КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
ТРУДЫ. ВЫПУСК XX, ЧАСТЬ II, 1965 г.
Вопросы технологии производства летательных аппаратов

Б. С. ЦФАС

ЗАМКНУТЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ Н. Е. ЖУКОВСКОГО О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НАГРУЗКИ ПО ВИТКАМ НАРЕЗОК ВИНТА И ГАЙКИ

Задача о распределении нагрузки по виткам нарезок винта и гайки впервые была решена Н. Е. Жуковским [1]. Решение Н. Е. Жуковского основано на допущении о бесконечно большом числе сопряженных витков нарезок. Благодаря такому допущению указанное решение оказалось очень несложным. Оно имеет форму бесконечной непрерывной убывающей геометрической прогрессии

$$N_1,\ N_2 = q\cdot N_1, \cdots,\ N_i = q^{i-1}\cdot N_1, \tag{1}$$

знаменатель которой

$$q = 1 + \frac{a}{2} - \sqrt{\left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 - 1}, \tag{2}$$

а первый член

$$N_1 = (1 - q)\cdot P. \tag{3}$$

В равенствах (1), (2) и (3) содержатся обозначения: N_1, $N_2, \cdots, N_i$ — усилия от внешней осевой нагрузки P, приходящиеся соответственно на 1-й, 2-й от рабочего основания гайки и последующие сопряженные витки нарезок винта и гайки, a — отношение суммарной податливости тел винта и гайки, взятой для их длины в один шаг нарезок, к суммарной податливости нарезок винта и гайки на той же длине.

Решение Н. Е. Жуковского не является замкнутым, осуществлено в приближенном виде и, как это показно в [2], дает более или менее достоверные результаты подсчета величин усилий N_i только для тех винтовых пар, относительная податливость которых сравнительно велика. При этом расчетная сумма $\sum_1^n N_i$ из действительного числа n членов прогрессии (1), равного фактическому числу сопряженных витков нарезок винта и гайки, близка к величине полной нагрузки P. В остальных случаях эта сумма существенно отличается от P, и указанное решение неприемлемо.

Выясним, можно ли в таких случаях повысить точность этого решения, пользуясь приемом повторных приближений, предложенным в [2] для разработанного там другого приближенного решения рассматриваемой задачи?

Суть названного приема состоит в том, что разность $P_* = P - \sum_1^n N_i$, в которой N_i — расчетные значения усилий, определенные из незамкнутого решения Н. Е. Жуковского, принимается за фиктивную дополнительную осевую нагрузку, действующую вместе с действительной нагрузкой P. Причем, нагрузка P_* считается распределенной по виткам по тому же закону, по которому, согласно незамкнутому решению, по ним распределена нагрузка P. Этот прием, естественно, может быть повторен столько раз, сколько нужно, чтобы полученная с его помощью новая расчетная сумма $\sum_1^n N_i$ мало отличалась от P. Результаты использования такого приема проиллюстрируем на численном примере.

Пусть известно, что $n=6$, $q=0{,}9$. Из уравнений (1), (2) и (3) находим первые приближения значений N_i. Такие величины приведены во 2-м столбце табл. 1. Вторые приближения N_{i_*}, согласно предыдущему, определим как части от суммы действительной и фиктивной нагрузок $P_* = P - \sum_1^n N_i = P \cdot (1 - 0{,}4686)$, $N_{1_*} = N_1 + 0{,}1 \cdot P_*$, $N_{2_*} = 0{,}9 \cdot N_{1_*}$ и т. д. Числовые значения вторых приближений показаны в 3-м столбце той же таблицы. Отыскивая третьи приближения, сначала найдем соответствующую фиктивную нагрузку $P_{**} = P - \sum_1^n N_{i_*} = P \cdot (1 - 0{,}7174)$, а затем — значения таких приближений: $N_{1_{**}} = N_{1_*} + 0{,}1 \cdot P_{**}$, $N_{2_{**}} = 0{,}9\ N_{1_{**}}$ и т. д. Аналогичным образом определяем четвертые и последующие приближенные значения усилий, действующих на витки нарезок.

