КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
ТРУДЫ. ВЫПУСК XXIV. 1966 г.
Вопросы механики жидкостей и газов

В. М. ГОЛОВИН, М. Я. СЫЧЕВ

ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕГО ТЕПЛООБМЕНА НА ДИССИПАТИВНЫЙ НАГРЕВ ЖИДКОСТИ ПРИ ЛАМИНАРНОМ ДВИЖЕНИИ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКИМИ СТЕНКАМИ

Обозначения

T — температура жидкости;
T_0 — температура окружающей среды;
V — скорость течения;
W — средняя по объемному расходу Q скорость;
μ, ρ, c, λ — соответственно динамическая вязкость, плотность, теплоемкость и теплопроводность жидкости;
Pe — число Пекле;
Re — число Рейнольдса;
$Nu_k = \frac{k2h}{\lambda}$ — граничное число Нуссельта;
$2h$ — ширина канала;
k — коэффициент теплообмена с окружающей средой,

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\delta_w}{\lambda_w}$$

α — коэффициент теплоотдачи от наружной поверхности стенок канала в окружающую среду;
δ_w — толщина стенок канала;
λ_w — теплопроводность материала стенок,
$D = \frac{\mu}{\lambda} w^2$ — диссипативный фактор.

В работе исследуется влияние внешнего теплообмена на диссипативный нагрев вязкой ньютоновской жидкости при ламинарном режиме течения в щелевом канале между параллельными плоскими стенками для случая, когда температура жидкости на входе в канал равна температуре окружающей среды T_0.

В основу математической формулировки задачи положены следующие допущения.

Толщина и теплопроводность материала стенок, а также внешний коэффициент теплоотдачи от их наружной поверхности в окружающую среду приняты постоянными и заданными величинами.

Предполагается, что распределение скоростей по сечению канала остается неизменным на всем его протяжении и в декартовой системе координат с осью x, направленной по оси канала в сторону течения, описывается формулой Стокса:

$$V = \frac{3}{2} w \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right).$$

Тем самым допускается, что теплофизические характеристики жидкости μ, ρ, c, λ являются константами. Кроме того, поскольку роль аксиальной теплопроводности в рассматриваемом процессе ничтожна [1] при достаточно больших числах Pe, соответствующий член в уравнении баланса энергии отбрасывается.

Так что задача формулируется уравнением

$$\frac{3}{2} \rho c w \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + 9\mu \frac{w^2}{h^2} \cdot \frac{y^2}{h^2} \tag{2}$$

и системой начальных и краевых условий:

$$T\Big|_{x=0} = T_0;\ k(T - T_0)\Big|_{y=h} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=h} \text{ при } x > 0;\quad \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{y\to\infty} \to 0; \tag{3}$$

Введение новой функции

$$\vartheta = T - T_0$$

и новых независимых переменных

$$\zeta = \frac{4}{3} \frac{1}{Pe} \frac{x}{h} \quad \text{и} \quad \xi = \frac{y}{h}$$

позволяет преобразовать (2) и (3) к системе:

$$(1 - \xi^2) \frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + 9D\xi^2. \tag{4}$$

$$\vartheta\Big|_{\zeta=0} = 0;\quad -\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}\Big|_{\xi=1} = \frac{Nu_k}{2} \vartheta\Big|_{\xi=1} \text{ при } \zeta > 0;\quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}\Big|_{\xi=0} = 0;\quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}\Big|_{\zeta\to\infty} \to 0. \tag{5}$$

Решением уравнения (4), удовлетворяющим условиям (5), является функция:

$$\vartheta = \frac{3}{4} D \left\{ \left[(1 - \xi^4) + \frac{8}{Nu_k} \right] + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp(-k_n^2 \zeta)\, \varphi_n(\xi) \right\}, \tag{6}$$

где

k_n — собственные числа уравнения:

$$\varphi_n'' - z\varphi_n' - \varkappa_n \varphi_n = 0.$$

$$z = \xi \sqrt{2k_n},\quad \varkappa_n = \frac{1 - k_n}{2}. \tag{7}$$

Собственные числа определяются из условий на стенках канала:

$$k_n - \frac{\psi_n'}{\psi_n}\Bigg|_{\xi=1} = \frac{Nu_k}{2}. \tag{8}$$

$\varphi_n(\xi) = \exp\left(-\frac{1}{2}k_n\xi^2\right)\psi_n(\xi)$ — собственные функции.

