

М. П. Шатунов, С. И. Иванов, А. П. Филатов

КОНЦЕНТРАЦИЯ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ,
ВЫЗВАННЫХ ИЗОТРОПНОЙ ПЕРВОНАЧАЛЬНОЙ ДЕФОРМАЦИЕЙ

Определение остаточных напряжений в стержнях, кольцах, пластинах и цилиндрах по первоначальным деформациям рассматривалось в работе [1]. В настоящей статье приводится решение задачи о концентрации остаточных напряжений, ограниченное условием изотропии первоначальных деформаций, что характерно для ряда проблем практики. Например, остаточные напряжения после азотирования образуются за счет всестороннего изотропного расширения слоя, насыщаемого азотом.

В цилиндрической детали с полуэллиптическим кольцевым надрезом даны первоначальные деформации вида $\hat{\epsilon}_0 = \epsilon_0 \hat{E}$, где \hat{E} — единичный тензор; $\epsilon_0 = \epsilon_0(\rho, \nu)$ — скалярная функция; ρ, ν — координаты осевого сечения детали. Нагрузка на поверхности детали равна 0. Требуется определить тензор остаточных напряжений

$$\hat{T} = 2\mu \left(\hat{E} + \frac{\nu}{1-2\nu} \Delta \hat{E} \right) - 2\mu \left(\hat{\epsilon}_0 + \frac{\nu}{1-2\nu} \Delta_0 \hat{E} \right), \quad (1)$$

$$\text{где } \hat{E} = \frac{1}{2} [\nabla \bar{U} + (\nabla \bar{U})^*] - \quad (2)$$

тензор полных деформаций, удовлетворяющий уравнениям совместности; \bar{U} — вектор перемещений;

$$\Delta = \epsilon_\rho + \epsilon_\nu + \epsilon_\theta, \quad \Delta_0 = \epsilon_\rho^0 + \epsilon_\nu^0 + \epsilon_\theta^0 = 3\epsilon_0.$$

Подставив (1), (2) в уравнение равновесия $\nabla \cdot \hat{T} = 0$, получим основное уравнение рассматриваемой задачи [2]:

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \nabla (\nabla \cdot \bar{U}) - \nabla \times [\nabla \times \bar{U}] = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \nabla \epsilon_0. \quad (3)$$

Оно имеет частное решение

$$\bar{U} = R_0^2 \nabla \cdot \Phi_0, \quad (4)$$

где $R_0 = \text{const}$, $\Phi_0 = \Phi_0(\rho, \nu)$ - скалярная функция, удовлетворяющая уравнению

$$R_0^2 \nabla^2 \Phi_0 = \frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon_0. \quad (5)$$

Этому решению по формуле (I) соответствует тензор напряжений

$$\hat{T} = 2\mu R_0^2 (\nabla \nabla \Phi_0 - \nabla^2 \Phi_0 \hat{E}). \quad (6)$$

В качестве ρ , ν возьмем эллиптические координаты, связанные с цилиндрическими уравнениями

$$x = R - R_0(\rho + c\rho^{-1}) \cos \nu, \quad z = -R_0(\rho - c\rho^{-1}) \sin \nu, \quad (7)$$

где $R_0(1+c) = a$, $R_0(1-c) = b$, $-1 < c < 1$, $\rho \geq 1$, $-\frac{\pi}{2} \leq \nu \leq \frac{\pi}{2}$, a, b - полуоси эллипса; R - радиус цилиндра.

Уравнения (7) равносильны одному комплексному

$$z + iz = R - R_0(\zeta + c\zeta^{-1}), \quad \zeta = \rho e^{i\nu} = \rho t, \quad t = e^{i\nu} \quad (8)$$

Коэффициенты Ляме в этих координатах

$$H_\rho^2 = R_0^2(1 - c\rho^{-2}t^{-2})(1 - c\rho^{-2}t^2), \quad H_\nu^2 = \rho^2 H_\rho^2, \quad H_\theta = r. \quad (9)$$

