КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им.С.П.КОРОЛЕВА
Труды, выпуск 63, 1972 г.

В.И.Леонов, Х.С.Хазанов

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПОЛОГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Принятые обозначения.

R, δ – радиус срединной поверхности и толщина оболочки;

r_o – характерный линейный размер;

ξ, η – безразмерные декартовы координаты точек срединной поверхности оболочки, отнесенные к r_o (ось ξ направлена по образующей);

$\rho = \frac{r}{r_o}$, θ – полярные на развертке цилиндра координаты (угол θ отсчитывается от образующей);

$æ = \frac{r_o}{R}$, $\lambda = \frac{R}{\delta}$ – безразмерные параметры;

w – нормальное к поверхности оболочки перемещение;

u, v – компоненты перемещения точек срединной поверхности в полярных координатах;

M_ρ, M_θ, N_ρ, N_θ, $T_{\rho\theta}$ – изгибающие моменты, нормальные и касательные силы;

Φ – функция напряжения;

q – нормальная поверхностная нагрузка;

E, μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки.

При построении фундаментального решения уравнений пологой цилиндрической оболочки, соответствующего действию на оболочку нормальной сосредоточенной силы $\mathcal{P}$, используем известное [1,2] дифференциальное уравнение относительно комплексной функции $F = w + i\Phi$, которое может быть приведено к виду

$$\nabla^2 \nabla^2 F + 4 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1^2} = -\frac{16 R^2}{E\delta} q, \qquad (1)$$

где $\xi_1 = \omega\xi\sqrt{2i}$, $\eta_1 = \omega\eta\sqrt{2i}$, $\omega = \frac{1}{2}\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}\,\text{æ}\sqrt{\lambda}$,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta_1^2}.$$

Как показано в работе [3], уравнение (I) можно свести к системе дифференциальных уравнений:

$$\nabla^2 p = -\frac{16R^2}{E\delta} q,$$

$$(\nabla^2+1)(e^{i\xi_1} f_1) = pe^{i\xi_1},$$

$$(\nabla^2+1)(e^{-i\xi_1} f_2) = pe^{-i\xi_1}, \qquad (2)$$

причем $F = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$.

Для построения фундаментального решения подставим в (2)

$$q = \frac{2i\omega^2 \mathcal{P}}{r_o^2}\delta(\xi_1)\delta(\eta_1). \qquad (3)$$

Здесь $\delta(\xi_1)$ – обобщенная дельта-функция Дирака, $\mathcal{P}$ – нормальная сила.

Согласно [4] решение первого уравнения системы (2) с учетом (3) имеет вид

$$p = -\frac{16i\omega^2\lambda\mathcal{P}}{\pi E\text{æ} r_o}\ln z, \qquad (4)$$

где $z = x\sqrt{2i}$, $x = \omega\rho$.

Подставим (4) в последние два уравнения системы (2) и перейдем в них к полярным координатам по формулам

$$\xi = \rho\cos\theta, \quad \eta = \rho\sin\theta.$$

Будем теперь отыскивать f_1 и f_2 в виде тригонометрических рядов по угловой координате. Получающиеся при этом неоднородные дифференциальные уравнения относительно функциональных коэффициентов проинтегрируем методом вариации произвольных постоянных. В итоге фундаментальное решение уравнения (I) можно привести к виду

$$F(z,\theta) = -\frac{16i\omega^2\lambda\mathcal{P}}{\pi E\text{æ} r_o}\sum_{\nu=0,2\ldots}^{\infty}\sum_{K=1}^{\infty}\ell_\nu i^\nu K D_{K\nu}(z)\cos\nu\theta, \qquad (5)$$

где $\ell_\nu = \frac{1}{2}$ при $\nu = 0$ и $\ell_\nu = 1$ при $\nu \neq 0$,

$$D_{K\nu}(z) = P_K(z)\left[J_{K-\nu}(z) + J_{K+\nu}(z)\right], \quad P_K(z) = \left.\frac{\partial J_\mu(z)}{\partial\mu}\right|_{\mu=K}.$$

Здесь $J_n(z)$ - функция Бесселя первого рода.

В случае действия на оболочку сосредоточенных моментов относительно осей ξ и η решение можно получить из фундаментального, дифференцируя его соответственно по η или ξ. Это эквивалентно дифференцированию правой части соотношения (4) с дальнейшим решением последних двух уравнений системы (2) по указанной выше схеме.

