

### III. КОНСТРУИРОВАНИЕ И РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ ДВИГАТЕЛЯ

УДК 621.643—752.001.24

*Н. С. Кондрашов, Л. А. Лашкова*

#### РАСЧЕТ ВИБРАЦИЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТРУБОПРОВОДОВ С УПРУГО-ДЕМПФИРУЮЩИМИ СВЯЗЯМИ ПРИ КИНЕМАТИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Основной фактор, от которого зависит надежность трубопроводов авиационных ГТД, — это вибрационные напряжения, возбуждаемые пульсациями внутреннего потока или вибрациями корпусов и достигающие наиболее опасных уровней на резонансных режимах. Поэтому для гашения резонансов трубопроводов в последнее время широко используются упруго-демпфирующие связи (УДС), позволившие существенно повысить надежность трубопроводных систем и двигателя в целом.

Для эффективного использования УДС необходимы расчетные проектировочные оценки, позволяющие определить оптимальный способ расстановки и оптимальные упруго-демпфирующие характеристики. В работе [1] опубликованы рекомендации для проектирования трубопроводных систем, полученные на базе расчетного анализа прямых трубопроводов с УДС методом, предложенным в работе [2].

Кроме проектировочных расчетов, всегда существует потребность в поверочных расчетах реальных трубопроводов с реальными характеристиками и расстановкой УДС и реальным полем вибраций. Необходимость в таких расчетах возникает также при конструкторско-доводочных работах, когда требуется определить эффективность различных мероприятий: изменение длины или конфигурации, введение дополнительных или перестановка существующих связей.

Динамические расчеты сложных трубопроводных систем под действием реальных нагрузок стали возможными только в последнее время в связи с широким внедрением в инженерную практику расчетов с помощью ЭВМ и после разработки надежных и хорошо приспособленных для ЭВМ расчетных алгоритмов. Здесь особенно следует указать на матричные рекуррентные методы динамических расчетов (различные варианты прогонки), которые позволяют на машине со средними возможностями, типа М-220, вести расчеты сложных трубопроводных систем.

В данной статье излагаются алгоритмы, приспособленные для расчета пространственных трубопроводов с УДС при кинематическом возбуждении детерминированной и случайной вибрацией. В основе алгоритмов систематически используется метод динамических жесткостей. В заключение приводятся некоторые результаты численной реализации разработанных алгоритмов.

## 1. КОНСТРУКТИВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ТРУБОПРОВОДНЫХ СИСТЕМ

Чтобы формализовать задачу расчета реальных трубопроводов, рассмотрим некоторые конструктивные особенности, которые имеют значение в динамических расчетах.

Каждый отдельный трубопровод представляет собой полый тонкостенный стержень кольцевого сечения, ось которого в общем случае представляет собой сложную пространственную кривую. Все многообразие конфигураций можно разделить на три типа:

— ось трубопровода имеет вид пространственной ломаной линии с небольшими закруглениями в местегиба, протяженность закруглений мала по сравнению с общей длиной трубопровода;

— ось трубопровода состоит из дуг окружностей или отрезков прямой и дуг окружностей с небольшими закруглениями в местах сочленения;

— произвольный криволинейный трубопровод.

В концевых и средних сечениях трубопроводы обычно соединяются с массивными агрегатами или корпусами, которые в дальнейших расчетах полагаются жесткими колеблющимися платформами. Связи вследствие их малой протяженности полагаются сосредоточенными. Жесткости связей концевых

сечений, как правило, бывают на несколько порядков выше жесткости связи в промежуточных сечениях.

Весьма распространенным вариантом является связь трубопроводов между собой или связь между отдельными точками в пределах одного трубопровода. В этом случае образуется сложная связанная система, исследование которой представляет большие трудности.

