

В.А.Вьшаник, А.И.Минаков .

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ СВОБОДНЫХ БАЛОК
НА АНАЛОГОВЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИНАХ

При решении многих задач, связанных с исследованием динамики конструкций, возникает необходимость в моделировании изгибных колебаний свободных (незакрепленных) балочных систем. В принципе эти задачи могут быть решены как на цифровых (ЦВМ), так и на аналоговых вычислительных машинах (АВМ). Однако применение последних в ряде случаев оказывается предпочтительнее, так как это позволяет свести время решения задачи к минимуму, решать задачи в статистической постановке, а также проводить гибридное моделирование, сопрягая АВМ с реальной аппаратурой. Существует несколько методов решения уравнений изгибных колебаний балок на универсальных АВМ. Всесторонний анализ этих методов показывает, что наиболее целесообразным является метод конечного элемента, который в последнее время широко применяется при исследовании динамики конструкций на ЦВМ.

Рассмотрим участок балки, в пределах которого эпюры масс и жесткостей можно считать практически постоянными (рис. 1). Уравнение изгибных колебаний этого участка без учета трения имеет вид [1]

$$EJ_i \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + m_i \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где EJ_i , m_i - изгибная жесткость и погонная масса участка;
 $u(x,t)$ - поперечное перемещение.

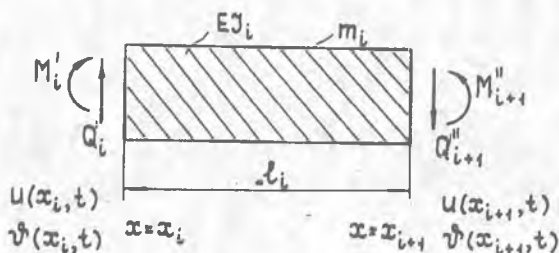
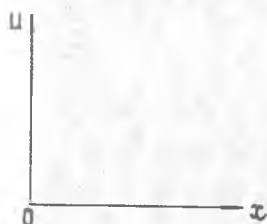


Рис. I.

Для левого конца участка с координатой $x = x_i$ имеют место следующие граничные условия:

$$EJ_i \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} = -Q'_i(t), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \psi'_i(t)$$

$$EJ_i \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = M'_i(t), \quad u(x, t) = u_i(t). \quad (2)$$

Для правого конца участка с координатой $x = x_{i+1}$ аналогично запишем

$$EJ_i \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} = -Q''_{i+1}(t), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \psi''_{i+1}(t)$$

$$EJ_i \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = M''_{i+1}(t), \quad u(x, t) = u_{i+1}(t). \quad (3)$$

Введем нормированную координату

$$\bar{x} = (x - x_i) / l_i \quad \text{где} \quad 0 \leq \bar{x} \leq 1.$$

Тогда (I) можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial t^2} = -\alpha_i \frac{\partial^4 u(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}^4}, \quad (4)$$

где

$$\alpha_i = \frac{EJ_i}{m_i l_i^4}.$$

Последовательное интегрирование уравнения (4) по \bar{x} дает

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} d\bar{x} = -\bar{Q}'_i + \bar{Q}''_{i+1}$$

$$\int_0^1 \int_0^{\bar{x}} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} d\bar{x}^2 = \bar{M}'_i - \bar{M}''_{i+1} - \bar{Q}'_i$$

$$\int_0^1 \int_0^{\bar{x}} \int_0^{\bar{x}} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} d\bar{x}^3 = \alpha_i (\bar{v}^h_i - \bar{v}^h_{i+1}) + \bar{M}'_i - \frac{1}{2} \bar{Q}'_i$$

$$\int_0^1 \int_0^{\bar{x}} \int_0^{\bar{x}} \int_0^{\bar{x}} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} d\bar{x}^4 = \alpha_i (u_i - u_{i+1}) + \alpha_i \bar{v}^h_i + \frac{1}{2} \bar{M}'_i - \frac{1}{6} \bar{Q}'_i \quad (5)$$