При действии момента относительно оси ξ получается решение

$$F_1(z,\theta)=-\frac{16(1-i)\lambda M_\xi}{\pi E \varkappa r_o}\sum_{\nu=1,3,..}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} i^{\nu-1} D_{k\nu}(z)\sin\nu\theta. \qquad (6)$$

В случае действия сосредоточенного момента относительно оси η получить частное решение аналогичным образом не удается, так как оно обращается в нуль. Фундаментальные решения уравнений цилиндрической оболочки в декартовых координатах получены и исследованы в работах А.Л.Гольденвейзера, Э.И.Григолюка, Н.Г.Гурьянова, В.М.Даревского, Ю.С.Демьяновича, Ю.П.Жигалко, Б.В.Нерубайло, В.А.Никитина, В.В.Новожилова, В.А.Сибирякова, В.М.Толкачева, Е.Ф.Черных, Ю.А.Шевлякова, В.П.Шевченко и многих других. Выражения вида (5) и (6) получены в работе [3] без использования понятия фундаментального решения как частные решения однородного уравнения оболочки.

Исследуем поведение функции $P_k(z)$ с ростом аргумента. Для этого представим ее в следующем виде:

$$P_k(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial H_\mu^{(1)}(z)}{\partial\mu}+\frac{\partial H_\mu^{(2)}(z)}{\partial\mu}\right]_{\mu=k}, \qquad (7)$$

где $H_\mu^{(1)}(z)$, $H_\mu^{(2)}(z)$ - первая и вторая функции Ганкеля.

Для функций Ганкеля имеют место [5] следующие интегральные представления:

$$H_\mu^{\binom{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\;\frac{e^{\pm i\left(z-\frac{\mu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-x}x^{\mu-\frac{1}{2}}\left(1\mp\frac{x}{2iz}\right)^{\mu-\frac{1}{2}}dx, \qquad (8)$$

справедливые при $-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Re}\mu>-\frac{1}{2}$. Здесь $\Gamma(x)$ - гамма-функция.

Подставляя соотношение (8) в (7), используя разложение бинома Ньютона и производя дифференцирование по индексу, получим асимптотическое выражение функции $P_\kappa(z)$ при $z \to \infty$:

$$P_\kappa(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\Big[\sin\left(z-\frac{\kappa\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\Big\{\frac{\pi}{4}\sum_{n=0}^{m}\alpha_{n,\kappa}(z)-\sum_{n=0}^{m}\beta_{n,\kappa}(z)\Big[\psi\left(2n+\kappa+\frac{3}{2}\right)-$$

$$-\psi\left(\kappa-2n-\frac{1}{2}\right)\Big]+O\left(z^{-m-1}\right)\Big\}+$$

$$+\cos\left(z-\frac{\kappa\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\Big\{\frac{\pi}{4}\sum_{n=0}^{m}\beta_{n,\kappa}(z)+\sum_{n=0}^{m}\alpha_{n,\kappa}(z)\Big[\psi\left(2n+\kappa+\frac{1}{2}\right)-$$

$$-\psi\left(\kappa-2n+\frac{1}{2}\right)\Big]+O\left(z^{-m-1}\right)\Big\}\Big], \qquad (9)$$

где

$$\alpha_{n,\kappa}(z)=\frac{(-1)^n\varphi(\kappa,2n)}{(2z)^{2n}}, \qquad \beta_{n,\kappa}(z)=\frac{(-1)^n\varphi(\kappa,2n+1)}{(2z)^{2n+1}}$$

$$\varphi(\kappa,n)=\frac{\Gamma\left(n+\kappa+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\kappa-n+\frac{1}{2}\right)}, \qquad \psi(x)=\frac{d}{dx}\ln\Gamma(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

Выражение (9) показывает, что функция $P_\kappa(z)$ является возрастающей на бесконечности, а следовательно, и полученные решения (5) и (6) являются также возрастающими.

Введем обозначения

$$\alpha_\nu(x)+i\beta_\nu(x)=i\sum_{\kappa=1}^{\infty}\kappa P_\kappa(z)\left[J_{\kappa-\nu}(z)+J_{\kappa+\nu}(z)\right], \quad A=\frac{16\omega^2 R\mathcal{P}}{\pi E r_0^2\delta}.$$

Отделяя теперь действительную и мнимую части в (5) и пользуясь известными соотношениями для пологих оболочек [I,2], можно получить ряды для усилий в сечениях оболочки и для перемещений точек ее срединной поверхности:

$$M_\rho(\rho,\theta)=\sum_{\nu=0,2,\ldots}^{\infty}\ell_\nu M_{\rho\nu}(x)\cos\nu\theta, \quad M_\theta(\rho,\theta)=\sum_{\nu=0,2,\ldots}^{\infty}\ell_\nu M_{\theta\nu}(x)\cos\nu\theta$$

$$N_\rho(\rho,\theta)=\sum_{\nu=0,2,\ldots}^{\infty}\ell_\nu N_{\rho\nu}(x)\cos\nu\theta, \quad N_\theta(\rho,\theta)=\sum_{\nu=0,2,\ldots}^{\infty}\ell_\nu N_{\theta\nu}(x)\cos\nu\theta$$

$$T_{\rho\theta}(\rho,\theta)=\sum_{\nu=2,4,\ldots}^{\infty}T_\nu(x)\sin\nu\theta, \quad Q_\rho^*(\rho,\theta)=\sum_{\nu=0,2,\ldots}^{\infty}\ell_\nu Q_{\rho\nu}(x)\cos\nu\theta, \qquad (10)$$

$$w(\rho,\theta)=\sum_{\nu=0,2,\ldots}^{\infty} \ell_\nu w_\nu(x)\cos\nu\theta$$

$$u(\rho,\theta)=\sum_{\nu=0,2,\ldots}^{\infty} \ell_\nu u_\nu(x)\cos\nu\theta, \qquad v(\rho,\theta)=\sum_{\nu=2,4,\ldots}^{\infty} v_\nu(x)\sin\nu\theta. \tag{II}$$