В окрестности мелкого выреза ($R_0 \ll R$) величинами $\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \rho}$, $\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \nu}$ можно пренебречь и рассматривать ∇ как двумерный оператор дифференцирования в плоскости ρ , ν . При этом условии тензор (6) имеет следующие компоненты в осевом сечении:

$$\sigma_\rho = 2\mu R_0^2 \left[\frac{1}{H_\rho^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \rho^2} - \frac{1}{H_\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \rho} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho} + \frac{H_\rho}{H_\nu^2} \frac{\partial H_\rho}{\partial \nu} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu} \right) - \nabla^2 \Phi_0 \right]$$

$$\sigma_\nu = 2\mu R_0^2 \left[\frac{1}{H_\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \nu^2} - \frac{1}{H_\nu} \frac{\partial H_\nu}{\partial \nu} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu} + \frac{H_\nu}{H_\rho^2} \frac{\partial H_\nu}{\partial \rho} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho} \right) - \nabla^2 \Phi_0 \right]$$

$$\tau_{\rho\nu} = 2\mu R_0^2 \left[\frac{1}{H_\rho H_\nu} \left(\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \rho \partial \nu} - \frac{1}{H_\nu} \frac{\partial H_\nu}{\partial \rho} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu} - \frac{1}{H_\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \nu} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho} \right) \right], \quad (10)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{1}{H_\rho H_\nu} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{H_\nu}{H_\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{H_\rho}{H_\nu} \frac{\partial}{\partial \nu} \right) \right] = \frac{(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + t \frac{\partial}{\partial t})(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} - t \frac{\partial}{\partial t})}{R_0^2 \rho^2 (1 - c\rho^{-2}t^{-2})(1 - c\rho^{-2}t^2)}. \quad (11)$$

Подставив H_p , H_v , запишем уравнения (10) в виде

$$\begin{aligned} (\xi - c\xi^{-1})(\sigma_p + i\tau_{pv}) &= -2\mu t \rho^{-1} \left(t \frac{\partial}{\partial t} + i \right) \frac{\rho \frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho} - t \frac{\partial \Phi_0}{\partial t}}{1 - c\rho^{-2} t^2} \\ (\xi - c\xi^{-1})(\sigma_v - i\tau_{pv}) &= -2\mu t \rho^{-1} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} - i \right) \frac{\rho \frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho} - t \frac{\partial \Phi_0}{\partial t}}{1 - c\rho^{-2} t^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Пусть $\varepsilon_0(\rho, v) = \rho^{-S} \varepsilon_0(t, v)$, (13)

где S - положительное нечетное число, характеризующее скорость убывания первоначальной деформации при удалении от поверхности надреза. Разложим $\varepsilon_0(t, v)$ в ряд Фурье на отрезке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$\varepsilon_0(t, v) = \sum_{k=0,2,4,\dots}^{\infty} \varepsilon_k \cos kv = \sum_{k=0,2,4,\dots}^{\infty} \varepsilon_k \frac{t^k + t^{-k}}{2}. \quad (14)$$

Тогда уравнение (5) запишется в виде

$$\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + t \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\rho \frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho} - t \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} \right) = \rho^{-S+2} (1 - c\rho^{-2} t^2) (1 - c\rho^{-2} t^{-2}) \sum_{k=0,2,4,\dots}^{\infty} \frac{1+v}{1-v} \varepsilon_k \frac{t^k + t^{-k}}{2}. \quad (15)$$

Используя соотношение

$$\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + t \frac{\partial}{\partial t} \right) (1 - c\rho^{-2} t^2) \rho^{-S} t^k = (-S+k)(1 - c\rho^{-2} t^2) \rho^{-S} t^k,$$

из уравнения (15) найдем

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho} - t \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} &= \rho^{-S+2} (1 - c\rho^{-2} t^2) \sum_{k=0,2,4,\dots}^{\infty} \frac{1+v}{1-v} \frac{\varepsilon_k}{2} \left[\left(-\frac{1}{S-k-2} + \frac{c\rho^{-2} t^{-2}}{S-k+2} \right) t^k + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{1}{S+k-2} + \frac{c\rho^{-2} t^{-2}}{S+k+2} \right) t^{-k} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