В этом уравнении

$$\bar{Q} = \frac{Q}{m_i l_i}, \quad \bar{M} = \frac{M}{m_i l_i^2}, \quad \bar{v}^h = v^h \cdot l_i.$$

Будем искать решение уравнения (4) в виде

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \ddot{S}_{01}(t) f_{01}(\bar{x}) + \ddot{S}_{02}(t) f_{02}(\bar{x}) + \ddot{S}_i(t) f_i(\bar{x}) + \ddot{S}_2(t) f_2(\bar{x}), \quad (6)$$

где $f_{01}(\bar{x})$ и $f_{02}(\bar{x})$ - формы колебаний по первому и второму нулевым тонам; $S_{01}(t)$, $S_{02}(t)$ - обобщенные координаты по нулевым тонам колебаний; $f_i(\bar{x})$ - форма i -го тона колебаний; $S_i(t)$ - обобщенная координата по i -му тону колебаний.

На основании (6) имеем:

$$\ddot{u}_i = 1 \cdot \ddot{S}_{01} + 0 \cdot \ddot{S}_{02} + 1 \cdot \ddot{S}_1 + 1 \cdot \ddot{S}_2$$

$$\ddot{v}^h_i = 0 \cdot \ddot{S}_{01} + 1 \cdot \ddot{S}_{02} + f'_1(0) \ddot{S}_1 + f'_2(0) \ddot{S}_2$$

$$\ddot{u}_{i+1} = 1 \cdot \ddot{S}_{01} + 1 \cdot \ddot{S}_{02} + 1 \cdot \ddot{S}_1 - 1 \cdot \ddot{S}_2$$

$$\ddot{v}^h_{i+1} = 0 \cdot \ddot{S}_{01} + 1 \cdot \ddot{S}_{02} - f'_1(0) + f'_2(0). \quad (7)$$

Подставляя последовательно (7) в (6), а затем в (5) и принимая $f_{01}(\bar{x}) = 1$, $f_{02}(\bar{x}) = \bar{x}$, получим, выбрав в качестве $f_1(\bar{x})$ и $f_2(\bar{x})$ формы колебаний свободной призматической балки [2], уравнения колебаний концов конечного элемента

$$m_i l_i b_{11} \ddot{u}_i + m_i l_i^2 b_{12} \ddot{v}^h_i + m_i l_i b_{13} \ddot{u}_{i+1} + m_i l_i^2 b_{14} \ddot{v}^h_{i+1} - \frac{EJ_i}{l_i^2} (c_{13} + c_{14}) v^h_i + \frac{EJ_i}{l_i^2} c_{13} v^h_{i+1} - \frac{EJ_i}{l_i^2} c_{14} (u_i - u_{i+1}) = Q'_i, \quad (8)$$

$$m_i l_i^2 b_{21} \ddot{u}_i + m_i l_i^3 b_{22} \ddot{v}_i + m_i l_i^2 b_{23} \ddot{u}_{i+1} + m_i l_i^3 b_{24} \ddot{v}_{i+1} - \\ - \frac{EJ_i}{l_i} (c_{23} + c_{24}) v_i + \frac{EJ_i}{l_i} c_{23} v_{i+1} - \frac{EJ_i}{l_i^2} c_{24} (u_i - u_{i+1}) = M'_i, \quad (9)$$

$$m_i l_i b_{31} \ddot{u}_i + m_i l_i^2 b_{32} \ddot{v}_i + m_i l_i b_{33} \ddot{u}_{i+1} + m_i l_i^2 b_{34} \ddot{v}_{i+1} - \\ - \frac{EJ_i}{l_i^2} (c_{33} + c_{34}) v_i + \frac{EJ_i}{l_i^2} c_{33} v_{i+1} - \frac{EJ_i}{l_i^2} c_{34} (u_i - u_{i+1}) = Q''_{i+1}, \quad (10)$$

$$m_i l_i^2 b_{41} \ddot{u}_i + m_i l_i^3 b_{42} \ddot{v}_i + m_i l_i^2 b_{43} \ddot{u}_{i+1} + m_i l_i^3 b_{44} \ddot{v}_{i+1} - \\ - \frac{EJ_i}{l_i} (c_{43} + c_{44}) + \frac{EJ_i}{l_i} c_{43} v_{i+1} - \frac{EJ_i}{l_i^2} c_{44} (u_i - u_{i+1}) = M''_{i+1}. \quad (11)$$

В этих уравнениях b_{ij} и c_{ij} - некоторые числа.