В ряде случаев отдельные участки трубопровода соединяются между собой сильфонными вставками или гибкими металлическими рукавами. Если сильфонная вставка легкая и по протяженности мала по сравнению с общей длиной, то ее можно учитывать, как сосредоточенное податливое включение. В других случаях сильфон и рукав необходимо учитывать как участок трубопровода конечной длины с характеристиками, свойственными гибкому элементу.

Обычно участки трубопроводов между собой соединяются с помощью специальных ниппелей и гаек, которые по протяженности малы и учитываются в расчетах как сосредоточенные массы.

## 2. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И НЕКОТОРЫЕ СОГЛАШЕНИЯ

Будем использовать неподвижную правую систему декартовых координат  $x_1, y_1, z_1$  и правую тройку подвижных естественных координат  $x, y, z$ , совпадающую с касательной, нормалью и бинормалью

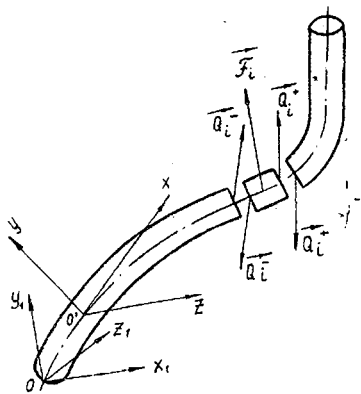


Рис. 1. Схема трубопровода и система координат

рис. 1). В обоих случаях перемещение любого сечения трубопровода характеризуется вектором линейных перемещений  $\vec{u} = \{u, v, w\}$  и вектором угловых перемещений  $\vec{\varphi} = \{\varphi, \psi, \chi\}$ . Напряженное состояние любого сечения стержня характеризуется вектором сил  $\vec{q} = \{q_x, q_y, q_z\}$  и вектором моментов  $\vec{m} = \{m_x, m_y, m_z\}$ . Векторы  $\vec{u}$  и  $\vec{\varphi}$  образуют обобщенный шестикомпонент-

ный вектор перемещений  $\vec{U} = \{\vec{u}, \vec{\varphi}\}$ , а векторы  $\vec{m}$  и  $\vec{q}$  образуют обобщенный шестикомпонентный вектор внутренних усилий  $\vec{Q} = \{\vec{m}, \vec{q}\}$ .

Векторы  $\vec{U}$  и  $\vec{Q}$  полностью характеризуют напряженно-деформированное состояние стержня и из них можно сформировать двенадцатикомпонентный вектор состояния

$$\vec{S} = \{\vec{U}, \vec{Q}\}.$$

Сосредоточенный вектор внешних усилий  $\vec{F}$ , примененный в некотором сечении, будем полагать состоящим из трех компонентов вектора силы  $\vec{f} = \{f_x, f_y, f_z\}$  и трех компонентов вектора моментов  $\vec{M} = \{M_x, M_y, M_z\}$ . Для дальнейшего будет полезной зависимость между векторами в системе координат  $x_1, y_1, z_1$  и  $x, y, z$  для круговых стержней.

Располагая плоскость круга в плоскости  $x_1, o, y_1$ , совмещая центр круга с началом координат и устанавливая соответствие между системами координат

$$x_1 = r \cos \frac{x}{r}, \quad y_1 = r \sin \frac{x}{r}, \quad z_1 = z, \quad (1)$$

для двенадцатикомпонентного вектора состояния можем записать:

$$S_{x_1} = \Psi S_x$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \cos \frac{x}{r} & -\sin \frac{x}{r} & 0 \\ \sin \frac{x}{r} & \cos \frac{x}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где  $r$  — радиус круга.

Для удобства расчета все элементы вектора состояния должны иметь одинаковую размерность, примем ее равной размерности перемещения, а координата  $x$  должна быть безразмерной. Тогда

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi} l, \quad \vec{m} = \frac{\vec{m} l^2}{EI}, \quad \vec{q} = \frac{\vec{q} l^3}{EI}, \quad \vec{F} = \frac{\vec{F} l^3}{EI}, \quad \vec{M} = \frac{\vec{M} l^2}{EI}, \quad \vec{x} = \frac{x}{l},$$

где  $l$  — общая длина трубопровода;

$EI$  — изгибная жесткость сечения трубопровода.

