КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
ТРУДЫ. ВЫПУСК XXIV. 1966 г.
Вопросы механики жидкостей и газов

А. А. ГУСАКОВ, А. В. КОСТЕНКО

О ТЕОРЕМЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ В КОМПЛЕКСНОМ ИСЧИСЛЕНИИ

При решении дифференциальных уравнений, в частности, уравнений с запаздывающим аргументом, описывающих процессы, скорость которых определяется их предшествующим состоянием, применимы теоремы запаздывания и упреждения, вариант доказательства которых приводится ниже.

Теорема запаздывания. *Для того, чтобы функция $f(t-\tau)$ (τ — положительное число) имела своим комплексным изображением выражение $e^{-i\nu\omega\tau}\cdot\dot{F}_\nu$ необходимо и достаточно, чтобы $f(t-\tau)$ тождественно равнялась нулю в интервалах $(-\infty, \tau)$ и $(T-\tau, T)$ (T — длина отрезка интервала $(0, T)$, $\tau < T$).*

Доказательство. Необходимость условия вытекает непосредственно из тождества

$$e^{-i\nu\omega\tau}\cdot\dot{F}_\nu = e^{-i\nu\omega\tau}\cdot\frac{2i}{T}\int_0^T e^{-i\nu\omega t}\cdot f(t)\,dt, \tag{1}$$

которое после очевидных преобразований можно записать в виде:

$$e^{-i\nu\omega\tau}\cdot\dot{F}_\nu = \frac{2i}{T}\int_\tau^{T+\tau} e^{-i\nu\omega\Theta}\cdot f(\Theta-\tau)\,d\Theta, \tag{2}$$

где $\Theta = t+\tau$.

Соотношение (2) верно для функций, равных нулю в интервалах $(-\infty, \tau)$ и $(T-\tau, T)$.

Достаточность. Пусть $f(t-\tau)=0$ в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(T-\tau, T)$, тогда применяя прямое комплексное преобразование Фурье к функции $f(t-\tau)$, будем иметь:

$$K_\nu[f(t-\tau)] = \frac{2i}{T}\int_0^T e^{-i\nu\omega t}\cdot f(t-\tau)\,dt. \tag{3}$$

В правой части выражения (3) сделаем замену переменной: $t-\tau=\Theta$, тогда

$$\frac{2i}{T}\int_{0}^{T} e^{-i\nu\omega t}\cdot f(t-\tau)\,dt=\frac{2i}{T}\int_{-\tau}^{T-\tau} e^{-i\nu\omega(\tau+\Theta)}\cdot f(\Theta)d\Theta. \tag{4}$$

Так как $f(t-\tau)\equiv 0$ при $T-\kappa,<t<\tau$ то правая часть (4) примет вид:

$$\frac{2i}{T}\int_{-\tau}^{T-\tau} e^{-i\nu\omega(\tau+\Theta)}\cdot f(\Theta)\,d\Theta=e^{-i\nu\omega\tau}\frac{2i}{T}\int_{0}^{T} e^{-i\nu\omega\Theta}\cdot f(\Theta)\,d\Theta. \tag{5}$$

Выражение

$$\frac{2i}{T}\int_{0}^{T} e^{-i\nu\omega\Theta}\cdot f(\Theta)\,d\Theta=\dot{F}_\nu- \tag{6}$$

представляет собой комплексную амплитуду ν — ой гармоники функции $f(\Theta)$. Учитывая (6), (5), (4) и соотношение (3), получим:

$$K_\nu\,[f(t-\tau)]=e^{-i\nu\omega\tau}\cdot\dot{F}_\nu\,. \tag{7}$$

Аналогично высказанным соображениям можно доказать теорему упреждения:

$$K_\nu\,[f(t+\tau)]=e^{i\nu\omega\tau}\,\dot{F}_\nu\,. \tag{8}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Е. Пухов. Комплексное исчисление. Киев. 1961.