Для правого конца ($i = I$) -го конечного элемента можно аналогично (10), (11) записать:

$$m_{i-1} l_{i-1} b_{31} \ddot{u}_{i-1} + m_{i-1} l_{i-1}^2 b_{32} \ddot{v}_{i-1} + m_{i-1} l_{i-1} b_{33} \ddot{u}_i + m_{i-1} l_{i-1}^2 b_{34} \ddot{v}_i - \\ - \frac{EJ_{i-1}}{l_{i-1}^2} (c_{33} + c_{34}) v_{i-1} + \frac{EJ_{i-1}}{l_{i-1}^2} c_{33} v_i - \frac{EJ_{i-1}}{l_{i-1}^2} c_{34} (u_{i-1} - u_i) = Q''_i, \quad (12)$$

$$m_{i-1} l_{i-1}^2 b_{41} \ddot{u}_{i-1} + m_{i-1} l_{i-1}^3 b_{42} \ddot{v}_{i-1} + m_{i-1} l_{i-1}^2 b_{43} \ddot{u}_i + m_{i-1} l_{i-1}^3 b_{44} \ddot{v}_i - \\ - \frac{EJ_{i-1}}{l_{i-1}} (c_{43} + c_{44}) v_{i-1} + \frac{EJ_{i-1}}{l_{i-1}} c_{43} v_i - \frac{EJ_{i-1}}{l_{i-1}^2} c_{44} (u_{i-1} - u_i) = M''_i. \quad (13)$$

Подставим в уравнения (8), (9), (12), (13) числовые значения коэффициентов. Учитывая, что $Q'_i = Q''_i$ и $M'_i = M''_i$, имеем, вычитая (12) из (8) и (13) из (9):

$$\ddot{u}_i = g_1 \ddot{v}_1 - g_2 \ddot{u}_{i-1} - g_3 \ddot{u}_{i+1} - g_4 \ddot{v}_{i-1} + g_5 \ddot{v}_{i+1} + g_6 EJ_{i-1} \left[\frac{2}{l_{i-1}} (u_{i-1} - u_i) + \right. \\ \left. + v_i + v_{i-1} \right] + g_7 EJ_i \left[\frac{2}{l_i} (u_i - u_{i+1}) + v_i + v_{i+1} \right], \quad (14)$$