В дальнейшем тильды над соответствующими величинами будем опускать.

Направление трубопровода в системе координат  $x_1, y_1, z_1$  будем характеризовать направлением орта, касательного к оси трубопровода  $\vec{\tau}$ , с проекциями  $\tau_x, \tau_y, \tau_z$ . Для кругового трубопровода

$$\tau_x = -\sin\left(x \frac{l}{r}\right); \tau_y = \cos\left(x \frac{l}{r}\right); \tau_z = 0. \quad (3)$$

### 3. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ И МЕТОД ДИНАМИЧЕСКИХ ЖЕСТКОСТЕЙ

Предварительно рассмотрим одиночный трубопровод без особенностей, т. е. без УДС, упругих соединений участков, сосредоточенных масс и резких изменений направления, находящийся под действием гармонического сосредоточенного усилия с частотой  $\omega$  и амплитудой  $\vec{F}$ , приложенного в некотором сечении  $x_i$ . Установившееся движение такого трубопровода описывается уравнением состояния

$$\frac{d\vec{S}}{dx} = M(x)\vec{S} \quad (4)$$

с граничными условиями

$$x=0, \vec{Q}(0) = \kappa_0 \vec{U}(0); x=1, \vec{Q}(1) = \kappa_1 \vec{U}(1), \quad (5)$$

где  $M(x)$  — матрица, зависящая от упруго-массовых характеристик и геометрии сечения;

$\kappa_0, \kappa_1$  — квадратные, 12-го порядка матрицы жесткости закрепления конечных сечений.

Учитывая громоздкость вывода матрицы  $M(x)$ , приведем лишь ее в окончательном виде, опуская промежуточные выводы:

$$\left. \begin{aligned} M_{15} &= -M_{24} = \tau_z; M_{16} = -M_{34} = -\tau_y; M_{26} = -M_{35} = \tau_x; \\ M_{47} &= 1 + \mu\tau_x^2; M_{48} = M_{57} = \mu\tau_x\tau_y; M_{49} = M_{67} = \mu\tau_x\tau_z; \\ M_{57} &= 1 + \mu\tau_y^2; M_{59} = M_{68} = \mu\tau_y\tau_z; M_{69} = 1 + \mu\tau_z^2; \\ M_{7,11} &= -M_{8,10} = -\tau_z; M_{7,12} = -M_{9,10} = -\tau_y; \\ M_{8,12} &= -M_{9,11} = \tau_x; M_{10,1} = M_{11,2} = M_{12,3} = -\alpha^4, \end{aligned} \right\} (6)$$

$$\text{где } \alpha^4 = \frac{\omega^2 l^4}{EI} (\rho_m F_m + \rho_j F_j),$$

$\rho_m, \rho_j$  — плотность металла и жидкости;

$F_m, F_j$  — площадь сечений нетто и просвета;  
 $\mu$  — коэффициент Пуассона.

Остальные элементы матрицы  $M(x)$  равны нулю.

Уравнение (4) наиболее просто может быть решено методом начальных параметров [3]. Однако на высоких частотах колебаний, когда по длине стержня укладывается несколько волн, метод становится плохо обусловленным [4] и в результате его применения могут получиться некорректные результаты. Поэтому используем устойчивый метод динамических жесткостей (податливостей) [5]. Для этого уравнение (4) запишем в виде

$$\begin{bmatrix} \vec{U}'(x) \\ \vec{Q}'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(x) & M_{12}(x) \\ M_{21}(x) & M_{22}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{U}(x) \\ \vec{Q}(x) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Поскольку трубопровод не имеет внешней нагрузки, то для любого сечения, за исключением сечения  $x_l$ , можно записать соотношение, аналогичное (5):

$$\vec{Q}(x) = K(x) \vec{U}(x), \quad (8)$$

где  $K(x)$  — матрица динамической жесткости части трубопровода, находящегося с той стороны сечения  $x$ , в которой не содержится внешней силы  $\vec{F}$ .