(считаем $\varepsilon_k = 0$ при $k = S \pm 2$, т.е. отбрасываем гармоники $\varepsilon_k \cos kv$ при $k = S \pm 2$). Из (12), (16) получим

$$\begin{aligned} (\xi - c\xi^{-1})(\sigma_p + i\tau_{pv}) &= \sum_{k=0,2,4,\dots; k \neq \pm 2}^{\infty} \frac{P_k}{2} \rho^{-S+1} \left[\left(\frac{K+1}{S-k-2} - \frac{K-1}{S-k+2} c\rho^{-2} t^{-2} \right) t^{K+1} + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{K-1}{S+k-2} + \frac{K+1}{S+k+2} c\rho^{-2} t^{-2} \right) t^{-K+1} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\xi - c\xi^{-1})(\sigma_v - i\tau_{pv}) &= \sum_{k=0,2,4,\dots; k \neq S \pm 2}^{\infty} \frac{P_k}{2} \rho^{-S+1} \left[\left(-\frac{S-1}{S-k-2} + \frac{S+1}{S-k+2} c\rho^{-2} t^{-2} \right) t^{K+1} + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{S-1}{S+k-2} + \frac{S+1}{S+k+2} c\rho^{-2} t^{-2} \right) t^{-K+1} \right], \end{aligned} \quad (17)$$

где $P_k = 2\mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon_k$ - коэффициенты Фурье функции

$$P(1, \nu) = 2\mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon_0(1, \nu).$$

Соответствующая нагрузка на поверхности цилиндра равна

$$(\zeta - c\zeta^{-1})(\sigma_{\nu} - i\tau_{\rho\nu}) \Big|_{\zeta=i\rho} = - \sum_{\substack{k=0,2,4,\dots; \\ k \neq s \pm 2}}^{\infty} \frac{P_k}{2} (-1)^{\frac{k+s}{2}} \zeta^{-s+1} \left[\frac{2(S-1)(S-2)}{(S-2)^2 - k^2} - \frac{2(S+1)(S+2)}{(S+2)^2 - k^2} c\zeta^{-2} \right] \quad (18)$$

Для уничтожения этой нагрузки прибавим к (17) напряжения, определяемые по формулам Мусхелишвили [3] при $\omega(\zeta) = R_0(\zeta + c\zeta^{-1})$:

$$(\zeta - c\zeta^{-1})(\sigma_{\rho} + i\tau_{\rho\nu}) = (\zeta - c\zeta^{-1})(\Phi(\zeta) + \bar{\Phi}(\zeta) - (\zeta + c\zeta^{-1})\zeta\Phi'(\zeta) - \overline{(\zeta - c\zeta^{-1})\psi(\zeta)})$$

$$(\zeta - c\zeta^{-1})(\sigma_{\nu} - i\tau_{\rho\nu}) = (\zeta - c\zeta^{-1})(\Phi(\zeta) + \bar{\Phi}(\zeta)) + \overline{(\zeta + c\zeta^{-1})\zeta\Phi'(\zeta)} + \overline{(1 - c\zeta^{-1})\psi(\zeta)}, \quad (19)$$

приняв $\Phi(\zeta) = 0$,

$$(\zeta - c\zeta^{-1})\psi(\zeta) = - \sum_{\substack{k=0,2,4,\dots; \\ k \neq s \pm 2}}^{\infty} \frac{P_k}{2} (-1)^{\frac{k+s}{2}} \zeta^{-s+1} \left[\frac{2(S-1)(S-2)}{(S-2)^2 - k^2} - \frac{2(S+1)(S+2)}{(S+2)^2 - k^2} c\zeta^{-2} \right] \quad (20)$$

Суммарные напряжения запишутся в виде

$$(\zeta - c\zeta^{-1})(\sigma_{\rho}^0 + i\tau_{\rho\nu}^0) = \frac{1}{2}\rho^{-s+1} \sum_{\substack{k=0,2,4,\dots; \\ k \neq s \pm 2}}^{\infty} P_k \left[\frac{k+1}{s-k-2} t^{k+1} - \frac{k-1}{s+k-2} t^{-k+1} + \frac{k+1}{s+k+2} c\rho^{-2} t^{-k+1} - \frac{k-1}{s-k+2} c\rho^{-2} t^{k+1} + (-1)^{\frac{k+s}{2}} \left(\frac{2(S-1)(S-2)}{(S-2)^2 - k^2} t^{s-1} - \frac{2(S+1)(S+2)}{(S+2)^2 - k^2} c\rho^{-2} t^{s+1} \right) \right],$$

$$(\zeta - c\zeta^{-1})(\sigma_{\nu}^0 - i\tau_{\rho\nu}^0) = \frac{1}{2}\rho^{-s+1} \sum_{\substack{k=0,2,4,\dots; \\ k \neq s \pm 2}}^{\infty} P_k \left[-\frac{s-1}{s-k-2} t^{k+1} - \frac{s-1}{s+k-2} t^{-k+1} + \frac{s+1}{s+k+2} c\rho^{-2} t^{-k+1} + \frac{s+1}{s-k+2} c\rho^{-2} t^{k+1} - (-1)^{\frac{k+s}{2}} \left(\frac{2(S-1)(S-2)}{(S-2)^2 - k^2} - \frac{2(S+1)(S+2)}{(S+2)^2 - k^2} c\rho^{-2} t^{s+1} \right) \right]. \quad (21)$$

