КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
ТРУДЫ. ВЫПУСК XX, ЧАСТЬ I, 1965 г.
Вопросы технологии производства летательных аппаратов

А. С. ШЕВЕЛЕВ, В. Я. ФАДЕЕВ

СУММИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Значимость проблемы точности для быстро развивающегося автоматизированного производства непрерывно возрастает. Для технологических процессов крупносерийного и массового автоматизированного производства возникает острая необходимость в проведении научно обоснованного расчета геометрической точности.

Анализу точности отдельных процессов (операций) посвящено значительное количество работ. Вопросы точности, относящиеся к технологическому процессу детали, т. е. к совокупности всех операций технологической цепочки, разработаны недостаточно. Необходимость разработки последней проблемы возникает при определении операционных размеров и допусков по всем операциям технологического процесса из условий оптимальных припусков и максимальной производительности.

При проектировании технологических процессов размерные и точностные расчеты производят решением размерных цепей, при котором возникает задача суммирования погрешностей, регламентированных на различных операциях.

Согласно теории размерных цепей, суммарная погрешность определяется из уравнения

$$\delta_z = \sum_{i=1}^{n} \delta_i, \tag{1}$$

где δ_z — суммарная погрешность (погрешность замыкающего размера);

δ_i — допуски или погрешности составляющих размеров;

n — общее число составляющих погрешностей.

Суммарная погрешность, определяемая по уравнению (1) как арифметическая сумма составляющих погрешностей (метод «максимума-минимума»), имеет завышенное значение.

Метод квадратного сложения, основанный на предположении, что все составляющие погрешности распределены по закону Гаусса, дает уменьшенное значение суммарного рассеивания.

Теоретико-вероятностный метод, разработанный профессором Н. А. Бородачевым, не получил распространения в практике вследствие трудности определения надежных значений коэффициентов, входящих в расчетные формулы. Как указывал сам автор метода, надежные численные значения этих коэффициентов трудно получить вследствие различий в ходе технологического процесса от партии к партии, которые обусловливаются неоднородностью первоначальной настройки, нерегламентированными во времени поднастройками, нестабильностью качества режущего инструмента и заготовок [1].

В данной работе для технологических процессов механической обработки, осуществляемых на предварительно настроенных станках, предлагается метод раздельного суммирования случайных и систематических погрешностей. Случайные погрешности суммируются в соответствии с правилами теории вероятностей, а систематические, вследствие указанных неоднородностей и различий в ходе технологического процесса, складываются арифметически.

Фиг. 1. Схема предельных состояний технологического процесса.

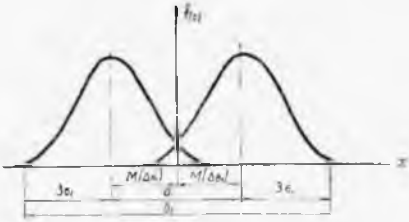
При работе на металлорежущих станках в начале обработки режущий инструмент настраивается в положение, соответствующее получению «настроечного размера». Во время обработки приходится прерывать процесс для поднастроек и смены инструмента.

Процесс получения какого-либо линейного размера можно характеризовать двумя его предельными состояниями, соответствующими началу и концу обработки партии деталей (фиг. 1).

Первое предельное состояние процесса можно характеризовать величиной среднего значения получаемых размеров $M[L]_0$ и величиной их мгновенного рассеивания $\Delta_{мгн_0}$ в начале обработки, второе — величиной $M[L]_k$ и $\Delta_{мгн_k}$ в конце обработки. Распределение мгновенного рассеивания линейных размеров можно считать, с достаточной для практических расчетов степенью точности, подчиняющимся закону Гаусса [2]. Величина мгновенного рассеивания $\Delta_{мгн}$ зависит от большого количества технологических факторов и может быть определена рассчетно-аналитическим методом [3]. Для действующих технологических процессов величина $\Delta_{мгн}$ определяется статистическим методом. В практике технологических точностных расчетов обычно принимается $\Delta_{мгн_0} = \Delta_{мгн_k}$ [3], [4].

Предельные состояния процесса можно представить и в виде отклонений размеров от середины поля допуска (фиг. 2).

Указанные предельные состояния хода технологического процесса можно принять за расчетные. В отдельных случаях для некоторых партий настройка может быть нерациональной с меньшим запасом на износ инструмента и процесс обработки может прерываться раньше вследствие преждевременных поднастроек или вынужденных смен инструмента. Для таких партий суммарная погрешность, рассчитанная по предлагаемому методу, будет определена с избытком, т. е. большей надежностью.