Продифференцируем выражение (8) по  $x$ :

$$\vec{Q}'(x) = K'(x) \vec{U}(x) + K(x) \vec{U}'(x). \quad (9)$$

Уравнения (7), (8), (9) образуют систему, исключая из которой векторы  $\vec{U}$ ,  $\vec{Q}$  и их производные, получим матричное дифференциальное уравнение относительно матрицы динамической жесткости

$$K'(x) = -K(x) [M_{11}(x) + M_{12}(x) K(x)] + M_{22}(x) K(x) + M_{21}(x), \quad (10)$$

которое может быть проинтегрировано любым численным методом, начиная с  $x=0$  при  $K(x) = k_0$  или с  $x=1$  при  $K(x) = k_1$ .

В задачах о вынужденных колебаниях уравнение (10) является вспомогательным и служит только для определения матрицы динамической жесткости произвольного сечения. Однако в задачах об определении собственных частот значение динамической жесткости оказывается достаточным. Так

частотное уравнение для трубопровода записывается в виде

$$|K(1) + \kappa_1| = 0, \quad (11)$$

где  $K(1)$  — динамическая жесткость трубопровода в конечном сечении;

$\kappa_1$  — динамическая жесткость закрепления того же сечения.

Перейдем теперь к определению реакции трубопровода на внешнее гармоническое воздействие  $\vec{F}$ . Объединяя равенства (7), (8), (9), (10), получим дифференциальное уравнение для вычисления вектора перемещения  $\vec{U}$ :

$$\vec{U}'(x) = [M_{11}(x) + M_{12}(x)K(x)]\vec{U}(x). \quad (12)$$

Начальные условия для интегрирования уравнения (12) получим из следующих соображений. В сечении  $x = x_i$ , где приложен вектор  $\vec{F}$ , вектор  $\vec{U}(x_i)$  непрерывен, а вектор  $\vec{Q}(x_i)$  терпит разрыв. Обозначим для  $x = x_i + 0$ ;  $\vec{Q}(x_i) = = \vec{Q}^+(x_i)$ , а для  $x = x_i - 0$ ;  $\vec{Q}(x_i) = \vec{Q}^-(x_i)$ . Тогда в сечении  $x = x_i$   $\vec{F}(x_i) = \vec{Q}^+(x_i) + \vec{Q}^-(x_i)$ ;  $\vec{Q}^+(x_i) = K^+(x_i)\vec{U}(x_i)$ ;  $\vec{Q}^-(x_i) = K^-(x_i)\vec{U}(x_i)$ ,

откуда получаем:

$$\vec{U}(x_i) = [K^+(x_i) + K^-(x_i)]^{-1}\vec{F}(x_i) = K_{\Sigma}^{-1}(x_i)\vec{F}(x_i), \quad (13)$$

где  $K^+(x_i)$ ,  $K^-(x_i)$  — матрицы динамических жесткостей трубопровода, полученных при прогоне справа налево и слева направо от края трубопровода до сечения  $x = x_i$ ;  $K_{\Sigma} = K^+(x_i) + K^-(x_i)$  — матрица динамической жесткости неразрезанного трубопровода в сечении  $x_i$ .

Таким образом, без интегрирования уравнения (12) можно определить вектор перемещения трубопровода в сечении  $x_i$ , где приложен вектор внешних усилий. Поэтому при интегрировании уравнения (12) сечение  $x_i$  следует считать начальным, а начальное значение вектора  $\vec{U}$  определяется по формуле (13). Интегрирование уравнения (12) позволяет определить вектор перемещения любого сечения, а вектор внутреннего усилия при этом определяется по формуле (8). Таким образом, два дифференциальных уравнения (10) и (12) с соответствующими начальными условиями и формула (8) являются достаточными для определения вектора состояния трубопровода в любом его сечении.