Таблица 1

Усилия на витках	1-е приближения	2-е приближения	3-и приближения	4-е приближения	5-е приближения	6-е приближения	7-е приближения	8-е приближения
$N_1 =$	$0{,}1000 \cdot P$	$0{,}1531 \cdot P$	$0{,}1814 \cdot P$	$0{,}1965 \cdot P$	$0{,}2044 \cdot P$	$0{,}2086 \cdot P$	$0{,}2109 \cdot P$	$0{,}2120 \cdot P$
$N_2 =$	$0{,}0900 \cdot P$	$0{,}1378 \cdot P$	$0{,}1633 \cdot P$	$0{,}1769 \cdot P$	$0{,}1841 \cdot P$	$0{,}1877 \cdot P$	$0{,}1898 \cdot P$	$0{,}1908 \cdot P$
$N_3 =$	$0{,}0810 \cdot P$	$0{,}1240 \cdot P$	$0{,}1469 \cdot P$	$0{,}1592 \cdot P$	$0{,}1657 \cdot P$	$0{,}1690 \cdot P$	$0{,}1708 \cdot P$	$0{,}1717 \cdot P$
$N_4 =$	$0{,}0729 \cdot P$	$0{,}1116 \cdot P$	$0{,}1322 \cdot P$	$0{,}1433 \cdot P$	$0{,}1491 \cdot P$	$0{,}1521 \cdot P$	$0{,}1538 \cdot P$	$0{,}1547 \cdot P$
$N_5 =$	$0{,}0656 \cdot P$	$0{,}1005 \cdot P$	$0{,}1190 \cdot P$	$0{,}1289 \cdot P$	$0{,}1342 \cdot P$	$0{,}1369 \cdot P$	$0{,}1388 \cdot P$	$0{,}1392 \cdot P$
$N_6 =$	$0{,}0591 \cdot P$	$0{,}0904 \cdot P$	$0{,}1071 \cdot P$	$0{,}1160 \cdot P$	$0{,}1208 \cdot P$	$0{,}1232 \cdot P$	$0{,}1245 \cdot P$	$0{,}1253 \cdot P$
$\sum_1^n N_i =$	$0{,}4686 \cdot P$	$0{,}7174 \cdot P$	$0{,}8489 \cdot P$	$0{,}9208 \cdot P$	$0{,}9583 \cdot P$	$0{,}9575 \cdot P$	$0{,}9886 \cdot P$	$0{,}9936 \cdot P$

Из табл. 1 видно, что рассмотренный прием повторных приближений не обеспечивает быстрой сходимости получаемых с его помощью результатов. Их сходимость можно заметно ускорить, поступая так:

Первые и вторые приближенные значения усилий N_i получаем предыдущим способом. Новые третьи приближения находим из равенств: $P_{**} = P - \sum_1^n N_{i_*} = 0{,}2826 \cdot P$, $N_{1_{**}} = N_{1_*} + 0{,}1531 \cdot P_{**} = 0{,}1964 \cdot P$, $N_{2_{**}} = 0{,}9 \times N_{1_{**}}$ и т. д. Значения новых третьих приближений показаны в табл. 2. Отыскание последующих новых приближений проводим аналогично определению новых третьих приближений. Из сравнения результатов, имеющихся в табл. 1 и 2 видно, что второй способ применения рассмотренного приема повторных приближений существенно ускоряет сходимость найденных с его помощью приближенных значений усилий N_i.

Прежде чем сопоставить такие значения усилий N_i с точными значениями этих усилий, сравним указанные приближенные значения с результатами другого, предложенного в [2] приближенного решения вышеназванной задачи.

Сообщенное в [2] приближенное решение имеет замкнутую форму, то есть оперирует действительным, а не условным, бесконечно большим числом сопряженных витков нарезок. Согласно этому решению усилия N_i образуют непрерывную убывающую геометрическую прогрессию с конечным числом членов n, причем, знаменатель такой прогрессии выражается ранее записанным уравнением (2), а ее первый член — уравнением (4), —

$$N_1 = \frac{1-q}{1-q^n} \cdot P. \qquad (4)$$

Пользуясь уравнениями (4) и (1), подсчитаем значения усилий N_i, соответствующие вышеуказанному числовому примеру ($n=6$, $q=0{,}9$). Такие значения показаны в 6-м столбце табл. 2.

Сравнивая вышеприведенное незамкнутое решение Н. Е. Жуковского, уточнение такого решения, достигнутое указанным приемом повторных приближений и замкнутое решение из [2] (см. табл. 1 и 2), заключаем, что уточнение незамкнутого решения Н. Е. Жуковского достигнутое приемом повторных приближений, приводит к результатам, тождественным тем, которые дает замкнутое приближенное решение из [2]. Однако последнее из таких решений имеет то важное преимущество, что позволяет просто и быстро получить окон-