Фиг. 2. Распределение верхних и нижних отклонений в поле допуска.

Из фиг. 2 следует

$$M[\Delta_{B_i}] = \frac{\delta_i}{2} - 3\sigma_i$$

и

$$M[\Delta_{H_i}] = -\left(\frac{\delta_i}{2} - 3\delta_i\right),$$

где $M[\Delta_{B_i}]$, $M[\Delta_{H_i}]$ — математические ожидания верхнего и нижнего отклонений относительно середины поля допуска;

σ_i — среднее квадратичное отклонение мгновенного рассеивания $\left(\sigma_i = \frac{\Delta_{\text{мгн}_i}}{6}\right)$.

Таким образом, принимая значения верхних и нижних отклонений в поле допуска за случайные величины, имеющие нормальный закон распределения с параметрами $M[\Delta_{B_i}]$, $M[\Delta_{H_i}]$ и σ_i, можно эти отклонения суммировать по правилам теории вероятностей. На основании уравнений отклонений в размерных цепях и теоремы о числовых характеристиках случайных величин [5] можно записать:

$$M[\Delta_{B_\Sigma}] = \sum_{k=1}^{m} M[\Delta_{B_k}] - \sum_{j=1}^{s} M[\Delta_{H_j}] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\delta_k}{2} - 3\sigma_k\right) + \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\delta_j}{2} - 3\sigma_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\delta_i}{2} - 3\sigma_i\right).$$

$$\text{и } M[\Delta_{H_\Sigma}] = \sum_{k=1}^{m} M[\Delta_{H_k}] - \sum_{j=1}^{s} M[\Delta_{B_j}] =$$

$$= -\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\delta_k}{2} - 3\delta_k\right) - \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\delta_j}{2} - 3\sigma_j\right) = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\delta_i}{2} - 3\sigma_i\right).$$

где $M[\Delta_{B_\Sigma}]$, $M[\Delta_{H_\Sigma}]$ — математические ожидания верхнего и нижнего отклонений замыкающего размера относительно середины поля допуска;

k, m — индексы, относящиеся к увеличивающим размерам;

j, s — индексы, относящиеся к уменьшающим размерам.

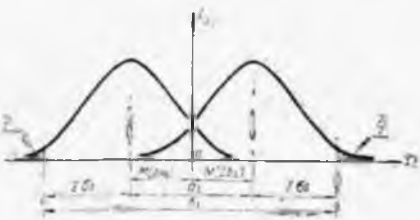
Предельная величина переменных систематических погрешностей a_i определяется (фиг. 2):

$$a_i = M[\Delta_{B_i}] - M[\Delta_{H_i}] = \delta_i - 6\sigma_i. \tag{2}$$

Величина погрешности замыкающего размера, обусловленная переменными систематическими факторами a_Σ (фиг. 3) определяется аналогично

$$a_\Sigma = M[\Delta_{B_\Sigma}] - M[\Delta_{H_\Sigma}] = \sum_{i=1}^{n}(\delta_i - 6\sigma_i). \tag{3}$$

Функциональную зависимость величины погрешности замыкающего размера, обусловленную случайными факторами $\Delta_{\Sigma_{сл}}$, и принимаемого процента производственного риска P_0 можно найти следующим образом.



Фиг. 3. Распределение верхних и нижних отклонений замыкающего размера.

Из фиг. 3 имеем:

$$\frac{\Delta_{\Sigma_{сл}}}{2} = z\sigma_\Sigma,$$

откуда
$$z = \frac{\Delta_{\Sigma_{сл}}}{2\sigma_\Sigma}. \tag{4}$$

Здесь z — величина возможного отклонения, выраженная в долях σ_Σ.

Среднеквадратичное отклонение погрешности замыкающего размера σ_Σ, обусловленное случайными факторами, определяется квадратичным суммированием [5].

$$\sigma_\Sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}.$$

Используя зависимость между z и площадью кривой нормального распределения [5], запишем:

$$0{,}01P_0 = 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}}dx;$$

используя функцию Лапласа,

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

получим

$$\Phi(z) = 1 - 0{,}01 \cdot P_0,$$

откуда

$$z = \Phi^{-1}(1 - 0{,}01 \cdot P_0). \tag{5}$$

Здесь $\Phi^{-1}(z)$ — функция, обратная по отношению к функции $\Phi(z)$.