В дальнейшем удобнее оперировать не непосредственно вектором состояния, а функциями влияния. Для этого рассмотрим два сечения  $x_i$  и  $x$ : в сечении  $x_i$  приложен вектор внешней силы, а в сечении  $x$  определяется вектор состояния. Введем матрицы функции влияния формулами:

$$\vec{U}(x) = \Phi_{(x/x_i)}^u \vec{F}(x_i), \quad Q(x) = \Phi_{(x/x_i)}^Q \vec{F}(x_i), \quad (14)$$

тогда уравнение (12) и формулы (13), (8) переходят соответственно в следующие:

$$\Phi_{(x/x_i)}^u = [M_{11}(x) + M_{12}(x) K(x)] \Phi_{(x/x_i)}^u; \quad (15)$$

$$\Phi_{(x_i/x_i)}^u = [K^+(x_i) + K^-(x_i)]^{-1}; \quad (16)$$

$$\Phi_{(x/x_i)}^Q = K(x) \Phi_{(x/x_i)}^u. \quad (17)$$

#### 4. УЧЕТ ОСОБЕННОСТЕЙ РЕАЛЬНОГО ТРУБОПРОВОДА

До сих пор рассматривался гладкий однородный трубопровод без особенностей. Особенности в виде упруго-демпфирующих связей и соединений участков сосредоточенными упругими включениями удобно учитывать при вычислении матрицы жесткости. Введем матрицу жесткостей упруго-демпфирующей связи  $k$  и матрицу податливостей упругого включения  $e$ :

$$k = \begin{bmatrix} k_{mu} & k_{m\varphi} \\ k_{qu} & k_{q\varphi} \end{bmatrix}; \quad e = \begin{bmatrix} e_{um} & e_{uQ} \\ e_{\varphi m} & e_{\varphi Q} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

где  $k_{qu}$ ,  $k_{m\varphi}$ ,  $k_{q\varphi}$ ,  $k_{mu}$  — квадратные матрицы силовых, моментных и смешанных жесткостей размерностью  $3 \times 3$ ;  $e_{uQ}$ ,  $e_{\varphi m}$ ,  $e_{\varphi Q}$ ,  $e_{um}$  — линейная, угловая и смешанные податливости упругого включения.

Элементы матриц  $k$  и  $e$  — безразмерные величины и определяются через соответствующие размерные величины  $k$  и  $e$  следующим образом:

$$\begin{aligned} k_{qu} &= \frac{\tilde{k}_{qu} l^3}{EI}; & k_{mu} &= \frac{\tilde{k}_{mu} l^2}{EI}; \\ k_{q\varphi} &= \frac{\tilde{k}_{q\varphi} l^2}{EI}; & k_{m\varphi} &= \frac{\tilde{k}_{m\varphi} l}{EI}; \\ e_{uQ} &= \frac{\tilde{e}_{uQ} EI}{l^3}; & e_{um} &= \frac{\tilde{e}_{um} EI}{l^2}; \end{aligned} \quad (19)$$



$$e_{\varphi q} = \frac{e_{\varphi q} E l}{I^2}; \quad e_{\varphi m} = \frac{e_{\varphi m} E l}{I}.$$

При интегрировании уравнения (10) особенности типа «к» и «е» учитываются в соответствии с равенствами:

$$K^+ = K^- + k; \quad (20)$$

$$(K^+)^{-1} = (K^-)^{-1} + e; \quad (21)$$

где  $K^+$  и  $K^-$  соответственно подагливости в сечении непосредственно перед и за особенностью.

Особенность в виде сосредоточенного массового включения учитывается по формуле (20), где элементы матрицы  $k$  имеют вид:

$$k_{44} = k_{55} = k_{66} = -\frac{M_B \omega^2 l^3}{EI}; \quad k_{11} = -\frac{I_x \omega^2 l^2}{EI};$$

$$k_{22} = -\frac{I_y \omega^2 l}{EI}; \quad k_{33} = -\frac{I_z \omega^2 l}{EI},$$

где  $M_B$  — сосредоточенная масса включения;

$I_x, I_y, I_z$  — массовые моменты инерции включения.

