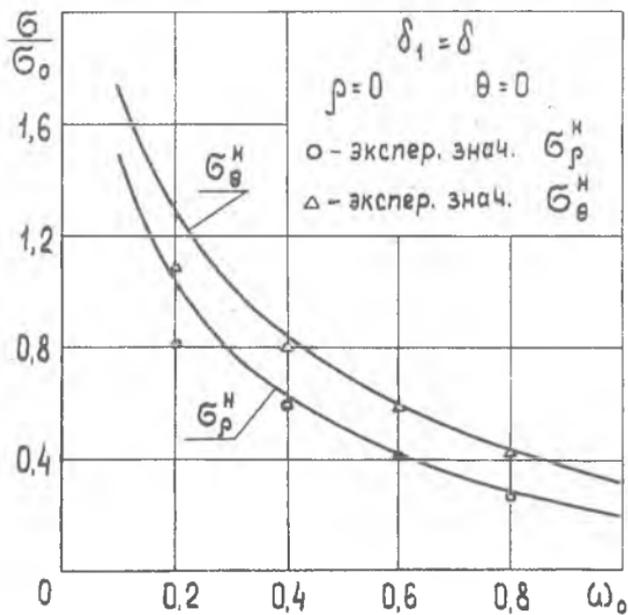


Рис. 7.

Таким образом, из сопоставления теоретических и экспериментальных результатов можно сделать вывод о правомочности приближенного подхода, предложенного Г.Н.Чернышевым [10], согласно которому расчет оболочки на локальную нагрузку заменялся нами расчетом вырезанной из нее круглой панели.

Л и т е р а т у р а

1. Даревский В.М. ПММ, т. 15, вып. 5, 1951.
2. Даревский В.М. В сб. "Прочность и динамика авиационных двигателей", вып. 1, 1964.
3. *Vijlaard P.P. Trans ASME, vol. 77, № 6, 1955.*
4. Жигалко Ю.П., Гурьянов Н.Г. В сб. "Исследования по теории пластин и оболочек", вып. 4., Казань, 1966.
5. Гурьянов Н.Г. Цилиндрическая оболочка, нагруженная на площадке, ограниченной линиями кривизны. В сб. "Исследование по теории пластин и оболочек", вып. 5, Казань, 1967.
6. Нерубайло Б.В., Сибиряков В.А. ИВУЗ "Авиационная техника" № 3, 1970.
7. Нерубайло Б.В., Сибиряков В.А. Труды МАИ, вып. 180, 1971.
8. Шевченко В.П., Шевляков Ю.А. В сб. "Гидроаэромеханика и теория упругости", вып. 6, 1967.
9. Коноплев Ю.Г., Саченков А.В. В сб. "Исследования по теории пластин и оболочек", вып. 4, Казань, 1966.
10. Чернышев Г.Н. О контактных задачах в теории оболочек. В сб. "Труды УП Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок". Наука, 1970.
11. Дурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек, М. ОГИЗ, 1947.
12. Хазанов Х.С. Труды КуАИ, вып. 29, 1967.
13. Леонов В.И., Хазанов Х.С. Фундаментальное решение уравнения пологой цилиндрической оболочки в полярных координатах. Труды КуАИ, вып. 63, 1972.
14. Леонов В.И., Хазанов Х.С. К расчету искривленных круглых пластин на нормальные сосредоточенные воздействия. Труды КуАИ, вып. 63, 1972.