КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С.П.КОРОЛЕВА
Труды, выпуск 63, 1972 г.

А.С.Макеев, Л.И.Жемков

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СЧЕТНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим счетную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}+\lambda_i^\alpha x_i=\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(t)x_j+\beta_i(t) \qquad (i=1,2,\dots) \qquad (\mathrm{I})$$

в предположении, что I) $\lambda_i^\alpha \geqslant b_i i^s$, где $\alpha \geqslant s > 1$ и $0 < b_i < \infty$;
2) $|x_i(0)| \leqslant \frac{A}{\lambda_i^\alpha}$, где $0 \leqslant A < \infty$; 3) при $t \geqslant 0$
$\sup\limits_i \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{\max\limits_t |a_{ij}(t)|}{\lambda_j^\alpha} = \sigma < 1$; 4) $a_{ij}(t),\ \beta_i(t) \in C[0,\infty)$,
причем $\sup\limits_i \max\limits_t |\beta_i(t)| \leqslant M$; 5) не уменьшая общности $1 \geqslant M \geqslant A(1-\sigma$

При сделанных допущениях путем замены переменных $x_i\ (i=1,2,\dots$ всегда можно добиться выполнения последнего неравенства.

Отметим, что к счетным системам типа (I) сводится решение краевых задач теплопроводности для сопряженных областей, когда решение ищется методом конечных интегральных преобразований.

Теорема. При выполнении условий I) – 5) существует единственное решение x_i ($i=1,2,\dots$) системы дифференциальных ура нений (I), причем

$$|x_i| \leqslant \frac{1}{(1-\sigma)\lambda_i^\alpha}.$$

Для доказательства рассмотрим замкнутое подпространство Y пространства Банаха $Y \subset L$, координаты точек которого $y=\{y_1,y_2,\dots,y_i,\dots\}$, где $y_i \in C[0,\infty)$, удовлетворяют условию

$$|y_i| \leqslant \frac{1}{(1-\sigma)\lambda_i^\alpha} \qquad (i=1,2,\dots).$$

В Y введем метрику

$$\rho(y'', y') = \sup_i (\max_t |y''_i - y'_i| \lambda_i^\alpha).$$

Нетрудно показать, что I) в пространстве Y выполняются все аксиомы метрики;2) пространство Y - совершенное множество;3) пространство Y - полное.

Заменим систему дифференциальных уравнений (I) системой интегральных уравнений [I]

$$x_i = \exp(-\lambda_i^\alpha t)\left\{\int_0^t \left[\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(t) x_j + \beta_i(t)\right]\exp(\lambda_i^\alpha t)\,dt + x_i(0)\right\}$$

и рассмотрим соответствующее им функциональное преобразование

$$z = Ay\,.$$

Покажем, что оператор A переводит каждый элемент $y \in Y$ в элемент того же пространства.

В самом деле, для любого $y \in Y$ имеем

$$|z_i| \le \exp(-\lambda_i^\alpha t)\left\{\int_0^t \left[\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}||y_i| + |\beta_i(t)|\right]\exp(\lambda_i^\alpha t)\,dt + |y_i(0)|\right\} \le$$

$$\le \exp(-\lambda_i^\alpha t)\left[\left(\frac{1}{1-\sigma} + 1\right)\int_0^t \exp(\lambda_i^\alpha t)\,dt + |y_i(0)|\right] =$$

$$= \frac{1}{(1-\sigma)\lambda_i^\alpha} - \frac{1}{1-\sigma}\left[\frac{1}{\lambda_i^\alpha} - (1-\sigma)|y_i(0)|\right]\exp(-\lambda_i^\alpha t) \le \frac{1}{(1-\sigma)\lambda_i^\alpha}$$

Таким образом, оператор A отображает пространство Y само на себя.

Оценим расстояние между элементами z'', $z' \in Y$:

$$\rho(Ay'', Ay') = \sup_i (\max_t |z''_i - z'_i| \lambda_i^\alpha) \le$$

$$\le \sup_i \left[\lambda_i^\alpha \max_t \exp(-\lambda_i^\alpha t)\int_0^t \exp(\lambda_i^\alpha t) \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}||y''_j - y'_j|\,dt\right] \le$$

$$\le \sigma \rho(y'', y') \sup_i \max_t \left[1 - \exp(-\lambda_i^\alpha t)\right] \le \sigma \rho(y'', y')$$

Следовательно, выполнены все условия применимости принципа сжатых отображений [2] , что и доказывает теорему.

Выясним сходимость решения "укороченной" системы уравнений

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt}+\lambda_i^{\alpha}\bar{x}_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)\bar{x}_j+\beta_i(t) \qquad (i=1,2,\ldots,n), \qquad (2)$$

полученной из исходной, если положить в ней равными нулю все искомые функции и $\beta_i(t)$, начиная с $n+1$, к решению исходной системы (I).

Аналогично предыдущему можно показать, что существует единственное решение $\bar{x}_i$ (i =I,2,..., n) системы (2) в пространстве Y_n , причем

$$|\bar{x}_i|\le\frac{1}{(1-\sigma_n)\lambda_i^{\alpha}} \quad (i=1,2,\ldots,n),$$

где

$$\sigma_n=\sup_i\sum_{j=1}^{n}\frac{\max_t|a_{ij}(t)|}{\lambda_j^{\alpha}}\le\sigma \qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Вычитая из уравнений системы (I) соответствующие уравнения системы (2) и вводя обозначение

$$\varepsilon_n=\sup_i\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{\max_t|a_{ij}(t)|}{\lambda_j^{\alpha}} \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

получим следующую оценку разности решений для i =I,2..., n :

$$|x_i-\bar{x}_i|\le\exp(-\lambda_i^{\alpha}t)\int_0^t\Big(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j-\bar{x}_j|+\sum_{j=n+1}^{\infty}|a_{ij}||x_j|\Big)\exp(\lambda_i^{\alpha}t)\,dt\le$$

$$\le\exp(-\lambda_i^{\alpha}t)\int_0^t\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j-\bar{x}_j|\exp(\lambda_i^{\alpha}t)\,dt+\frac{\varepsilon_n}{\lambda_i^{\alpha}}\le$$

$$\le\frac{\varepsilon_n}{\lambda_i^{\alpha}(1-\sigma_n)}\le\frac{\varepsilon_n}{\lambda_i^{\alpha}(1-\sigma)}.$$

Так как $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$, то из этой оценки следует сходимость решения $\bar{x}_i$(i =I,2,..., n) "укороченной" системы уравнений (2) к решению x_i(i =I,2,...,) исходной системы (I) при $n\to\infty$.

Л и т е р а т у р а

I. Тихонов А.И. Мат.сборник, 4I, №4, стр.55I-560, I934.

2. Люстерник Л.А.,Соболев В.И. Элементы функционального анализа. Изд. "Наука", М, I965.