Особенность в виде сосредоточенного конечного изменения направления трубопровода учитывается только при вычислении матрицы  $M(x)$  обычным способом через изменение направления касательного орта  $\vec{\tau}$ . Конечные изменения направления при вычислении  $K, \Phi^a, \Phi^q$  не учитываются, так как вычисления производятся в неподвижной декартовой системе координат.

## 5. ПЕРЕХОДНАЯ МАТРИЦА ДЛЯ КРУГОВОГО ТРУБОПРОВОДА

Рассмотрим участок трубопровода, представляющий собой дугу окружности и не имеющий никаких особенностей.

Учитывая выражения для проекций касательного орта  $\vec{\tau}$  (3) и, переходя в уравнении (4) от вектора состояния  $\vec{S}$  в системе координат  $x_1, y_1, z_1$  к вектору  $\vec{S}$  в системе координат  $x, y, z$  в соответствии с равенством (2), получим уравнение, аналогичное (4), в котором матрица  $M$  будет постоянной матрицей, не зависящей от координат сечения. Запишем элемен-

ты вектора состояния в другом порядке, отличающемся от принятого в п. 2:

$$\vec{S} \equiv \{ \vec{S}_1 | \vec{S}_2 \} = \{ u, v, \chi, m_z, q_x, q_y | \omega, \varphi, \psi, m_x, m_y, q_z \}.$$

Тогда уравнение (4) можно переписать в виде:

$$\frac{d\vec{S}}{dx} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \vec{S}, \quad (22)$$

где матрицы  $M_{12}$ ,  $M_{21}$  суть нулевые матрицы, а матрицы  $M_{11}$  и  $M_{22}$  имеют следующий вид:

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{l}{r} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{l}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\alpha^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l}{r} \\ 0 & -\alpha^4 & 0 & 0 & \frac{l}{r} & 0 \end{bmatrix}; \quad (23)$$

$$M_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l}{r} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{r} & 0 & 0 & 1 + \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l}{r} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l}{r} & 0 & 0 \\ -\alpha^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Такой вид матрицы  $M$  свидетельствует о независимости колебаний кольца в своей плоскости и из плоскости. Уравнения

$$\frac{d\vec{S}_1}{dx} = M_{11} \vec{S}_1; \quad \frac{d\vec{S}_2}{dx} = M_{22} \vec{S}_2 \quad (25)$$

описывают колебания в плоскости и из плоскости. соответственно.

Рассмотрим решение уравнений (25). Учитывая, что они между собой отличаются только структурой матрицы  $M$ , ограничимся пока первым уравнением (25).

Будем искать решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$\vec{S}_1|_{x=0} = \vec{S}_{1,0}. \quad (26)$$

В соответствии с [6] решение уравнения (25) с начальными условиями (26) можно записать в виде:

$$\vec{S}_1 = \vec{S}_{1,0} \exp(M_{11} x). \quad (27)$$

Здесь используется понятие функции матрицы. Метод вычисления таких функций изложен в работе [6]. Для этого вводится характеристический многочлен:

$$|\lambda E - M| = (\lambda - \lambda_1) (\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_6), \quad (28)$$

где  $E$  — единичная матрица 6-го порядка.

