КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
ТРУДЫ. ВЫПУСК XXIV. 1966 г.
Вопросы механики жидкостей и газов

Л. И. ЖЕМКОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ МЕТОДОМ СРЕДНЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ В НАЧАЛЬНЫХ СТАДИЯХ ПРОЦЕССА ТЕПЛООБМЕНА

В исследованиях теплообмена очень часто возникает задача определения коэффициента теплоотдачи как основной характеристики теплообмена.

Определение коэффициента теплоотдачи требует знания потока тепла в функции времени и координат:

$$\alpha(x, y, z, \tau) = \frac{q(x, y, z, \tau)}{\vartheta(x, y, z, \tau)}.$$

Если определение избыточной температуры на поверхности не вызывает особых затруднений, то определение потока тепла содержит в себе ряд трудностей экспериментального характера.

Таким образом, задача определения граничных условий сводится к определению локальных тепловых потоков через поверхность тела.

Среди методов определения коэффициента теплоотдачи получили распространение методы регулярного режима, метод «двух точек», экспоненциальный метод и метод средней температуры [1], [2]. Однако следует отметить, что регулярный режим не всегда интересует исследователя и не для всех геометрических форм возможен, экспоненциальный метод требует создания условий «тонкого тела» $Bi \to Bi_{min}$.

Весьма интересен метод двух точек, разработанный О. И. Кастелиным, но он применим не для всех форм тел.

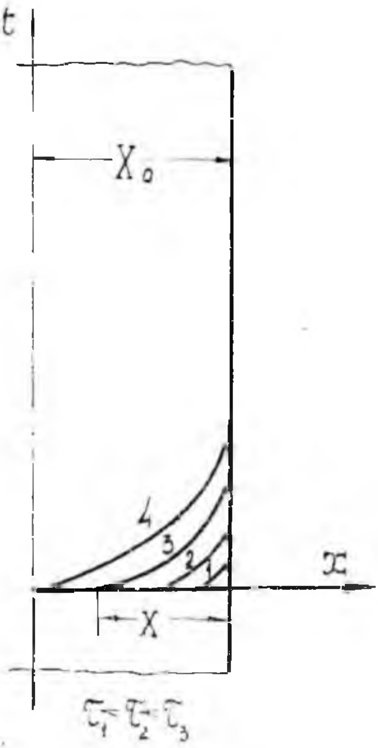
Перспективным является метод средней температуры, разработанный для периода стабилизированного процесса теплообмена Е. В. Кудрявцевым и Н. В. Шумаковым. Авторами этого метода было показано, что при самых разнообразных условиях на границе тела координата средней температуры сохраняется неизменной.

Этот метод позволил осуществить автокалориметрирование, т. е. определение теплообмена тела по тепловому состоянию внутри тела. С помощью этого метода была обнаружена зависимость коэффициента теплоотдачи от материала и размеров тела [2]. Недостатком метода средней температуры является то, что он пригоден лишь для стабилизированного теплообмена.

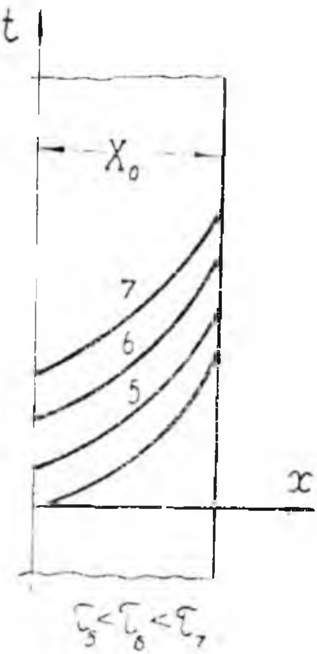
Однако наибольший интерес представляет исследование поведения коэффициента теплоотдачи в начальные моменты процесса.