Второе из этих выражений при $\zeta = i\rho$ обращается в ноль, а первое при $\zeta = t$ принимает вид

$$(t - ct^{-1})(\sigma_{\rho}^0 + i\tau_{\rho\nu}^0) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=0,2,4,\dots; \\ k \neq s \pm 2}}^{\infty} P_k \left[\frac{k+1}{s-k-2} t^{k+1} - \frac{k-1}{s+k-2} t^{-k+1} + \frac{k+1}{s+k+2} ct^{-k+1} - \frac{k-1}{s-k+2} ct^{k+1} + (-1)^{\frac{k+s}{2}} \left(\frac{2(S-1)(S-2)}{(S-2)^2 - k^2} t^{s-1} - \frac{2(S+1)(S+2)}{(S+2)^2 - k^2} ct^{s+1} \right) \right], \quad (22)$$

что дает нагрузку на поверхности выреза. Для ее уничтожения выч-

тем из (21) напряжения σ_p' , σ_v' , τ_{pv}' , определяемые снова с помощью формул (19) по нагрузке (22) и нулевой нагрузке на цилиндрической поверхности. Такая задача решена в работе [4]. Опустив промежуточные выкладки, приведем окончательную формулу для осевого остаточного напряжения в наименьшем сечении детали:

$$\begin{aligned} (1-c\rho^{-2})\sigma_v(\rho,0) = & -P_0 \left\{ \left[\left(\frac{S-1}{S-2} - \frac{S+1}{S+2} c\rho^{-2} \right) \rho^{-S} - \left(\frac{1}{S-2} + \frac{c}{S+2} \right) \rho^{-2} \right] + \right. \\ & + \left[2 + \frac{2(1-c)^2 \rho^{-2}}{(1-c\rho^{-2})^2} - \frac{(1-c)(1-\rho^{-2})}{1-c\rho^{-2}} \right] \frac{c\rho^{-2}}{S+2} \Big\} = \sum_{K=2,4,\dots; K \neq S \pm 2}^{\infty} \frac{P_K}{2} \left\{ \left[\left(\frac{S-1}{S-K-2} + \frac{S-1}{S+K-2} - \right. \right. \right. \\ & - \frac{S+1}{S-K+2} c\rho^{-2} - \frac{S+1}{S+K+2} c\rho^{-2} \Big) \rho^{-S} + \left(-\frac{K+1}{S-K-2} \rho^{-2} + \frac{K-1}{S+K-2} + \frac{K-1}{S-K+2} c - \frac{K+1}{S+K+2} c\rho^{-2} \right) \rho^{-K} + \\ & \left. + \left[\left(-\frac{K-1}{S+K-2} + \frac{K+1}{S+K+2} c\rho^{-2} \right) \rho^2 + \frac{2(1-c)^2 \rho^{-2}}{(1-c\rho^{-2})^2} + \left(\frac{(K-1)^2}{S+K-2} - \frac{(K+1)^2}{S+K+2} c\rho^{-2} \right) \frac{(1-c)(1-\rho^{-2})}{1-c\rho^{-2}} \right] \rho^{-K} \right\} - \\ & -(1+c) [\mu_0(\rho)A_0 + \mu_2(\rho)A_2], \end{aligned} \quad (23)$$

$$\text{где } A_0 = \frac{\pi}{8} \left(-\frac{1}{S-2} + \frac{c^2}{S+2} \right) P_0; \quad S = 4, 6, 8, \dots \quad (24)$$

$$\begin{aligned} A_2 = & \frac{\pi}{8} \left[-\left(\frac{1}{S-2} + \frac{1+2c}{S+2} \right) 2cP_0 + \left(\frac{1}{S-4} + \frac{(1+c)^2}{S} - \frac{c(2+3c)}{S+4} \right) P_2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{2+3c}{S+2} - \frac{c}{S-2} \right) P_4 \right]; \quad S = 6, 8, \dots \end{aligned}$$

Можно показать, что при большом S , т.е. при малой глубине залегания первоначальных деформаций, напряжения, соответствующие отброшенным гармоникам $\epsilon_k = \cos k\psi$, $K = S \pm 2$, имеют порядок $\frac{1}{S^3}$ и практически не влияют на напряжение (23).