Таблица 2

Усилия на витках	1-е приближения	2-е приближения	3-и ускоренные приближения	4-е ускоренные приближения	По решению, предложенному в 2	По точному решению	Δ%
$N_1 =$	$0,1000 \cdot P$	$0,1531 \cdot P$	$0,1964 \cdot P$	$0,2119 \cdot P$	$0,2134 \cdot P$	$0,1835 \cdot P$	14
$N_2 =$	$0,0900 \cdot P$	$0,1378 \cdot P$	$0,1764 \cdot P$	$0,1907 \cdot P$	$0,1921 \cdot P$	$0,1739 \cdot P$	11
$N_3 =$	$0,0810 \cdot P$	$0,1240 \cdot P$	$0,1591 \cdot P$	$0,1717 \cdot P$	$0,1729 \cdot P$	$0,1668 \cdot P$	4
$N_4 =$	$0,0729 \cdot P$	$0,1116 \cdot P$	$0,1432 \cdot P$	$0,1545 \cdot P$	$0,1556 \cdot P$	$0,1615 \cdot P$	4
$N_5 =$	$0,0656 \cdot P$	$0,1005 \cdot P$	$0,1289 \cdot P$	$0,1390 \cdot P$	$0,1400 \cdot P$	$0,1580 \cdot P$	9
$N_6 =$	$0,0591 \cdot P$	$0,0904 \cdot P$	$0,1160 \cdot P$	$0,1251 \cdot P$	$0,1260 \cdot P$	$0,1563 \cdot P$	20
$\sum_1^n N_i =$	$0,4686 \cdot P$	$0,7174 \cdot P$	$0,9200 \cdot P$	$0,9928 \cdot P$	$1,0000 \cdot P$	$1,0000 \cdot P$	0

чательные результаты. Остается проверить, являются ли эти результаты достоверными. Такая проверка без изложения подробностей была выполнена в [2]. Приведем здесь эту проверку в подробном виде с целью полноты освещения основных вопросов настоящей статьи. Для этого рассмотрим строгое прямое решение задачи Н. Е. Жуковского, впервые указанное и использованное в [2] для названной проверки. Суть такого решения — в следующем:

Записывается уравнение совместности деформаций тел винта и гайки и их нарезок, полученное Н. Е. Жуковским в [1]. Это уравнение имеет вид:

$$N_i - N_{i+1} = (P - N_1 - \cdots - N_i)\cdot a. \tag{5}$$

В случае винта и гайки с числом сопряженных витков n уравнение (5) может быть повторено $(n-1)$ раз. Так, при $n=6$ будет:

$$N_1 - N_2 = (P - N_1)\cdot a, \tag{5_1}$$

$$N_2 - N_3 = (P - N_1 - N_2)\cdot a. \tag{5_2}$$

. . . .

. . . .

$$N_5 - N_6 = (P - N_1 - \cdots - N_5)\cdot a. \tag{5_5}$$

Чтобы получить систему уравнений, разрешимую относительно всех n неизвестных N_i, уравнения (5) дополняются уравнением равновесия —

$$P - \sum_1^n N_i = 0. \tag{6}$$

Рассматривая уравнения (5) и (6) совместно, для $n=6$ найдем:

$$N_5 = (1 + a)\cdot N_6, \tag{7_1}$$

$$N_4 = (1 + 3\cdot a + a^2)\cdot N_6, \tag{7_2}$$

$$N_3 = (1 + 6\cdot a + 5\cdot a^2 + a^3)\cdot N_6, \tag{7_3}$$

$$N_2 = (1 + 10\cdot a + 15\cdot a^2 + 7\cdot a^3 + a^4)\cdot N_6, \tag{7_4}$$

$$N_1 = (1 + 15\cdot a + 35\cdot a^2 + 28\cdot a^3 + 9\cdot a^4 + a^5)\cdot N_6. \tag{7_5}$$

Из уравнений (6) и (7) получим:

$$N_1 = \frac{1 + 15\cdot a + 35\cdot a^2 + 28\cdot a^3 + 9\cdot a^4 + a^5}{6 + 35\cdot a + 56\cdot a^2 + 35\cdot a^3 + 10\cdot a^4 + a^5}\cdot P, \tag{8_1}$$

$$N_2 = \frac{1 + 10\cdot a + 15\cdot a^2 + 7\cdot a^3 + a^4}{6 + 35\cdot a + 56\cdot a^2 + 35\cdot a^3 + 10^4 + a^5}\cdot P, \tag{8_2}$$

. . . .

. . . .

$$N_6 = \frac{1}{6 + 35\cdot a + 56\cdot a^2 + 35\cdot a^3 + 10\cdot a^4 + a^5}\cdot P. \qquad (8_6)$$

Имея уравнения (8) строгого прямого решения, определим точные числовые значения усилий N_i, соответствующие величинам $n=6$ и $q=0,9$ вышерассмотренного численного примера. Для этого из уравнения (2) предварительно вычислим величину a, нужную для решения уравнений (8). Такая величина равна $\frac{1}{90}$. Точные значения усилий N_i, найденные из уравнений (8), приведены в 7-м столбце табл. 2. В 8-м столбце этой таблицы показаны ошибки величин N_i, полученных с помощью приближенного замкнутого решения, данного в [2].