$$\psi_n(\xi) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-k_n)(5-k_n)\cdots(4m-3-k_n)}{(2m)!} k_n^m \xi^{2m} \tag{9}$$

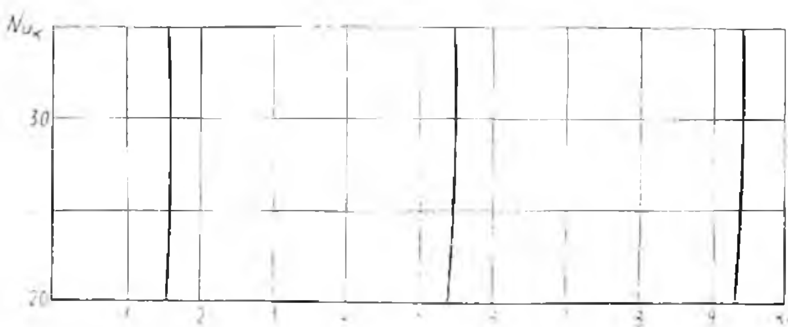
$$C_n = B_n - \left(1 + \frac{8}{Nu_k}\right)A_n, \tag{10}$$

A_n и B_n коэффициенты, определяемые по формулам

$$A_n = \frac{\int_0^1 (1-\xi^2)\varphi_n\,d\xi}{\int_0^1 (1-\xi^2)\varphi_n^2\,d\xi} = \frac{A_n'}{N_n^2}; \tag{11}$$

$$B_n = \frac{\int_0^1 \xi^4(1-\xi^2)\varphi_n\,d\xi}{\int_0^1 (1-\xi^2)\varphi_n^2\,d\xi} = \frac{B_n'}{N_n^2}. \tag{12}$$

График функции $Nu_k = 2\left[k_n - \frac{\psi_n'}{\varphi_n}\right]_{\xi=1}$ приведен на фиг. 1.
Значения собственных чисел k_n и собственных функций $\varphi_n(\xi)$ при $n = 0, 1, 2$, рассчитанные для $Nu_k = \infty$, 20, 2 на ЭВМ „Урал—1", даны в таблице 1.



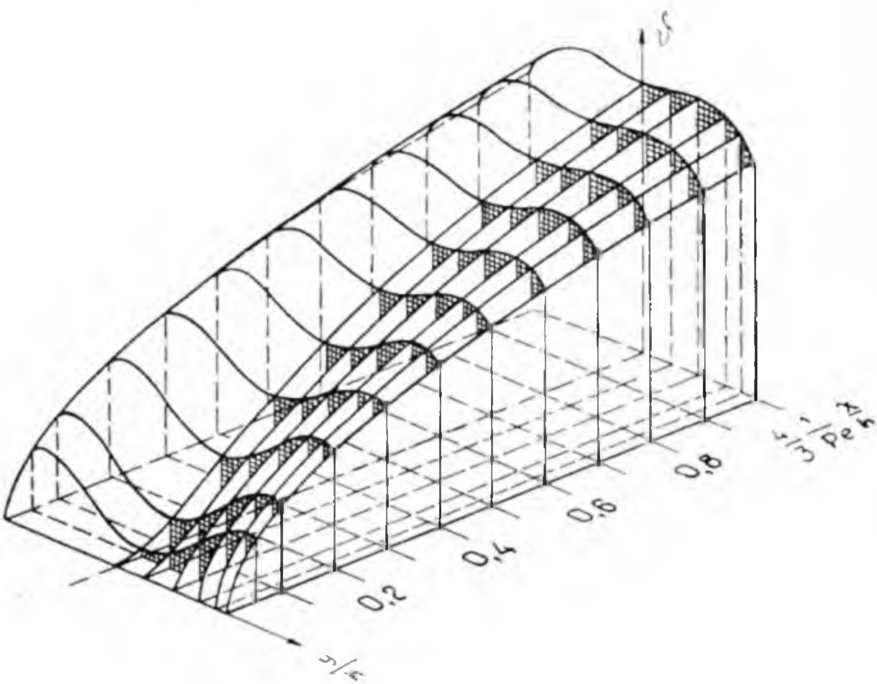
Фиг. 1.

