КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им.С.П.КОРОЛЕВА

Труды, выпуск 63, 1972 г.

Л.И.Жемков, А.С.Макеев

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕРМОКОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СОСТАВНОГО ТЕЛА Т – ОБРАЗНОГО СЕЧЕНИЯ

Принятые обозначения

L – характерный размер тела; ℓ, δ_1, δ_2 – безразмерные размеры тела; x, y – безразмерные координаты; $\lambda_{1,2}$ – коэффициенты теплопроводности; α_{1-3} – коэффициенты теплоотдачи; $a_{1,2}$ – коэффициенты температуропроводности; R – термическое сопротивление; $Bi_{1-3} = \frac{\alpha_{1-3} L}{\lambda_{1,2}}$, $Bi_{4,5} = \frac{L}{R\lambda_{1,2}}$ – числа Био; $F_o = \frac{\tau a}{L^2}$ – число Фурье; a – характерный коэффициент температуропроводности; $\varkappa_{1,2} = \frac{a}{a_{1,2}}$.

Важной проблемной задачей последнего времени является разработка методов расчета полей температур в составных телах с учетом термических сопротивлений сопрягаемых поверхностей.

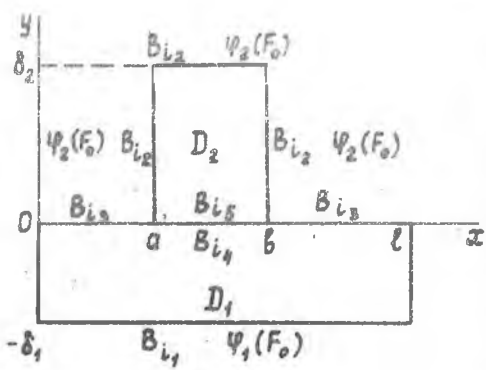

Рис.I

В связи с этим значительный практический интерес представляет следующая нестационарная термоконтактная задача. Для двух сопряженных областей $D_1\{x\in[0,\ell],\ y\in[-\delta_1,0]\}$ и $D_2\{x\in[a,b],\ 0\le a<b\le\ell,\ y\in[0,\delta_2]\}$, изображенных на рис.I, требуется найти решение системы уравнений

$$\varkappa_K \frac{\partial \theta_K}{\partial F_o} = \frac{\partial^2 \theta_K}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_K}{\partial y^2} \qquad (K = 1,2) \qquad (1)$$

при граничных условиях

$$\frac{\partial \theta_1(0,y,F_o)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \theta_1(\ell,y,F_o)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \theta_2(a,y,F_o)}{\partial x} = B_{i_2}[\theta_2(a,y,F_o) - \varphi_2(F_o)]$$

$$\frac{\partial \theta_2(b,y,F_o)}{\partial x} = B_{i_2}[\varphi_2(F_o) - \theta_2(b,y,F_o)], \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \theta_1(x,-\delta_1,F_o)}{\partial y} = B_{i_1}[\theta_1(x,-\delta_1,F_o) - \varphi_1(F_o)]$$

$$\frac{\partial \theta_1(x,0,F_o)}{\partial y} = \begin{cases} B_{i_3}[\varphi_2(F_o) - \theta_1(x,0,F_o)] \\ \qquad x \in [0,a],\ [b,\ell] \\ B_{i_4}[\theta_2(x,0,F_o) - \theta_1(x,0,F_o)] \\ \qquad x \in [a,b] \end{cases}$$

$$\frac{\partial \theta_2(x,0,F_o)}{\partial y} = B_{i_5}[\theta_2(x,0,F_o) - \theta_1(x,0,F_o)]$$

$$\frac{\partial \theta_2(x,\delta_2,F_o)}{\partial y} = B_{i_2}[\varphi_2(F_o) - \theta_2(x,\delta_2,F_o)] \qquad (3)$$

и начальных условиях

$$\theta_1(x,y,0) = \psi_1(x,y) \qquad (x,y \in D_1)$$

$$\theta_2(x,y,0) = \psi_2(x,y) \qquad (x,y \in D_2) \qquad (4)$$

Решение поставленной задачи будем искать методом конечных интегральных преобразований [1] .