Приравнивая правые части выражений (4) и (5), получим зависимость величины погрешности, обусловленной случайными факторами $\Delta_{\Sigma_{сл}}$ и принимаемого процента производственного риска P_0.

$$\Delta_{\Sigma_{сл}} = 2\sigma_\Sigma \Phi^{-1}(1 - 0{,}01 \cdot P_0). \tag{6}$$

Погрешность замыкающего размера δ_Σ представляет собой сумму случайных и систематических составляющих:

$$\delta_\Sigma = a_\Sigma + \Delta_{\Sigma_{сл}}.$$

Подставляя значения a_Σ и $\Delta_{\Sigma_{сл}}$ из (3) и (6), получим

$$\delta_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} (\delta_i - 6\sigma_i) + 2\sigma_\Sigma \Phi^{-1}(1 - 0{,}01 P_0). \tag{7}$$

Введем обозначение:

$$\frac{\delta_i - 6\sigma_i}{\delta_i} = \mu; \qquad 0 \leqslant \mu \leqslant 1. \tag{8}$$

Величина $\delta_i - 6\sigma_i$ представляет собой часть допуска, используемую на систематические погрешности. С помощью (8), формулу (7) можно представить в удобном для расчетов виде:

$$\delta_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \mu_i + 2\sigma_\Sigma \Phi^{-1}(1 - 0{,}01 P_0). \tag{9}$$

Суммарную погрешность δ_Σ можно представить как часть арифметической суммы составляющих погрешностей [6]

$$\delta_\Sigma = k \sum_{i=1}^{n} \delta_i; \quad 0 < k \leqslant 1, \tag{10}$$

где k — коэффициент суммирования.

Если расположить погрешности δ_i в ряд в порядке их возрастания

$$\delta_1 \leqslant \delta_2 \leqslant \ldots \leqslant \delta_n,$$

то можно записать

$$\delta_i = C_i \delta_1, \tag{11}$$

где

$$C_i = \frac{\delta_i}{\delta_1}; \; i = 1, \; 2, \ldots, n.$$

Тогда

$$\delta_\Sigma = k\delta_1 \sum_{i=1}^{n} C_i. \tag{12}$$

Из формулы (8) имеем

$$6\sigma_i = \delta_i(1-\mu_i), \tag{13}$$

так как

$$\sigma_\Sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2},$$

то

$$\sigma_\Sigma = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(1-\mu_i)^2}}{6}. \tag{14}$$

Подставляя в формулу (7) значения δ_i, σ_i и σ_Σ в соответствии с формулами (11), (13) и (14), получим:

$$\delta_\Sigma = \delta_1 \sum_{i=1}^{n} C_i - \delta_1 \sum_{i=1}^{n} C_i(1-\mu_i) +$$

$$+ \frac{1}{3}\delta_i \sqrt{\sum_{i=1}^{n} C_i^2(1-\mu_i)^2}\, \Phi^{-1}(1-0{,}01P_0),$$

или

$$\delta_\Sigma = \delta_1 \left\{ \sum_{i=1}^{n} C_i\mu_i + \frac{1}{3}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} C_i^2(1-\mu_i)^2}\, \Phi^{-1}(1-0{,}01P_0) \right\}. \tag{15}$$

Приравнивая правые части выражений (12) и (15), будем иметь

$$k\delta_1 \sum_{i=1}^{n} C_i = \delta_1 \left\{ \sum_{i=1}^{n} C_i\mu_i + \frac{1}{3}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} C_i^2(1-\mu_i)^2}\, \Phi^{-1}(1-0{,}01P_0) \right\},$$

откуда

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n} C_i\mu_i}{\sum_{i=1}^{n} C_i} + \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} C_i^2(1-\mu_i)^2}}{3\sum_{i=1}^{n} C_i}\, \Phi^{-1}(1-0{,}01P_0). \tag{16}$$

Формула (16) представляет собой функциональную зависимость коэффициента суммирования k от числа операционных погрешностей n, соотношений их допусков C_i, принимаемого значения производственного риска P_0 и коэффициентов μ_i.

При проектировании технологических процессов значениями коэффициентов μ_i можно задаваться в зависимости от требуемой стабильности получения размеров в заданных пределах.

Если принять $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n$, то формула (16) значительно упрощается. Так, при $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = 0{,}3$, будем иметь:

$$k = 0{,}3 + \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} C_i^2}}{4{,}28 \sum_{i=1}^{n} C_i} \Phi^{-1}(1 - 0{,}01 P_0). \tag{17}$$

При

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = 0{,}5.$$

$$k = 0{,}5 + \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} C_i^2}}{6 \sum_{i=1}^{n} C_i} \Phi^{-1}(1 - 0{,}01 P_0). \tag{18}$$

Формулы типа (17) и (18) легко могут быть табулированы или представлены в виде графиков, отображающих функциональную зависимость $k = f(P_0)$ при различном числе суммируемых погрешностей n и соотношений их допусков C_i.

