КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им.С.П.КОРОЛЕВА

Труды, выпуск 63, 1972 г.

В.Г.Фокин

МЕТОД ПОЛОСОК ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ

Метод полосок для изотропной пластины рассматривался в работах [1] [2] . В настоящей статье этот метод развивается применительно к определению остаточных напряжений $\sigma_x(z)$, $\sigma_y(z)$, $\tau_{xy}(z)$ в ортотропной пластине.

Полагаем, что направления плоскостей упругой симметрии пластины известны и они совпадают с координатными осями x , y , z (рис.1). Остаточные напряжения, как в работе [2] , принимаем зависящими только от координаты z . Из этого вытекает $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

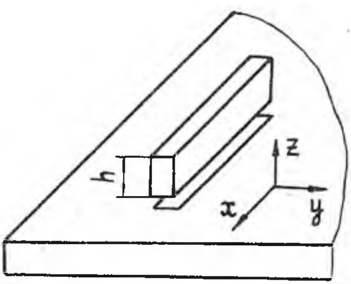

Рис.1

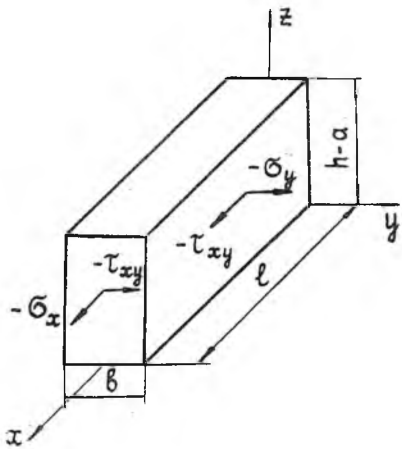

Рис.2

Рассмотрим полоску, вырезанную из пластины в направлении оси x без верхнего слоя толщиной a (рис.2). Вырезка эквивалентна приложению к граням полоски распределенных сил $-\sigma_x$, $-\sigma_y$, $-\tau_{xy}$, равных по величине, но противоположных по направлению соответствующим остаточным напряжениям. Как нормальные, так и касательные эквивалентные усилия самоуравновешены, поэтому допустимо рассматривать их раздельно.

Силы $-\sigma_x$ по Сен-Венану заменим парой сил с моментом M_1 и силой N_1 :

$$M_1(a)=-b\int_0^{h-a}\left[z-\frac{h-a}{2}\right]\sigma_x(z)dz,\quad N_1(a)=-b\int_0^{h-a}\sigma_x(z)dz. \tag{I}$$

Нагружение силами $-\sigma_y$ можно представить как сумму плоской деформации и изгиба с растяжением. Прогиб и продольная деформация определяются через момент M_2 и силу N_2, которые надо приложить к торцам, чтобы компенсировать торцевые усилия, обусловленные плоской деформацией.

Введем следующие обозначения для напряжений при плоской деформации:

$$\sigma_{y\partial}=\sigma_{y\partial}(y,z),\quad \sigma_{z\partial}=\sigma_{z\partial}(y,z)$$

$$\sigma_{x\partial}=\sigma_{x\partial}(y,z)=\nu_{xy}\sigma_{y\partial}+\nu_{xz}\sigma_{z\partial},\quad \tau_{yz\partial}=\tau_{yz\partial}(y,z). \tag{2}$$

Тогда

$$M_2(a)=-\int_{-b/2}^{b/2}\int_0^{h-a}\left(z-\frac{h-a}{2}\right)\sigma_{x\partial}(y,z)dydz,\quad N_2(a)=-\int_{-b/2}^{b/2}\int_0^{h-a}\sigma_{x\partial}(y,z)dydz. \tag{3}$$

Из условий равновесия частей полоски имеем

$$\int_0^{h-a}\sigma_{y\partial}dz=-\int_0^{h-a}\sigma_y dz,\quad \int_0^{h-a}z\sigma_{y\partial}dz=-\int_0^{h-a}z\sigma_y dz,\quad \int_{-b/2}^{b/2}\sigma_{z\partial}dy=0. \tag{4}$$

Учитывая (2) и (4), из (3) найдем

$$M_2(a)=b\int_0^{h-a}\left(z-\frac{h-a}{2}\right)\nu_{xy}\sigma_y(z)dz,\quad N_2(a)=b\int_0^{h-a}\nu_{xy}\sigma_y(z)dz. \tag{5}$$