Применим к (1) - (4) интегральные преобразования искомых функций $\theta_1(x,y,F_o)$, $\theta_2(x,y,F_o)$ по переменной x вида

$$X_1(\gamma_{1i}, y, F_o) = \int_0^{\ell} \theta_1(x, y, F_o) K_1(x, \gamma_{1i}) dx$$

$$X_2(\gamma_{2i}, y, F_o) = \int_a^{b} \theta_2(x, y, F_o) K_2(x, \gamma_{2i}) dx$$

с ядрами преобразований

$$K_1(x, \gamma_{1i}) = \cos \gamma_{1i} x$$

$$K_2(x, \gamma_{2i}) = \cos \gamma_{2i}(x-a) + \frac{B_{i_2}}{\gamma_{2i}} \sin \gamma_{2i}(x-a). \qquad (5)$$

Собственные числа γ_{1i}, γ_{2i} (i = I,2,...) определяются характеристическими уравнениями

$$\gamma_{1i} = \frac{\pi(i-1)}{\ell}, \qquad tg\, \gamma_2(b-a) = \frac{2\gamma_2 B_{i_2}}{\gamma_2^2 - B_{i_2}^2}.$$

В результате преобразованные уравнения (I) при трансформированных граничных и начальных условиях типа (3) и (4) будут иметь вид

$$\varkappa_1 \frac{\partial X_{1i}}{\partial F_o} + \gamma_{1i}^2 X_{1i} = \frac{\partial^2 X_{1i}}{\partial y^2}$$

$$\varkappa_2 \frac{\partial X_{2i}}{\partial F_o} + \gamma_{2i}^2 X_{2i} = \frac{\partial^2 X_{2i}}{\partial y^2} + B_{i_2}[1 + K_{2i}(b)]\varphi_2(F_o). \qquad (6)$$

Подвергнем (6) интегральным преобразованиям по переменной y

$$T_1(\gamma_{1i}, \nu_{1j}, F_o) = \int_{-\delta_1}^{0} X_1(\gamma_{1i}, y, F_o) P_1(y, \nu_{1j}) dy$$

$$T_2(\gamma_{2i}, \nu_{2j}, F_o) = \int_0^{\delta_2} X_2(\gamma_{2i}, y, F_o) P_2(y, \nu_{2j}) dy$$

с собственными числами, определяемыми характеристическими уравнениями [2,3]

$$tg\, \nu_1 \delta_1 = \frac{B_{i_1}}{\nu_1}, \qquad tg\, \nu_2 \delta_2 = \frac{\nu_2(B_{i_2} + B_{i_5})}{\nu_2^2 - B_{i_2} B_{i_5}},$$

и собственными функциями

$$P_1(y, \nu_{1j}) = \cos \nu_{1j} y$$

$$P_2(y,\nu_{2j}) = \cos\nu_{2j}y + \frac{B_{i5}}{\nu_{2j}}\sin\nu_{2j}y. \qquad (7)$$

Для этого представим искомые функции $\theta_1(x,y,F_o)$, $\theta_2(x,y,F_o)$ в областях D_1, D_2 в форме двойных рядов по собственным функциям (5) и (7)

$$\theta_1(x,y,F_o) = \sum_{ij=1}^{\infty}\frac{T_{1ij}(F_o)}{C_{1i}C_{1j}}K_{1i}(x)P_{1j}(y) = \sum_{mn=1}^{\infty}\frac{T_{1mn}(F_o)}{C_{1m}C_{1n}}K_{1m}(x)P_{1n}(y)$$

$$\theta_2(x,y,F_o) = \sum_{ij=1}^{\infty}\frac{T_{2ij}(F_o)}{C_{2i}C_{2j}}K_{2i}(x)P_{2j}(y) = \sum_{mn=1}^{\infty}\frac{T_{2mn}(F_o)}{C_{2m}C_{2n}}K_{2m}(x)P_{2n}(y), \qquad (8)$$

$$C_{1i} = \begin{cases}\ell, & i=1\\ \frac{\ell}{2}, & i=2,3,\dots\end{cases}, \qquad C_{1j} = \frac{\delta_1}{2} + \frac{\sin 2\nu_{1j}\delta_1}{4\nu_{1j}}$$