Интегралы A_n', B_n', N_n^2 при $n = 0, 1, 2$ и $Nu_k = \infty$, 20, 2 наряду с соответствующими коэффициентами $C_n = B_n - \left(1 + \frac{8}{Nu_k}\right)A_n$ даны в таблице 2.

ξ	$Nu_K = \infty$			
	φ_0	φ_1	φ_2	φ_0
0	1,000	1,000	1,000	1,000
0,1	0,9 6	0,844	0,569	0,988
0,2	0,944	0,436	—0,3510	0,954
0,3	0,877	—0,121	—0,984	0,895
0,4	0,788	—0,633	—0,841	0,818
0,5	0,680	—0,933	—0,075	0,725
0,6	0,557	—1,101	+0,754	0,618
0,7	0,4240	—0,997	1,167	0,502
0,8	0,285	—0,731	1,050	0,380
0,9	0,1430	—0,379	0,582	0,254
1,0	0,000	0,000	0,000	0,127
k_n	1,082	5,670	9,668	1,5518
k_n^2	2,83	32,1	93,1	2,41

Таблица 2

	$Nu_к = \infty$			$Nu_к = 20$			$Nu_к = 2$		
n	0	1	2	0	1	2	0	1	2
A_n^1	0,5054	−0,1184	0,0633	0,739	−0,152	0,0740	3,0327	−0,2397	0,0835
B_n^1	0,0215	−0,428	0,0404	0,0262	−0,0495	0,0440	0,0435	−0,059	0,0423
N_n^2	0,421	0,3958	0,393	0,446	0,4074	0,402	0,557	0,4118	0,400
C_n	−1,15	+0,191	−0,059	−1,597	+0,251	−0,076	−5,36	+0,439	−0,103



Фиг. 2.

На фиг. 2 в качестве примера представлен рельеф диссипативного температурного напора (6) при $Nu = 2$. Температура внутренней поверхности стенки канала определяется из (6) при $\xi = 1$.

$$\vartheta_w = \frac{3}{4} D \left[\frac{8}{Nu_k} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n (1) \exp(-k_n^2 \zeta) \right]. \tag{13}$$

Величина среднего по объемному расходу температурного напора, определяемая по формуле

$$\vartheta_c = \frac{2}{Q} \int_0^h v \vartheta dy,$$

описывается рядом:

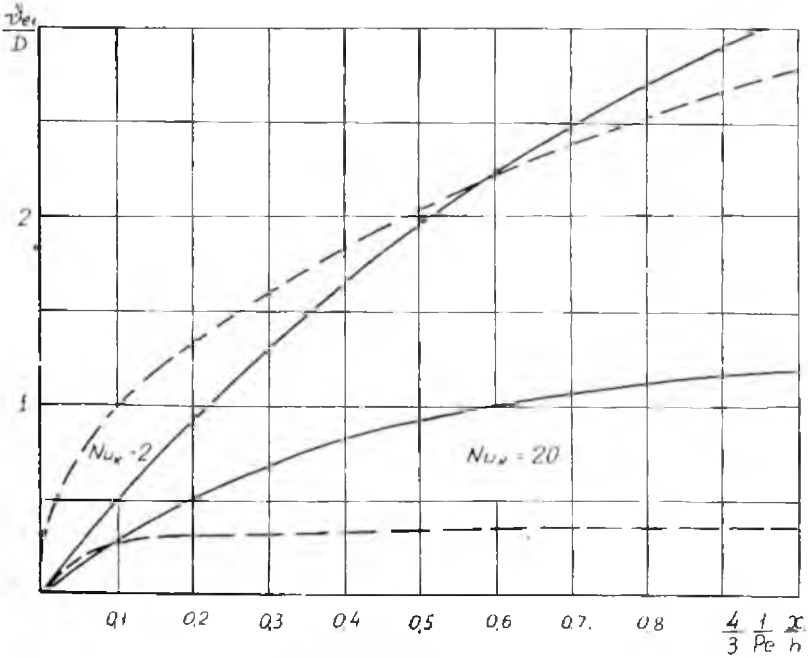
$$\vartheta_c = \frac{3}{4} D \left[\left(\frac{32}{35} + \frac{8}{Nu_k} \right) + \frac{3}{4} Nu_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \varphi_n (1)}{k_n^2} \exp(-k_n^2 \zeta) \right]. \tag{14}$$