Очевидно, что с самого начала процесса существует, в силу сплошности материала, точка, температура в которой равна средней по объему температуре тела. Эта точка перемещается от поверхности тела в глубинные слои. К началу стабилизированного процесса перемещение этой точки прекращается и в дальнейшем можно исследовать изменение во времени средней температуры в этой неподвижной точке.

Метод средней температуры можно было бы применить и для начальных стадий процесса, если для каждого момента времени найти соответствующую координату средней температуры. Тогда в эксперименте нетрудно будет найти изменение средней тем-



Фиг. 1.



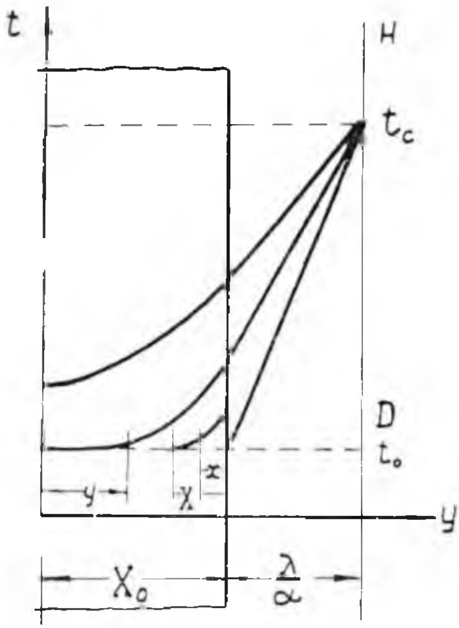
Фиг. 2.

пературы во времени. Достаточно найти точки средней температуры для интересующих исследователя моментов времени и разместить в этих точках датчики температуры. Температура в этих точках будет равна средней температуре в единственные моменты, соответствующие этим координатам.

Для определения зависимости координаты средней температуры от времени можно воспользоваться приближенными методами решения уравнения теплопроводности, использующими представление температурного поля в виде полиномов. Эти методы, несколько отличающиеся друг от друга, разрабатывались А. И. Вейником и Т. Р. Гудмэном [3], [4].

Используя метод А. И. Вейника для граничных условий 3-го рода, разобьем весь процесс теплопроводности на два различных этапа.

Первый этап отличается тем, что процесс охватывает лишь часть тела, локализован в слое, толщина которого увеличивается по мере прогрева тела. Температура в центре тела неизменна до момента, пока толщина прогретого слоя не станет равной полному характерному размеру тела, например, полутолщине пластины при симметричном теплообмене, радиусу шара и т. п. После этого идет второй этап нагрева всего тела до конца процесса.



Фиг. 3.

На фиг. 1 показан первый этап, а на фиг 2 — второй этап процесса. Рассмотрим на примере симметричного нагрева бесконечной плоской стенки приближенное решение задачи о средней температуре. Схема задачи показана на фиг. 3.

Для 1-го этапа толщина прогретого слоя X изменяется от нуля до X_0. Таким образом, для этого слоя имеем перемещающиеся координаты t—X, которые (с ростом X) устремляются к общему началу координат.

Температурное поле в стенке ищем в виде:

$$t = (t_n - t_0)\left(1 - \frac{x}{X}\right)^n + t_0 \quad \text{(1-й этап)}. \tag{1}$$

$$t = (t_n - t_y)\left(1 - \frac{x}{X_0}\right)^n + t_y \quad \text{(2-й этап)}. \tag{2}$$

Здесь n — некоторая константа.

Из фиг. 3, используя понятие о направляющей точке, получим:

$$t_{п} - t_0 = \frac{t_c - t_0}{1 + \frac{n}{\Delta \cdot Bi}}, \tag{3}$$

где $\Delta = \frac{X}{X_0}$ — отношение толщины прогретого слоя к толщине тела;

$$Bi = \frac{\alpha}{\lambda} \cdot X_0.$$

Температурная функция для 1-го периода имеет вид по [1]:

$$\Theta = 1 - \frac{1}{1 + \frac{n}{\Delta \cdot Bi}} \left(1 - \frac{\delta}{\Delta}\right)^n, \tag{4}$$