Прогиб полоски в середине пролета равен [3]

$$f_x(a)=\frac{3(M_1+M_2)\ell^2}{2b(h-a)^3E_x}=-\frac{3\ell^2}{2E_x(h-a)^3}\int_0^{h-a}\left(z-\frac{h-a}{2}\right)\left[\sigma_x(z)-\nu_{xy}\sigma_y(z)\right]dz, \qquad (6)$$

а деформация нижних волокон –

$$\varepsilon_x(a)=-\frac{6(M_1+M_2)}{b(h-a)^2E_x}+\frac{(N_1+N_2)}{b(h-a)E_x}=$$

$$=\frac{1}{E_x}\int_0^{h-a}\left[\frac{6}{(h-a)^2}\left(z-\frac{h-a}{2}\right)-\frac{1}{(h-a)}\right]\left[\sigma_x(z)-\nu_{xy}\sigma_y(z)\right]dz. \qquad (7)$$

Если вырезать из пластины такую же полоску в направлении оси y, то будем иметь

$$f_y(a)=-\frac{3\ell^2}{2E_y(h-a)^3}\int_0^{h-a}\left(z-\frac{h-a}{2}\right)\left[\sigma_y(z)-\nu_{yx}\sigma_x(z)\right]dz, \qquad (8)$$

$$\varepsilon_y(a)=\frac{1}{E_y}\int_0^{h-a}\left[\frac{6}{(h-a)^2}\left(z-\frac{h-a}{2}\right)-\frac{1}{h-a}\right]\left[\sigma_y(z)-\nu_{yx}\sigma_x(z)\right]dz. \qquad (9)$$

Через E_x, E_y, ν_{xy}, ν_{yx} обозначены упругие постоянные ортотропного тела.

Далее рассмотрим действие касательных сил – τ_{xy}. Ищем решение для перемещений в направлении осей x, y, z в виде

$$u=\theta\varphi_1(y,z)+\varphi_2(y,z), \quad v=-\theta xz, \quad w=\theta xy. \qquad (10)$$

Из уравнений равновесия и условий на гранях вытекает, что функции $\varphi_1=\varphi_1(y,z)$ и $\varphi_2=\varphi_2(y,z)$ должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}+p\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}=0, \quad \left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right|_{y=\pm\frac{b}{2}}=z, \quad \left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right|_{\substack{z=0\\ z=h-a}}=-y, \qquad (11)$$

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}+p\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2}=0, \quad \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right|_{y=\pm\frac{b}{2}}=-\frac{\tau_{xy}}{G_{xy}}, \quad \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right|_{\substack{z=0\\ z=h-a}}=0, \qquad (12)$$

где $p=\frac{G_{xz}}{G_{xy}}$; G_{xy}, G_{xz} – упругие постоянные ортотропного тела при сдвиге.

Решая (II) и (I2) методом Фурье (при этом удобно вместо φ_1 ввести функцию $\Phi = \varphi_1 + xy$), получим

$$\varphi_1 = -\sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{8}{(h-a)\beta_k^3\sqrt{p}\,\mathrm{ch}\,\omega_k\frac{b}{2}}\,\mathrm{sh}\,\omega_k y\cdot\cos\beta_k z + (h-a)y - zy + c_1, \quad (I3)$$

$$\varphi_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{G_{xy}\,\omega_k\,\mathrm{ch}\,\omega_k\frac{b}{2}}\,\mathrm{sh}\,\omega_k y\cdot\cos\beta_k z + \frac{\alpha_0}{2G_{xy}}y + c_2, \quad (I4)$$

где

$$\beta_k = \frac{k\pi}{h-a}, \quad \omega_k = \beta_k\sqrt{p}, \quad \alpha_k = -\frac{2}{h-a}\int_0^{h-a}\tau_{xy}(z)\cos\beta_k z\,dz. \quad (I5)$$

Условия на торцах удовлетворяются по Сен-Венану. Угол закручивания θ определяется из равенства момента внутренних сил моменту от нагрузки - τ_{xy}. После интегрирования это равенство приводится к виду

$$\theta(a)\left[\frac{G_{xy}b(h-a)^3}{3} - \sum_{k=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{64G_{xy}}{(h-a)\sqrt{p}\,\beta_k^5}\,\mathrm{th}\,\omega_k\frac{b}{2}\right] =$$

$$= -\int_0^{h-a} b\,\tau_{xy}(z)\left[h-a-2z-\sum_{k=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{16\,\mathrm{th}\,\omega_k\frac{b}{2}}{\sqrt{p}\,\beta_k^3\,b(h-a)}\cos\beta_k z\right]dz \quad (I6)$$