В качестве примера вычислим остаточные напряжения, возникающие в детали из стали 38ХМФА с надрезом полукруглого профиля ($R_0 = 0,5\text{мм}$) после азотирования поверхности надреза на глубину $0,30\text{мм}$ при температуре 540°C в течение 10 часов.

Для определения первоначальных деформаций применялись цилиндрические образцы $\phi 10\text{мм}$, подвергнутые азотированию по указанному режиму. Остаточные напряжения $\sigma_z = \sigma_\theta = \sigma$ в этих образцах, найденные методом надрезов [5], показаны на рис. 1. Первоначальные деформации после азотирования вычислялись по формуле

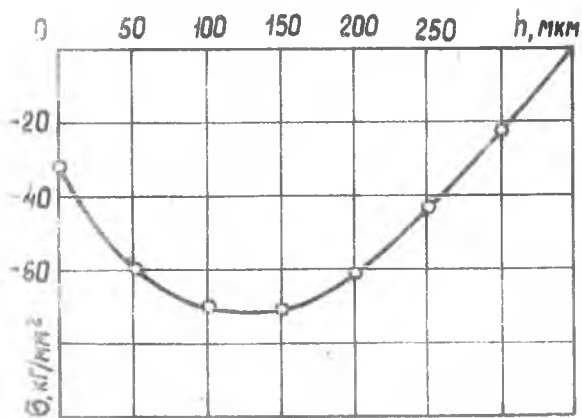


Рис. 1

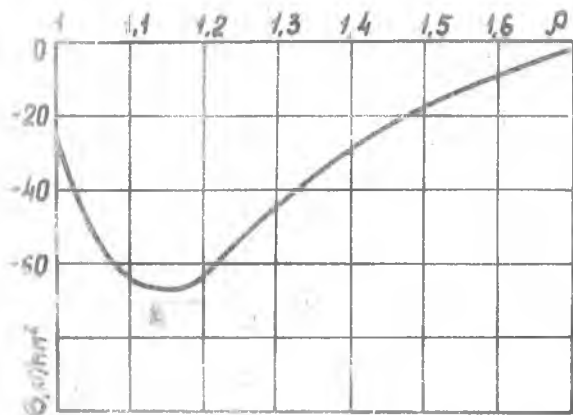


Рис. 2

$$\varepsilon_0(h) = - \frac{1-\mu}{E} \sigma(h), \quad (25)$$

где h - расстояние от поверхности цилиндрического образца до текущего слоя. Зависимость (25) следует из формул Гука в предположении $\varepsilon_z = \varepsilon_\theta = \sigma_z = 0$, что допустимо при малой толщине слоя с первоначальными деформациями.

Вычисленные по формуле (25) деформации можно аппроксимировать функцией

$$\varepsilon_0(\rho) \cdot 10^4 = 229,5 \rho^{-6} - 220,9 \rho^{-8} \quad (26)$$

Соответствующие этим деформациям остаточные напряжения в наименьшем сечении детали, найденные по формуле (23), показаны на рис. 2, где $\rho = 1 + \frac{h}{R_0}$.

В данном примере не учитывалась возможность образования пластических деформаций при азотировании, что допустимо в силу малой концентрации остаточных напряжений.

Л и т е р а т у р а

1. Биргер И.А. Остаточные напряжения. Машгиз, 1963.
2. Лурье А.И. Теория упругости. "Наука", 1970.
3. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. "Наука", 1966.
4. Иванов С.И., Шатунов М.П., Павлов В.Ф. Влияние остаточных напряжений на выносливость образцов с надрезом. Межвузовский сборник "Вопросы прочности элементов авиационных конструкций", выпуск I, КуАИ, 1974.
5. Иванов С.И., Туровский М.Л. Метод надрезов для определения остаточных напряжений в цилиндрах. Сб. "Остаточные напряжения" Труды КуАИ, вып. 53, 1971.