Из (13) и (14) при $\zeta \to \infty$ получаем еще соответственно

$$\vartheta_w (\infty) = \frac{6D}{Nu_k}, \tag{15}$$

$$\vartheta_c (\infty) = 6D \left(\frac{4}{35} + \frac{1}{Nu_k} \right). \tag{16}$$

На фиг. 3 приведены графики изменения среднего температурного напора и температуры внутренней поверхности стенки (пунктир) по длине канала.



Фиг. 3.

Анализ полученных результатов позволяет вскрыть ряд интересных качественных сторон механизма влияния внешнего теплообмена на диссипативный нагрев жидкости за счет работы сил внутреннего трения.

Рассмотрение формулы (6), а также фиг. 2 показывает, что при конечном и постоянном значении внешнего коэффициента теплоотдачи α диссипативный нагрев жидкости на небольших расстояниях от входа в канал приводит к относительно более быстрому росту температуры стенок и пристенного слоя по сравнению с температурой ядра течения. При этом по мере уменьшения внешней теплоотдачи, увеличения толщины и снижения теплопроводности стенок, совокупно характеризуемых падением граничного числа Нуссельта — Nu_k, описываемое явление распространяется на все большую часть протяженности канала. Это обстоятельство наглядно иллюстрируется фиг. 3. Изучение (6) указывает также на то, что по мере падения Nu_k температурная стабилизация потока достигается на все более значительных расстояниях от входа в канал, что находится в полном соответствии с очевидными физическими представлениями. Как видно из (16), предельная величина среднего температурного напора существенно зависит от величины диссипативного фактора D, который в свою очередь в зависимости от расхода жидкости меняется в широких пределах.

Ясно также, что роль диссипативного фактора D возрастает с уменьшением Nu_k. Так например, при прокачивании авиационного масла МК—22 с температурой на входе $T_0 = 40$ С, со скоростью $\omega = 1$ *м/сек*, $D = 0{,}85$. Соответствующий предельный температурный напор при $Nu_k = 20$ $\vartheta_c(\infty)\big|_{Nu_k=20} = 0{,}84$ С. При $Nu_k = 2$ $\vartheta_c(\infty)\big|_{Nu_k=2} = 3{,}13$ С. При $\omega = 2$ *м/сек* $D = 3{,}4$. В этом случае при $Nu_k = 20$ $\vartheta_c(\infty) = 3{,}35$ С, а при $Nu_k = 2$ $\vartheta_c(\infty)\big|_{Nu_k=2} = 12{,}5$ С.

Поэтому к выбору значений $\nu = \text{const}$ и $\lambda = \text{const}$ при расчете величины D при больших расходах и малых значениях Nu_k следует подходить с осторожностью, используя метод последовательных приближений.

Приведенные в работе таблицы позволяют произвести уточненный расчет диссипативного нагрева лишь при $Nu_k = \infty$, 20, 2. Для более грубых приближенных расчетов при любых Nu_k можно использовать график на фиг. 1.

ВЫВОДЫ

1. Приведено аналитическое решение задачи о диссипативном нагреве жидкости при ламинарном движении в щелевом канале между параллельными плоскими стенками при наличии теплообмена с окружающей средой.

2. Вскрыты качественные особенности механизма влияния внешнего теплообмена на диссипативное температурное поле.

3. Показано, что по мере ухудшения условий теплообмена с окружающей средой, совокупно характеризуемых значением граничного числа Nu_k, диссипативный нагрев жидкости возрастает.

4. Приведенные численные примеры показывают необходимость оценки величины диссипативного нагрева при проектировании соответствующих технических устройств, работающих в ухудшенных условиях теплообмена с жидкостями высокой вязкости.