Таким образом, нагрузка - τ_{xy} вызывает закручивание полоски и депланацию сечений. Напряженное состояние характеризуется двумя компонентами:

$$\tau_{xz\partial} = G_{xz}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = G_{xz}\theta\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + y\right) + G_{xz}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}$$

$$\tau_{xy\partial} = G_{xy}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = G_{xy}\theta\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} - z\right) + G_{xy}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}. \quad (I7)$$

Соотношения (I0) - (I7) представляют собой решение задачи Мичелла для ортотропного бруса прямоугольного сечения при кососимметричной касательной нагрузке на боковых гранях. Такая задача ранее не рассматривалась, так как считалось, что у нее нет практического приложения [3] .

Зависимости (6) - (9),(I6) позволяют определять остаточные напряжения в ортотропной пластине методом полосок. С этой целью надо из пластины вырезать две полоски в направлении осей x, y, а затем последовательно удалять слои материала, измеряя при этом углы закручивания на единицу длины $\theta(a)$ и прогибы $f_x(a)$, $f_y(a)$ или деформации $\varepsilon_x(a)$, $\varepsilon_y(a)$. Тогда выражения (6) - (9), (I6) будут являться интегральными уравнениями для искомых остаточных напряжений.

Уравнения (6) - (9) удается решить аналитически. Сделаем в них замену переменной по формуле $z = h - \xi$, после чего продифференцируем два раза по параметру a и затем проинтегрируем полученные дифференциальные уравнения.

Постоянные интегрирования найдем через начальные условия, которые определяются после первого дифференцирования уравнений (6) - (9) по a, если учесть, что остаточные напряжения самоуравновешены. В результате получим следующие формулы для расчета нормальных остаточных напряжений:

$$\sigma_x(a) = \frac{\sigma_{xn}(a) + \nu_{xy}\sigma_{yn}(a)}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}, \quad \sigma_y(a) = \frac{\sigma_{yn}(a) + \nu_{yx}\sigma_{xn}(a)}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}},$$

где

$$\sigma_{xn}(a) = \frac{4E_x}{3\ell^2}\left[(h-a)^2\frac{df_x(a)}{da} - 4(h-a)\cdot f_x(a) + 2\int_0^a f_x(\xi)\,d\xi\right]$$

$$\sigma_{yn}(a) = \frac{4E_y}{3\ell^2}\left[(h-a)^2\frac{df_y(a)}{da} - 4(h-a)\cdot f_y(a) + 2\int_0^a f_y(\xi)\,d\xi\right]$$

или через деформации

$$\sigma_{xn}(a) = -E_x\left[\frac{h-a}{2}\frac{d\varepsilon_x(a)}{da} - 2\varepsilon_x(a) + 3(h-a)\int_0^a \frac{\varepsilon_x(\xi)}{(h-\xi)^2}\,d\xi\right]$$

$$\sigma_{yn}(a) = -E_y\left[\frac{h-a}{2}\frac{d\varepsilon_y(a)}{da} - 2\varepsilon_y(a) + 3(h-a)\int_0^a \frac{\varepsilon_y(\xi)}{(h-\xi)^2}\,d\xi\right].$$

Уравнения (I6) из-за его особенности при $a = h$ оказывается недостаточно для определения функции $\tau_{xy}(z)$. Необходимо испытать еще одну полоску с теми же исходными напряжениями $\tau_{xy}(z)$, но при этом следует удалить слои материала уже с нижней грани, измеряя соответствующие углы закручивания.

По данным нового опыта можно составить второе интегральное уравнение для $\tau_{xy}(z)$, подобное (I6). Полученная система интегральных уравнений должна решаться численным методом. Так как интегралы от ядер этих уравнений на рассматриваемых отрезках интегрирования равны нулю, то решение определяется с точностью до произвольной постоянной. Последняя находится из условия самоуравновешенности напряжений $\tau_{xy}(z)$.

Литература

I. И.А.Биргер. Остаточные напряжения. Машгиз, I963.

2. С.И.Иванов. Определение остаточных напряжений в пластинке методом полосок. Труды КуАИ, вып.48, I971.

3. С.Г.Лехницкий. Теория упругости анизотропного тела. Госиздат, I950.