$$\ddot{v}_i = h_1 \ddot{u}_i + h_2 \ddot{v}_{i-1} + h_3 \ddot{v}_{i+1} + h_4 \ddot{u}_{i-1} - h_5 \ddot{u}_{i+1} - h_6 EJ_{i-1} \left[2v_i - v_{i-1} + \right. \\ \left. + \frac{3}{l_{i-1}} (u_{i-1} - u_i) \right] - h_7 EJ_i \left[2v_i + v_{i+1} + \frac{3}{l_i} (u_i - u_{i+1}) \right], \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 g_1 &= 0,187 \frac{(m_{i-1} l_{i-1}^2 - m_i l_i^2)}{m_{i-1} l_{i-1} + m_i l_i}, & h_1 &= 4,129 \frac{(m_{i-1} l_{i-1}^2 - m_i l_i^2)}{m_{i-1} l_{i-1}^3 + m_i l_i^3} \\
 g_2 &= 0,28 \frac{m_{i-1} l_{i-1}}{m_{i-1} l_{i-1} + m_i l_i}, & h_2 &= 0,659 \frac{m_{i-1} l_{i-1}^3}{m_{i-1} l_{i-1}^3 + m_i l_i^3} \\
 g_3 &= 0,28 \frac{m_i l_i}{m_{i-1} l_{i-1} + m_i l_i}, & h_3 &= 0,659 \frac{m_i l_i^3}{m_{i-1} l_{i-1}^3 + m_i l_i^3} \\
 g_4 &= 0,0906 \frac{m_{i-1} l_{i-1}^2}{m_{i-1} l_{i-1} + m_i l_i}, & h_4 &= 2,182 \frac{m_{i-1} l_{i-1}^2}{m_{i-1} l_{i-1}^3 + m_i l_i^3} \\
 g_5 &= 0,0906 \frac{m_i l_i^2}{m_{i-1} l_{i-1} + m_i l_i}, & h_5 &= 2,182 \frac{m_i l_i^2}{m_{i-1} l_{i-1}^3 + m_i l_i^3} \\
 g_6 &= \frac{15,507}{l_{i-1}^2 (m_{i-1} l_{i-1} + m_i l_i)}, & h_6 &= \frac{151,51}{l_{i-1} (m_i l_i^3 + m_{i-1} l_{i-1}^3)} \\
 g_7 &= \frac{15,507}{l_i (m_{i-1} l_{i-1} + m_i l_i)}, & h_7 &= \frac{151,51}{l_i (m_i l_i^3 + m_{i-1} l_{i-1}^3)} \quad (16)
 \end{aligned}$$

Уравнения (14), (15) полностью описывают динамику i -го узла конечного элемента. Структурные схемы для моделирования их на АВМ изображены на рис. 2 и 3. Структурные схемы для всех остальных узлов системы будут иметь точно такой же вид.

Как известно, при моделировании свободных балок возникает явление структурной неустойчивости схемы ("уплывание" всей системы в целом под действием шумов). Во избежание этого структурную схему необходимо составлять так, чтобы интегрировались непосредственно разности ускорений и скоростей. Кроме того, использование каждого подлежащего перестройке по реализациям коэффициента только один раз в структурной схеме модели позволяет применить ее при статистических исследованиях.

Можно легко показать, что система уравнений (14), (15) позволяет исследовать не только собственные, но и вынужденные изгибные колебания корпуса ЛА. При этом выражения для возмущающих сил и моментов записываются в правой части этих уравнений.

Длина конечного элемента вычисляется по формуле

$$l_{i,max} \leq \frac{3}{4} \sqrt[4]{\frac{\pi^2 E J_i}{\lambda_{max}^2 m_i}}, \quad (17)$$