$$C_{2i} = \frac{b-a}{2}\left(1+\frac{B_{i2}^2}{\gamma_{2i}^2}\right) + \frac{\sin 2\gamma_{2i}(b-a)}{4\gamma_{2i}}\left(1-\frac{B_{i2}^2}{\gamma_{2i}^2}\right) + \frac{B_{i2}}{\gamma_{2i}^2}\sin^2\gamma_{2i}(b-a)$$

$$C_{2j} = \frac{\delta_2}{2}\left(1+\frac{B_{i5}^2}{\nu_{2j}^2}\right) + \frac{\sin 2\nu_{2j}\delta_2}{4\nu_{2j}}\left(1-\frac{B_{i5}^2}{\nu_{2j}^2}\right) + \frac{B_{i5}}{\nu_{2j}^2}\sin^2\nu_{2j}\delta_2$$

и запишем трансформированные после преобразования по x условия (3) и (4)

$$\frac{\partial X_{1i}(-\delta_1,F_o)}{\partial y} = B_{i1}\left[X_{1i}(-\delta_1,F_o) - E_i(F_o)\right]$$

$$\frac{\partial X_{1i}(0,F_o)}{\partial y} = B_{i3}F_i(F_o) - \sum_{mn=1}^{\infty}\frac{T_{1mn}(F_o)}{C_{1m}C_{1n}}M_{mi} + \sum_{mn=1}^{\infty}\frac{T_{2mn}(F_o)}{C_{2m}C_{2n}}N_{mi}$$

$$\frac{\partial X_{2i}(0,F_o)}{\partial y} = B_{i5}X_{2i}(0,F_o) - \sum_{mn=1}^{\infty}\frac{T_{1mn}(F_o)}{C_{1m}C_{1n}}D_{mi}$$

$$\frac{\partial X_{2i}(\delta_2,F_o)}{\partial y} = B_{i2}\left[G_i(F_o) - X_{2i}(\delta_2,F_o)\right]$$

$$\bar{\Psi}_{1i}(y) = \int_0^{\ell}\psi_1(x,y)K_{1i}(x)dx, \qquad \bar{\Psi}_{2i}(y) = \int_a^{b}\psi_2(x,y)K_{2i}(x)dx$$

$$E_i(F_o) = \varphi_1(F_o)\int_0^{\ell}K_{1i}(x)dx, \qquad G_i(F_o) = \varphi_2(F_o)\int_a^{b}K_{2i}(x)dx$$

$$F_i(F_o) = \varphi_2(F_o)\left[\int_0^{a}K_{1i}(x)dx + \int_b^{\ell}K_{1i}(x)dx\right]$$

$$M_{mi} = B_{i3}\int_0^a K_{1m}(x)K_{1i}(x)dx + B_{i4}\int_a^b K_{1m}(x)K_{1i}(x)dx +$$
$$+ B_{i3}\int_b^l K_{1m}(x)K_{1i}(x)dx$$

$$N_{mi} = B_{i4}\int_a^b K_{2m}(x)K_{1i}(x)dx, \quad D_{mi} = B_{i5}\int_a^b K_{1m}(x)K_{2i}(x)dx.$$

Преобразования по y для (6) будут иметь вид

$$\varkappa_1 \frac{dT_{1ij}}{dF_o} + (\gamma_{1i}^2 + \nu_{1j}^2)T_{1ij} = B_{i1}P_{1j}(-\delta_1)E_i +$$
$$+ B_{i3}F_i - \sum_{mn=1}^{\infty}\frac{T_{1mn}}{C_{1m}C_{1n}}M_{mi} + \sum_{mn=1}^{\infty}\frac{T_{2mn}}{C_{2m}C_{2n}}N_{mi}$$
$$\varkappa_2 \frac{dT_{2ij}}{dF_o} + (\gamma_{2i}^2 + \nu_{2j}^2)T_{2ij} = B_{i2}[1 + K_{2i}(b)]A_i +$$
$$+ B_{i2}P_{2j}(\delta_2)G_i + \sum_{mn=1}^{\infty}\frac{T_{1mn}}{C_{1m}C_{1n}}D_{mi}, \qquad (9)$$