Из формул (17) и (18) видно, что коэффициент суммирования при фиксированном проценте производственного риска P_0 зависит от значения множителя α

$$\alpha = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} C_i^2}}{\sum_{i=1}^{n} C_i} \tag{19}$$

В работе [8] показано, что значение α, а, следовательно, и коэффициент суммирования будет минимальным при

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 1,$$

или, что то же, при равенстве допустимых значений суммируемых погрешностей

$$\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_n.$$

Покажем, что α принимает максимальное значение при

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_{n-1} = 1; \; C_n > 1,$$

при условии

$$C_n \geqslant \sqrt{\frac{(n-1)\,(n-2)}{2}}.$$

При всех других соотношениях $C_2, C_3, \ldots, C_{n-1}$, находящихся в сегменте $[1, C_n]$ значение α будет меньше.

В соответствии с (19) можно записать.

$$\alpha_1^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} C_i^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} C_i\right)^2} = \varphi(1, 1, \ldots, 1, C_n) = \frac{n-1+C_n^2}{(n-1+C_n)^2},$$

$$\alpha_2^2 = \varphi(1, 1+\beta_2, \ldots, 1+\beta_{n-1}, C_n) =$$

$$= \frac{n-1+C_n^2+2\sum\limits_{i=2}^{n-1}\beta_i+\sum\limits_{i=2}^{n-1}\beta_i^2}{(n-1+C_n)^2+2(n-1+C_n)\cdot\sum\limits_{i=2}^{n-1}\beta_i+\left(\sum\limits_{i=2}^{n-1}\beta_i\right)^2};$$

$$0 \leqslant \beta_i \leqslant C_n - 1.$$

Для доказательства предположения требуется показать, что $\alpha_1^2 \geqslant \alpha_2^2$,
или

$$\frac{n-1+C_n^2}{(n-1+C_n)^2} \geqslant \frac{n-1+C_n^2+2\sum\limits_{i=2}^{n-1}\beta_i+\sum\limits_{i=2}^{n-1}\beta_i^2}{(n-1+C_n)^2+2(n-1+C_n)\sum\limits_{i=2}^{n-1}\beta_i+\left(\sum\limits_{i=2}^{n-1}\beta_i\right)^2}. \tag{20}$$

Так как $\sum\limits_{i=2}^{n-1}\beta_i > 0$, то можно записать неравенство, равносильное (20) в виде:

$$\frac{n-1+C_n^2}{(n-1+C_n)^2} \geqslant \frac{2\sum\limits_{i=2}^{n-1}\beta_i+\sum\limits_{i=2}^{n-1}\beta_i^2}{2(n-1+C_n)\sum\limits_{i=2}^{n-1}\beta_i+\left(\sum\limits_{i=2}^{n-1}\beta_i\right)^2}.$$

Обозначим:

$$h = \frac{\sum\limits_{i=2}^{n-1}\beta_i^2}{2\sum\limits_{i=2}^{n-1}\beta_i} \quad \text{и} \quad r = \frac{\sum\limits_{i=2}^{n-1}\beta_i}{2}.$$

Тогда:

$$\frac{n-1+C_n^2}{(n-1+C_n)^2} \geqslant \frac{1+h}{n-1+C_n+r}. \tag{21}$$

При всех значениях h и r, удовлетворяющих неравенству (21), наше предположение справедливо.

Легко видеть, что $h \leqslant r$. Положив $h = r$, получим неравенство

(22), все решения h которого являются решениями неравенства (21) при любом r.

$$C_n(n-1+C_n)(C_n-1) \geq h[(n-1)^2+ + 2C_n(n-1)-(n-1)]. \qquad (22)$$

Таким образом, значения h, при которых справедливо (21) определяется неравенством:

$$h \leq \frac{C_n(n-1+C_n)}{(n-1)^2+2C_n(n-1)-(n-1)} \qquad (23)$$

Выясним при каких значениях n и C_n неравенство (23) выполняется для всех h.

