

Л.И.Кудряшев, Е.Н.Рябинова

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Задача нестационарной теплопроводности при граничных условиях III рода в обобщенной форме описывается следующей системой:

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \nabla^2 \theta$$

$$Fo = 0, \quad \theta = \theta_0(x_1, x_2, x_3), \quad -\left(\frac{\partial \theta}{\partial n_i}\right)_w = Bi_i \theta_w \quad (I)$$

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}, \quad Fo = \frac{\lambda_0 \tau}{c_p \rho \ell^2}, \quad Bi_i = \frac{\alpha \ell}{\lambda_0}, \quad \ell = \frac{V}{F},$$

где T - текущая температура, T_∞ - температура окружающей среды; ρ - плотность, c_p - теплоемкость, λ - теплопроводность, x_1, x_2, x_3 - безразмерные координаты, τ - время, α - коэффициент теплообмена, V - объем тела, F - ограничивающая поверхность.

Рассмотрим применение метода Рунге к решению этой задачи для тела произвольной формы.

Полагая $\theta = f(x_1, x_2, x_3)\psi(Fo)$ подставляя в (I), получим

$$\frac{\psi'(Fo)}{\psi(Fo)} = \frac{\nabla^2 f(x_1, x_2, x_3)}{f(x_1, x_2, x_3)} = -\beta^2$$

Интегрируя первое уравнение этой системы, получаем

$$\psi(Fo) = C_0 \exp(-\beta^2 Fo).$$

Тогда решение задачи можно записать в виде

$$\theta = C_0 f(x_1, x_2, x_3) \exp(-\beta^2 F_0).$$

Функция $f(x_1, x_2, x_3)$ находится из интегрирования дифференциального уравнения

$$\nabla^2 f + \beta^2 f = 0 \quad (2)$$

при удовлетворении граничного условия

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_w = Bi f_w \quad (3)$$

Уравнению (2) при граничном условии (3) соответствует функционал [I]

$$J = \int_V [(\text{grad } f)^2 - \beta^2 f^2] dV + \int_F Bi f_w^2 dF, \quad (4)$$

из условия минимума которого отыскивается собственное число β^2 .

Постоянная C_0 находится из условия минимума функционала относительно начального условия

$$\delta \int_V \left\{ \theta_0(x_1, x_2, x_3) - C_0 f(x_1, x_2, x_3) \right\}^2 dV = 0. \quad (5)$$

Влияние формы тела на температурное поле учитывается наилучшим образом, если в основу выбора аппроксимирующей функции положить уравнение поверхности $F(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Для нашего случая аппроксимирующую функцию примем в виде

$$f = 1 - B(1 - F) \quad (6)$$

Коэффициент B будет определяться из граничного условия III рода, записанного в интегральной форме

$$-\int_V \nabla^2 f dV = \int_F Bi f_w dF. \quad (7)$$

Чтобы иметь возможность сопоставить приближенное решение с точным, рассмотрим применение данной методики к задаче о нестационарной теплопроводности в анизотропном параллелепипеде с размерами $2\ell_x$, $2\ell_y$, $2\ell_z$, оси которого совпадают с главными осями теплопроводности. Эта задача описывается системой

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \lambda_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} + \lambda_3 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2}$$

$$Fo = 0 \quad \theta_0 = 1$$

$$-\lambda_n \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_n} \right) = Bi_n \theta_w, \quad x_n = \pm 1 \quad (n = 1, 2, 3)$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_x}{\lambda_0}, \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_y}{\lambda_0}, \quad \lambda_3 = \frac{\lambda_z}{\lambda_0}, \quad \lambda_0 = \sqrt[3]{\lambda_{x,0} \lambda_{y,0} \lambda_{z,0}}$$

Величины, обозначенные индексом 0, отнесены к средней начальной температуре

$$\bar{T}_0 = \frac{1}{V} \int_V T_0 dV$$

Чтобы привести эту систему к виду (I), применяем преобразование координат [2]

$$X_n = \frac{x_n}{\sqrt{\lambda_n}} \quad (n = 1, 2, 3)$$

решение задачи ищем в виде

$$\theta = C_0 \left\{ 1 - B \left[1 - \prod_{n=1}^3 (1 - \lambda_n X_n^2) \right] \right\} \exp(-\beta^2 Fo) \quad (8)$$

Определяя β^2 , C_0 и B согласно (4), (5), (6), получим

$$\beta^2 = \left[\sum_{n=1}^3 Bi_n (1-B)^2 + \frac{256}{675} B^2 D_1 \right] D_2^{-1} \quad (9)$$

$$D_1 = \frac{\ell_y}{\ell_x} \lambda_1 + \frac{\ell_z}{\ell_y} \lambda_2 + \frac{\ell_x}{\ell_z} \lambda_3, \quad D_2 = 1 - \frac{38}{27} B + \frac{629}{1125} B^2$$

$$C_0 = \left(1 - \frac{19}{27} B \right) D_2^{-1}, \quad B = \sum_{n=1}^3 Bi_n \left(\sum_{n=1}^3 Bi_n + \frac{8}{9} D_1 \right)^{-1} \quad (10)$$

Если подставить (9) и (10) в (8), то получим решение задачи в окончательном виде.

Чтобы получить приближенное решение при граничных условиях I рода, необходимо положить $Bi \rightarrow \infty$. Это дает $B = 1$,

$$C = \frac{125}{64}, \quad \beta^2 = \frac{5}{2} D_1$$

В основу другого приближенного метода положено интегральное соотношение Л.С. Лейбензона

$$\frac{\partial}{\partial F_0} \int_V \theta dV = \int_F \left(\frac{\partial \theta}{\partial n} \right)_W dF,$$

которое с помощью граничного условия III рода преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial F_0} \int_V \theta dV = - \int_F B_i \theta_W dF \quad (II)$$

В данном случае решение задачи ищем в виде

$$\theta = C \cdot f(x_1, x_2, x_3),$$

где $f(x_1, x_2, x_3)$ определяется выражением (6).