где

$$A_i(F_o) = \Psi_2(F_o)\int_0^{\delta_2} P_{2j}(y)dy,$$

при начальных условиях

$$T_{1ij}(0) = \int_{-\delta_1}^0 \bar{\varphi}_{1i}(y)P_{1j}(y)dy, \quad T_{2ij}(0) = \int_0^{\delta_2} \bar{\varphi}_{2i}(y)P_{2j}(y)dy.$$

Применяя к счетной системе дифференциальных уравнений (9) преобразование Лапласа и обозначая

$$\bar{T}_{1ij} = \int_0^{\infty} T_{1ij}(F_o)\exp(-pF_o)dF_o, \quad \bar{T}_{2ij} = \int_0^{\infty} T_{2ij}(F_o)\exp(-pF_o)dF_o$$

$$a_{mni} = \frac{M_{mi}}{C_{1m}C_{1n}}, \quad b_{mni} = -\frac{N_{mi}}{C_{2m}C_{2n}}, \quad d_{mni} = -\frac{D_{mi}}{C_{1m}C_{1n}}$$

$$\beta_{ij} = \int_0^{\infty}\{B_{i2}[1 + K_{2i}(b)]A_i(F_o) + B_{i2}P_{2j}(\delta_2)G_i(F_o)\}\exp(-pF_o)dF_o +$$
$$+ \varkappa_2 T_{2ij}(0)$$

$$\alpha_{ij} = \int_0^{\infty}[B_{i1}P_{1j}(-\delta_1)E_i(F_o) + B_{i3}F_i(F_o)]\exp(-pF_o)dF_o + \varkappa_1 T_{1ij}(0),$$

получим счетную систему алгебраических уравнений

$$(\varkappa_1 p + \gamma_{1i}^2 + \nu_{1j}^2)\bar{T}_{1ij} + \sum_{mn=1}^{\infty} a_{mni}\bar{T}_{1mn} + \sum_{mn=1}^{\infty} b_{mni}\bar{T}_{2mn} = \alpha_{ij}$$

$$(\ae_2 p+\gamma_{2i}^2+\nu_{2j}^2)\bar{T}_{2ij}+\sum_{mn=1}^{\infty} d_{mni}\bar{T}_{1mn}=\beta_{ij}.$$

Эта система дает решение поставленной задачи в форме (8).

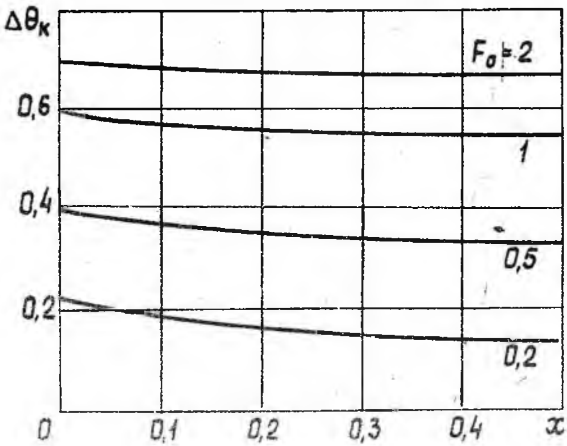

Рис.2

Предлагаемым методом нами был проведен расчет температурного поля составной области прямоугольной формы при следующих данных: $a = 0$, $b = \ell = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = 1$, $\ae_1 = \ae_2 = 1$, $Bi_1 = 0{,}1$, $Bi_2 = 0{,}5$, $Bi_4 = Bi_5 = 0{,}1$, $\varphi_1(F_o) = 0$, $\varphi_2(F_o) = 1$, $\psi_1(x,y) = 0$, $\psi_2(x,y) = 0$. На рис.2 представлена расчетная зависимость скачка температур $\Delta\theta_k = \theta_2(x,0,F_o) - \theta_1(x,0,F_o)$ в контактной плоскости от координаты для ряда значений F_o.

Литература

1. Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, М, 1948.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. "Высшая школа", М, 1967.
3. Михайлов М.Д. Нестационарные температурные поля в оболочках. "Энергия", М, 1967.