В случае отсутствия кратных корней (28) функция от матрицы вычисляется по формуле:

$$f(M) = \sum_{k=1}^n \frac{(M - \lambda_1 E) \dots (M - \lambda_{k-1} E) (M - \lambda_{k+1} E) \dots (M - \lambda_n E)}{(\lambda_k - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1}) (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \dots (\lambda_k - \lambda_n)} f(\lambda_k). \quad (29)$$

Характеристический многочлен матрицы  $M_{11}$  имеет вид:

$$\lambda^6 + 2\lambda^4 \left(\frac{l}{r}\right)^2 + \lambda^2 \left[\left(\frac{l}{r}\right)^4 - \alpha^4\right] + \alpha^4 \left(\frac{l}{r}\right)^2 = 0. \quad (30)$$

Перейдем к другим обозначениям

$$\lambda = \tilde{\lambda} \frac{l}{r}; \quad \alpha = \tilde{\alpha} \frac{l}{r},$$

в результате чего уравнение (30) существенно упрощается

$$\tilde{\lambda}^6 + 2\tilde{\lambda}^4 + \tilde{\lambda}^2 (1 - \tilde{\alpha}^4) + \tilde{\alpha}^4 = 0. \quad (31)$$

Легко показать, что уравнение (31) для  $\tilde{\lambda}^2$  может иметь или три различных действительных корня, или один действительный и два мнимых корня. Следовательно, многочлен (30) будет иметь шесть различных корней  $\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \pm\lambda_3$ , и можно применять формулу (27). Предположим, что все корни действительные. В этом случае применение формулы (27) к функции  $\exp(M_{11}x)$  приводит к следующим результатам:

$$\begin{aligned} \exp(M_{11}x) = & \frac{(M_{11}^2 - E\lambda_1^2)(M_{11}^2 - E\lambda_3^2)}{\lambda_1(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)} (E\lambda_1 \operatorname{ch} \lambda_1 x + M_{11} \operatorname{sh} \lambda_1 x) + \\ & + \frac{(M_{11}^2 - E\lambda_1^2)(M_{11}^2 - E\lambda_3^2)}{\lambda_2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} (E\lambda_2 \operatorname{ch} \lambda_2 x + M_{11} \operatorname{sh} \lambda_2 x) + \\ & + \frac{(M_{11}^2 - E\lambda_1^2)(M_{11}^2 - E\lambda_2^2)}{\lambda_3(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} (E\lambda_3 \operatorname{ch} \lambda_3 x + M_{11} \operatorname{sh} \lambda_3 x). \end{aligned} \quad (32)$$

Формулу (32) можно записать короче:

$$\exp(M_{11}x) = P_1 = A \operatorname{ch} \lambda_1 x + B \operatorname{sh} \lambda_1 x + C \operatorname{ch} \lambda_2 x + D \operatorname{sh} \lambda_2 x + E \operatorname{ch} \lambda_3 x + F \operatorname{sh} \lambda_3 x,$$

где, например, матрицы  $A$  и  $B$  имеют вид:

$$A = \frac{(M_{11}^2 - E \lambda_2^2)(M_{11}^2 - E \lambda_3^2)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)}; \quad B = \frac{(M_{11}^2 - E \lambda_2^2)(M_{11}^2 - E \lambda_3^2)}{\lambda_1(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)} M_{11}. \quad (34)$$

Из уравнения (27) видно, что матрица  $\exp(M_{11}x)$  связывает параметры вектора состояния в начальном сечении и некотором конечном сечении  $x$ . Поэтому в соответствии с принятым обозначением [3] матрицу  $P_1$  назовем переходной матрицей участка. Каждый элемент этой матрицы состоит из суммы соответствующих элементов матриц  $A, B, C, \dots$ , умноженных, соответственно, на  $\operatorname{ch} \lambda_1 x, \operatorname{sh} \lambda_1 x, \operatorname{ch} \lambda_2 x, \dots$ .

В случае, если какие-либо корни характеристического уравнения (30) окажутся мнимыми, то легко убедиться в том, что в формулах (32) и (33) нужно только заменить соответствующие гиперболические функции на тригонометрические.