Подставляя это решение в интегральное соотношение (II), получим дифференциальное уравнение относительно C , решение которого имеет вид

$$C = C_0 \psi(F_0),$$

где C_0 и B определяются из (5) и (7).

Для анизотропного параллелепипеда выражение (12) принимает вид

$$C = C_0 \exp \left[- \sum_{n=1}^3 B_i (1-B) \left(1 - \frac{19}{27} B \right)^{-1} F_0 \right],$$

где B и C_0 определяются формулами (10).

Для граничных условий I рода собственное число, полученное по методу Лейбенсона, равно $\beta^2 = 3D$.

Оценка точности методов Ритца и Лейбенсона проводилась сравнением с точным решением [3] по средней температуре

$$\bar{\theta} = \sqrt{\lambda_i} \int_0^{1/\sqrt{\lambda_i}} \theta dX$$

Расчеты проводились при различных B_i и λ_n .

На рис. 1-3 представлены зависимости $\bar{\theta} = f(F_0)$ при различных B_i . Точное решение изображено сплошной линией, решение методом Ритца - пунктиром и решение методом Лейбенсона - штрих-пунктирной линией.

На рис. 1 даны зависимости для изотропного параллелепипеда ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$); на рис. 2 - для $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0,25$; на рис. 3 - для $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 0,25$.

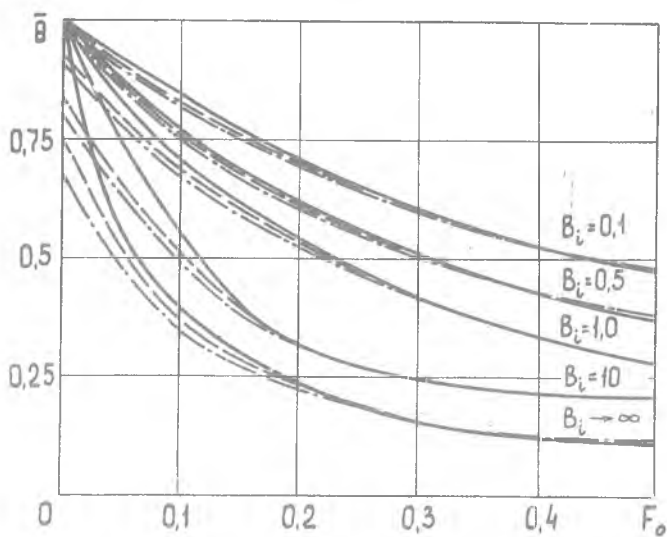


Рис. 1

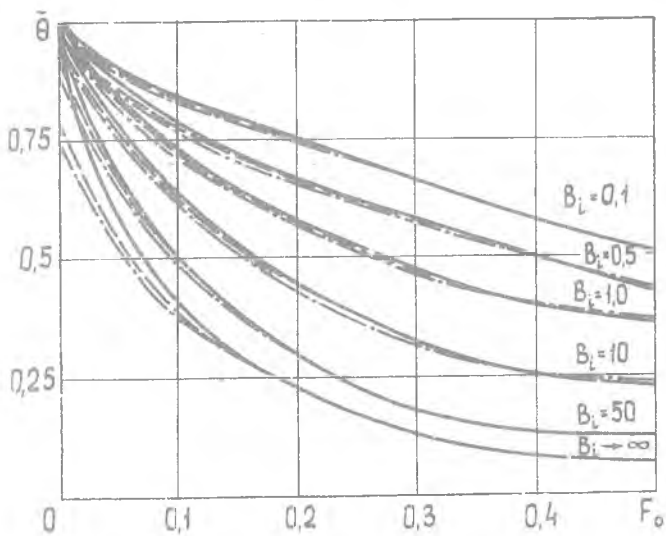


Рис. 2

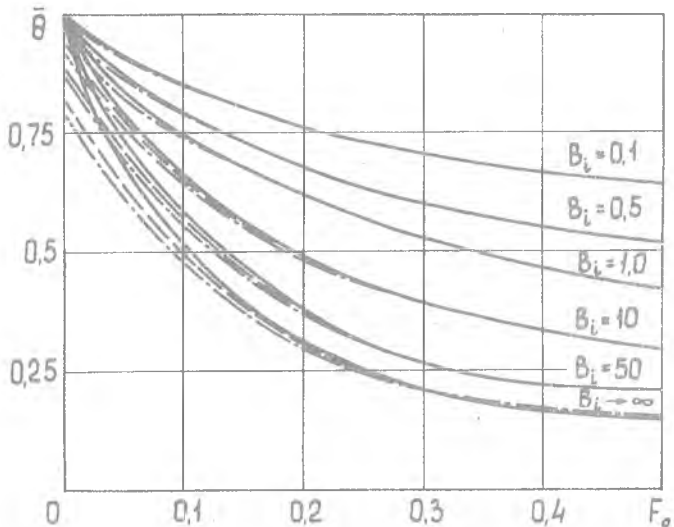


Рис. 3.

При небольших значениях $B_i(0,1; 0,5; 1)$ результаты почти совпадают. С увеличением B_i растет и разница в значениях $\bar{\theta}$. Видим, что метод Ритца дает более точный результат, чем Лейбенсона.

Л и т е р а т у р а

1. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. Издательство технико-теоретической литературы, 1950.
2. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ОНТИ, 1937.
3. Лыков А.В. Теория теплопроводности. Высшая школа, 1967.