Анализируя результаты, содержащиеся в табл. 2, и способы их получения, нетрудно сделать следующие выводы, дополняющие заключения, приведенные на стр. 220 и 222.

1. Действительное распределение нагрузки по виткам нарезок более равномерно, чем показываемое замкнутым приближенным решением, данным в [2].

2. Трудоемкость и громоздкость строгого прямого решения задачи о распределении нагрузки по виткам очень значительны, тогда как приближенное решение, указанное в [2], является предельно простым, доступным и универсальным для любых значений числа витков n.

3. Погрешность приближенного решения, изложенного в [2], мало существенна с точки зрения практических расчетов, и она несколько снижается с ростом числа витков n.

4. Изложенное в п. п. 1, 2 и 3 позволяет считать, что для практических расчетов распределения нагрузки по виткам нарезок вполне можно ограничиться использованием приближенного замкнутого решения, сообщенного в [2] и не нуждающегося в использовании приема повторных приближений. Использование этого приема для такого решения указано в [2] ошибочно.

Следует отметить, что приближенное замкнутое решение, данное в [2], было успешно применено Б. А. Морозовым в исследовании крупногабаритных резьбовых соединений мощных металлургических прессов [3].

Говоря о замкнутых решениях задачи Н. Е. Жуковского, нужно сказать, что первым такое решение выполнил К. И. Коленчук [4]. Его решение базируется на вышеприведенном уравнении (5) Н. Е. Жуковского, но не повторяет других замкнутых решений такой задачи. Решение К. И. Коленчука является оригинальным и строгим. Однако оно столь же трудоемко и громоздко, как и сообщенное здесь строгое прямое решение. В работах [2] и [5] решение К. И. Коленчука по недоразумению подверглось несправедливой критике.

Кроме вышеуказанных, известны и другие строгие решения задачи Н. Е. Жуковского. Одно из них осуществлено Л. Мадушкой посредством метода уравнений в конечных разностях [6] и, по свидетельству И. А. Биргера [7], характеризуется большой громоздкостью. Другое строгое ее решение в конечных разностях изложено в [5], где на его основе выяснен метод электрической аналогии распределения нагрузки по виткам нарезок и ряда других сходных элементов деталей машин и строительных конструкций. В работе [5] показано, что предложенное в ней решение в конечных разностях весьма сходно по результатам с точным решением указанной задачи Н. Е. Жуковского, полученным И. А. Биргером [7] в итоге интегрирования дифференциального уравнения 2-го порядка.

В заключение нужно сказать, что строгое прямое решение рассмотренной задачи выполнено и Н. Л. Клячкиным [8]. По своей сущности оно не отличается от вышеизложенного строгого прямого решения, впервые указанного и использованного в [2] для проверки предложенного там замкнутого приближенного решения.

В связи с упоминанием работы Н. Л. Клячкина, нельзя не отметить, что имеющаяся в ней ссылка на исследование [13] неудачна. Вопрос о действительном авторе этого исследования освещался в печати [9], а его подробный реферат опубликован в 1947 году [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Е. Жуковский. Распределение давлений на нарезках винта и гайки. Полн. собр. соч., т. VIII, ОНТИ, 1937.

2. Б. С. Цфас. Решение задачи Н. Е. Жуковского о распределении давлений на нарезках винта и гайки, осуществленное в замкнутой форме. — «Известия вузов, Машиностроение», 1961, № 9.

3. Б. А. Морозов, Моделирование и прочность металлургических машин, МАШГИЗ, 1963. (См. также Артюхов В. П. и Морозов Б. А. Исследование тяжелонагруженных крупных резьбовых соединений. — «Вестник машиностроения», 1963, № 2).

4. К. И. Коленчук, Распределение усилий в витках пары болт-гайка. — «Болтовые соединения», сб. ВНИТОМАШ, Киев, 1949.

5. Б. С. Цфас, Электрическое моделирование картины распределения

нагрузки по виткам нарезок винта и гайки. — «Труды Куйбышевского авиационного института», т. XVII, Куйбышев, 1963.

6. Maduschka L. Einfluss der Muttergevindeform auf die Beanspruchung von Schraubenverbindungen. — «CDI — Forschungcheft», 1936, B. 7.

7. И. А. Биргер, Расчет резьбовых соединений, ОБОРОНГИЗ, 1959.

8. Н. Л. Клячкин. К решению задачи о распределении давления по виткам резьбы. — «Вестник машиностроения», № 3. 1964.

9. «Вестник высшей школы», № 6, стр. 61. 1961.

10. Как предотвратить ослабление болтового соединения. — «Новое в иностранной технике станкостроения», бюллетень ЦБТИ НКСС СССР, № 1, 1947.