Здесь

$$w_\nu(x)=-A(-1)^{\frac{\nu}{2}}\alpha_\nu(x)$$

$$M_{\rho\nu}(x)=\frac{\varkappa^2 ERA}{64\omega^2\lambda}(-1)^{\frac{\nu}{2}}\left[\alpha''_\nu(x)+\frac{\mu}{x}\alpha'_\nu(x)-\frac{\mu\nu^2}{x^2}\alpha_\nu(x)\right]$$

$$M_{\theta\nu}(x)=\frac{\varkappa^2 ERA}{64\omega^2\lambda}(-1)^{\frac{\nu}{2}}\left[\mu\alpha''_\nu(x)+\frac{1}{x}\alpha'_\nu(x)-\frac{\nu^2}{x^2}\alpha_\nu(x)\right]$$

$$N_{\rho\nu}(x)=\frac{EA}{8\lambda x}(-1)^{\frac{\nu}{2}}\left[\beta'_\nu(x)-\frac{\nu^2}{x}\beta_\nu(x)\right]$$

$$N_{\theta\nu}(x)=\frac{EA}{8\lambda}(-1)^{\frac{\nu}{2}}\beta''_\nu(x)$$

$$T_\nu(x)=\frac{EA\nu}{8\lambda x}(-1)^{\frac{\nu}{2}}\left[\beta'_\nu(x)-\frac{1}{x}\beta_\nu(x)\right]$$

$$Q_{\rho\nu}(x)=\frac{\varkappa EA}{64\omega\lambda}(-1)^{\frac{\nu}{2}}\left[\alpha'''_\nu(x)+\frac{1}{x}\alpha''_\nu(x)-\frac{1+(2-\mu)\nu^2}{x^2}\alpha'_\nu(x)+\frac{(3-\mu)\nu^2}{x^3}\alpha_\nu(x)\right], \tag{I2}$$

$$u_0(x)=-\frac{\varkappa x A}{8\omega}\left[S_1(x)+S_2(x)\right]$$

$$u_\nu(x)=-\frac{\varkappa x A}{8\omega(\nu^2-1)}(-1)^{\frac{\nu}{2}}\left[S_3(x)+S_4(x)\right] \quad (\nu=2,4,\ldots)$$

$$v_\nu(x)=-\frac{\varkappa x A}{8\omega\nu(\nu^2-1)}(-1)^{\frac{\nu}{2}}\left[S_5(x)+S_6(x)\right] \quad (\nu=2,4\ldots), \tag{I3}$$

$$S_1(x)=-\beta''_0(x)+\frac{\mu}{x}\beta'_0(x), \qquad S_2(x)=4\left[\alpha_2(x)-\alpha_0(x)\right]$$

$$S_3(x)=-x\beta'''_\nu(x)+\frac{(2+\mu)\nu^2+1-\mu}{x}\beta'_\nu(x)-\frac{3\nu^2}{x^2}\beta_\nu(x)$$

$$S_4(x)=2\left[(2\nu+1)\alpha_{\nu+2}(x)+2\alpha_\nu(x)-(2\nu-1)\alpha_{\nu-2}(x)\right]+$$
$$+2x\left[\alpha'_{\nu+2}(x)-2\alpha'_\nu(x)+\alpha'_{\nu-2}(x)\right]$$

$$S_5(x) = -S_3(x) - (\nu^2 - 1)\left[\beta''_\nu(x) - \frac{\mu}{x}\beta'_\nu(x) + \frac{\mu\nu^2}{x^2}\beta_\nu(x)\right]$$

$$S_6(x) = -S_4(x) - 2(\nu^2 - 1)\left[2\alpha_\nu(x) - \alpha_{\nu+2}(x) - \alpha_{\nu-2}(x)\right]. \qquad (\text{I4})$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по x .

Полученные решения совместно с общим решением однородного уравнения (I) могут быть использованы для расчета круговых панелей цилиндрической оболочки на локальные нагрузки.

Литература

I. Лурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек. ОГИЗ, I947.

2. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. Гостехиздат, I949.

3. Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Труды КуАИ, вып.48, I97I.

4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. ГИФМЛ, I967.

5. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Часть первая. ИЛ, I949.