Так как

$$h \leq \frac{C_n-1}{2},$$

то

$$\frac{C_n-1}{2} \leq \frac{C_n(n-1+C_n)\cdot(C_n-1)}{(n-1)^2+2C_n(n-1)-(n-1)}.$$

Откуда

$$2C_n^2 \geq (n-1)(n-2).$$

Окончательно имеем:

$$C_n \geq \sqrt{\frac{(n-1)\ (n-2)}{2}}. \qquad (24)$$

Так, при

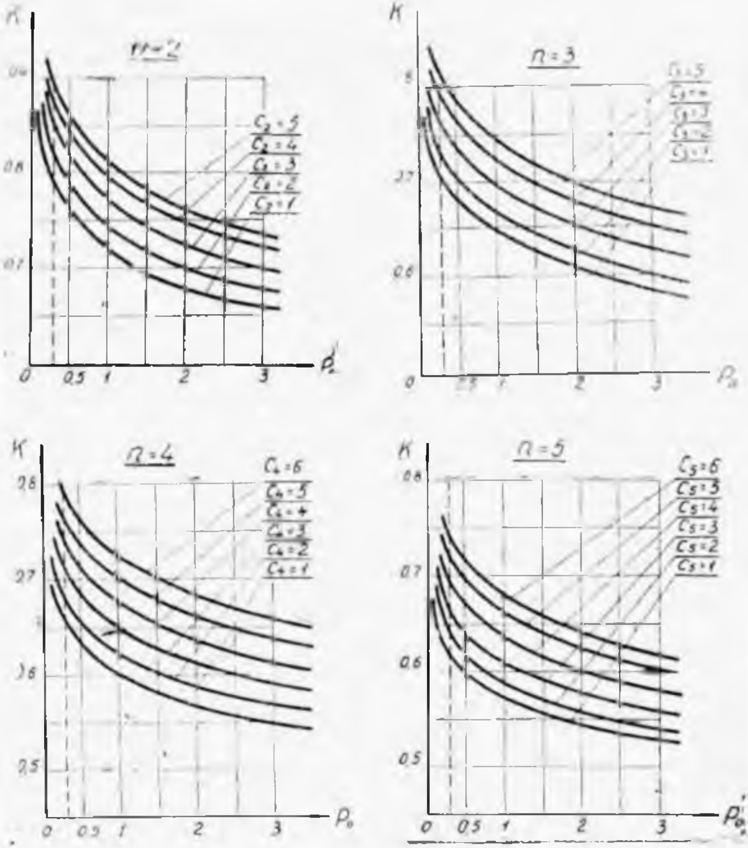
$$n=3\ \ C_n \geq 1;$$
$$n=4\ \ C_n \geq 1{,}73;$$
$$n=5\ \ C_n \geq 2{,}45;$$
$$n=6\ \ C_n \geq 3{,}16.$$

В суммируемом комплексе погрешностей обычно имеется одна или несколько погрешностей, значительно превосходящих по величине наименьшую δ_1. Поэтому полученный результат позволяет сократить число графиков зависимости $k = f(P_0)$, построив их лишь для различных C_k при равенстве всех других соотношений C_i.

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_{n-1}.$$

Для других вариантов значений $C_2, C_3, \ldots, C_{n-1}$ коэффициент суммирования по таким графикам будет определен с большей надежностью.

На фиг. 4 представлены графики $k = f(P_0)$, рассчитанные по формуле (17) для различных n и C_n. Наличие таких графиков значительно упростит расчетные работы технолога, т. к. суммарная погрешность согласно (10) определяется простым арифметическим суммированием с последующим умножением полученного значения на коэффициент суммирования $к$.



Фиг. 1. $\kappa = f(P_0)$ при различных значениях C_n и n.

ВЫВОДЫ

Полученные в результате данной работы формулы для суммирования операционных погрешностей позволяют с учетом процента производственного риска:

1. Определять точность взаимного расположения двух любых плоскостей, обработанных на различных операциях;

2. Производить анализ припусков при обработке плоских поверхностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. А. Бородачев. Расчетные методы выявления резервов производительности и точности производства в точном машиностроении и приборостроении. «Вопросы теории точности производства в приборостроении», Оборонгиз, М., 1959.

2. А. К. Кутай. Анализ точности и контроль качества в машиностроении. Машгиз, М., 1958.
3. А. П. Соколовский. Расчеты точности обработки на металлорежущих станках. Машгиз, М., 1952.
4. П. А. Кораблев. Точность обработки на металлорежущих станках в приборостроении, Машгиз, 1962.
5. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей, М., 1961.
6. А. С. Шевелев, Г. П. Федорченко. Определение погрешностей расположения поверхностей при обработке деталей. ИВУЗ «Авиационная техника», № 3, 1961.