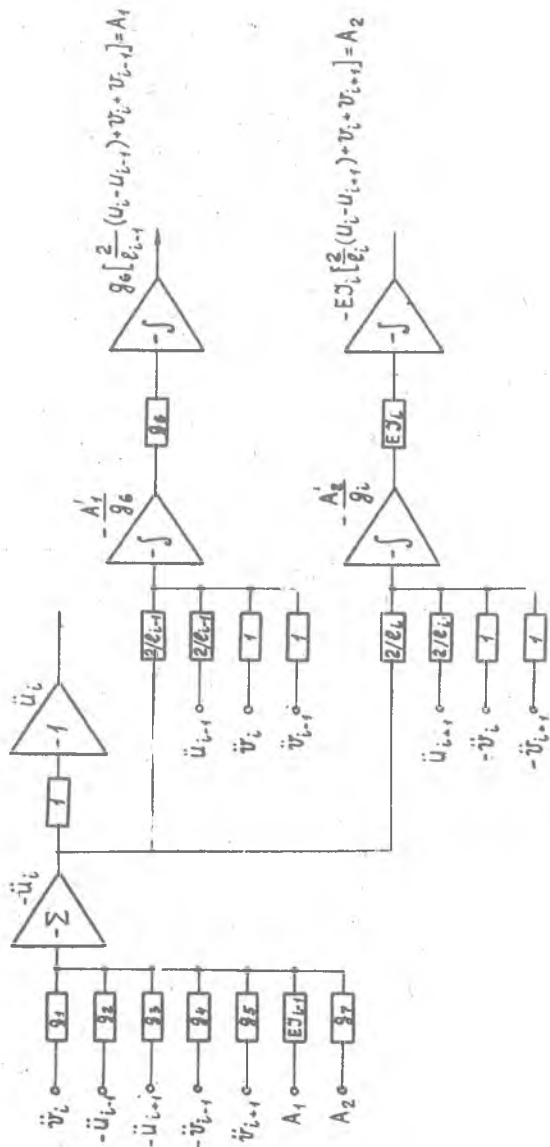


Рис. 2

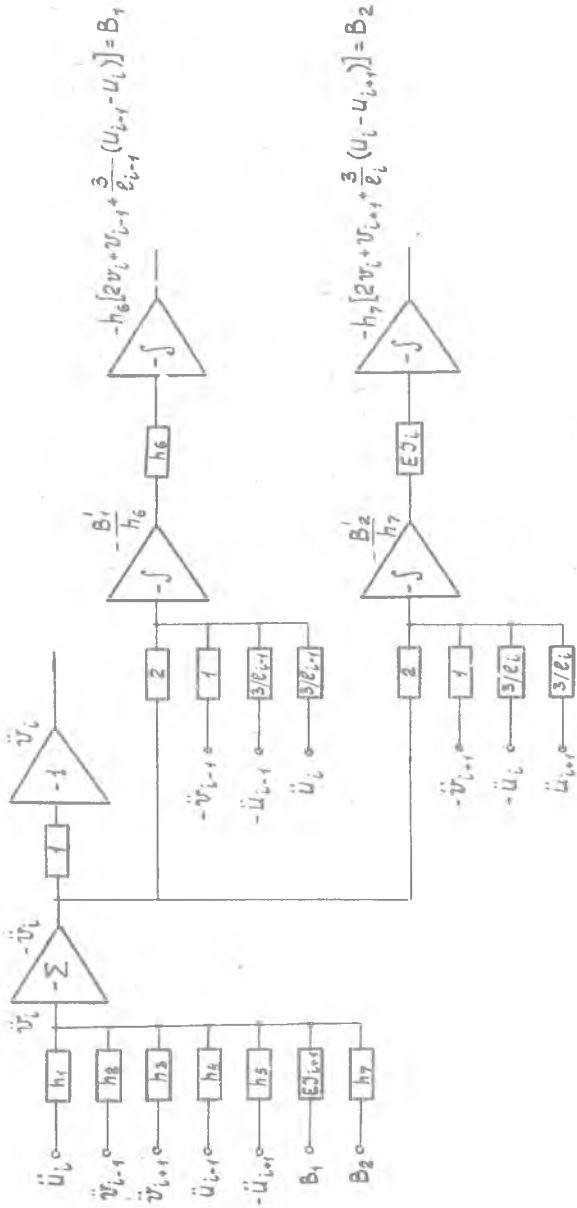


FIG. 3

где λ_{\max} - максимальная частота спектра возмущений, действующих на ЛА.

Кроме того, этот метод позволяет учитывать внутреннее конструкционное трение в системе как в линейной, так и в нелинейной постановке. Метод дает возможность находить величины порезывающих сил и моментов в сечении. Это можно сделать с помощью уравнений (8), (12) для сил и (9), (13) для моментов.

В заключение можно отметить, что полученные уравнения могут быть записаны в общей для всей системы матричной форме и решены известными методами на ЦВМ.

Л и т е р а т у р а

1. Балабух Л.И. и др. Основы строительной механики ракет. М., Высшая школа, 1969.
2. Шиманский Ю.А. Динамический расчет судовых конструкций. М., Судпромгиз, 1963.
3. Archer J.S. Consistent mass matrix for distributed mass systems. J. Struct. Div., Eng. Civil Eng 89 (61-178), 1963.