где

$$\delta = \frac{x}{X_0}; \tag{5}$$

$$\Theta = \frac{t_c - t}{t_c - t_0}. \tag{6}$$

Найдем соотношение для средней температуры Θ_m:

$$\Theta_m = \frac{1}{\Delta} \int\limits_0^{\Delta} \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{n}{\Delta \cdot Bi}} \left(1 - \frac{\delta}{\Delta}\right)^n\right] d\delta = 1 - \frac{1}{1 + \frac{n}{\Delta \cdot Bi}} \cdot \frac{1}{n+1}. \tag{7}$$

Приравняв (7) и (4), найдем координату средней температуры для первого периода:

$$1 - \frac{1}{1 + \frac{n}{\Delta \cdot Bi}} \cdot \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{n}{\Delta \cdot Bi}} \left(1 - \frac{\delta}{\Delta}\right)^n \tag{8}$$

или

$$\left(1 - \frac{\delta}{\Delta}\right)^n - \frac{1}{n+1} = 0. \tag{9}$$

Решение при $n = 2$ дает

$$x_m \approx 0.423X. \tag{10}$$

Очевидно, что точка средней температуры перемещается в сторону центра пластины с ростом X, т. к. $X = X(\tau)$.
При $\tau \to \tau_0$ $X \to X_0$.

Формула для x_m справедлива лишь до X равного X_0. После прогрева тела наступает регулярный режим, где:

$$x_m = X_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \text{const}.$$

Имеется следующая связь между толщиной прогретого слоя X и временем для 1-го периода процесса:

$$F_0 = \frac{1}{2n(n+1)}\Delta^2 + \frac{1}{n+1}\cdot\frac{\Delta}{Bi} - \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{Bi^2}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\Delta\cdot Bi\right). \quad (11)$$

Из (11) можно получить $\Delta = \frac{X}{X_0} = f(F_0)$ в виде

$$\Delta = \sqrt{6F_0} \quad (12)$$

или

$$X = X_0\sqrt{6F_0}. \quad (13)$$

С учетом (13) получим из (10):

$$x_m \simeq 0{,}423\sqrt{6F_0}\cdot X_0. \quad (14)$$

$$x_m \simeq 1{,}03\sqrt{F_0}\cdot X_0. \quad (15)$$

Или так:

$$x_m \simeq \sqrt{a\tau}. \quad (16)$$

Представляет интерес исследовать координату средней температуры для второго периода процесса, когда по [3]:

$$\Theta = \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{n}{Bi}}\left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right] e^{-\frac{1}{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{Bi}}(F_0 - F_{01})}. \quad (17)$$

Из (17) средняя температура равна:

$$\Theta_m = e^{-\frac{1}{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{Bi}}(F_0 - F_{01})}\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{n}{Bi}}\cdot\frac{1}{n+1}\right). \quad (18)$$

Из (18) и (17) координата средней температуры равна, если принять $n = 2$:

$$x_m = \frac{X_0}{\sqrt{3}} = X_0\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (19)$$

Выражение (19) совпадает с координатой средней температуры, найденной впервые Е. В. Кудрявцевым и Н. В. Шумаковым при разработке методов определения граничных функций теплообмена. Проделанные выкладки являются проверкой применимости приближенного метода А. И. Вейника [3] к исследованию таких задач.

ВЫВОДЫ

Предложен метод определения граничных функций для иррегулярного режима нестационарного теплообмена на основе приближенного метода решения уравнения теплопроводности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Кондратьев. Регулярный тепловой режим, ГИТТЛ, 1952.
2. Е. В. Кудрявцев, К. Н. Чакалев, Н. В. Шумаков. Нестационарный теплообмен. Изд. АН СССР. М., 1961.
3. А. И. Вейник. Приближенный метод решения задач теплопроводности. ИФЖ № 2, 1958.
4. Т. Р. Гудмэн. Интеграл теплового баланса. Trans ASME 80, 335—342, 1958.