Характеристический многочлен матрицы  $M_{22}$

$$\lambda^6 + 2\left(\frac{l}{r}\right)^2 \lambda^4 + \left[\left(\frac{l}{r}\right)^4 - \alpha^4\right] \lambda^2 + \alpha^4 \left(\frac{l}{r}\right)^2 (1 + \mu) = 0 \quad (35)$$

по своей структуре не отличается от многочлена для матрицы  $M_{11}$ . Отличие заключается только во множителе  $(1 + \mu)$  у свободного члена. Поэтому и переходная матрица участка  $P_2$  по форме не будет отличаться от матрицы  $P_1$  и при вычислении ее элементов можно пользоваться формулами (32), (33), (34), в которых необходимо вместо матрицы  $M_{11}$  использовать матрицу  $M_{22}$  и корни характеристического уравнения (35).

Так как для плоского кругового трубопровода колебания в плоскости и из плоскости круга независимы, то и векторы состояния  $\vec{S}_1$  и  $\vec{S}_2$  независимы. На основании этого вектор состояния можем записать в виде:

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} \vec{S}_1 \\ \vec{S}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{S}_{1,0} \\ \vec{S}_{2,0} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Теперь вернемся к той последовательности элементов вектора состояния, как это было принято в п. 2. Тогда элементы переходной матрицы участка  $A$

$$\vec{S} = A \vec{S}_0 \quad (37)$$

примут следующие значения:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= (P_1)_{11}; & a_{12} &= (P_1)_{12}; & a_{16} &= (P_1)_{13}; & a_{19} &= (P_1)_{14}; \\
 a_{1,10} &= (P_1)_{15}; & a_{1,11} &= (P_1)_{16}; & & & & \\
 a_{21} &= (P_1)_{21}; & a_{22} &= (P_1)_{22}; & & & a_{2,11} &= (P_1)_{25}; \\
 a_{61} &= (P_1)_{31}; & & & & & a_{6,11} &= (P_1)_{35}; \\
 a_{91} &= (P_1)_{41}; & & & & & a_{9,11} &= (P_1)_{45}; \\
 a_{10,1} &= (P_1)_{51}; & & & & & a_{10,11} &= (P_1)_{55}; \\
 a_{11,1} &= (P_1)_{61}; & & & & & a_{11,11} &= (P_1)_{65}; \\
 a_{33} &= (P_2)_{11}; & a_{34} &= (P_2)_{12}; & a_{35} &= (P_2)_{13}; & a_{37} &= (P_2)_{14}; \\
 a_{38} &= (P_2)_{15}; & a_{3,12} &= (P_2)_{16}; & & & & \\
 a_{43} &= (P_2)_{31}; & & & & & a_{4,12} &= (P_2)_{25}; \\
 a_{53} &= (P_2)_{31}; & & & & & a_{5,12} &= (P_2)_{35}; \\
 a_{73} &= (P_2)_{41}; & & & & & a_{7,12} &= (P_2)_{45}; \\
 a_{83} &= (P_2)_{51}; & & & & & a_{8,12} &= (P_2)_{55}; \\
 a_{12,3} &= (P_2)_{61}; & & & & & a_{12,12} &= (P_2)_{36}.
 \end{aligned}$$

Переходная матрица  $A$  для конечного участка трубопровода позволяет построить, как это будет показано в п. 7, дискретный аналог метода динамических жесткостей (податливостей).

## 6. ПЕРЕХОДНАЯ МАТРИЦА ПРЯМОЛИНЕЙНОГО УЧАСТКА

Для прямолинейного участка трубопровода матрица  $M(x)$  является постоянной как в неподвижных, так и подвижных локальных координатах. Это позволит получить переходную матрицу  $A$  прямолинейного трубопровода, как и окружного, в замкнутом виде для конечного участка. Ввиду того, что изгибные, продольные и крутильные колебания прямолинейного участка не связаны между собой, построение матрицы  $A$  существенно упрощается, так как она может быть сформирована из готовых решений. В работе [7] получены подблоки матрицы  $A$ , которые здесь приводятся без подробного вывода:

$$A^{uu} = \begin{bmatrix} \cos(\lambda_1 \tilde{x}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S(\lambda \tilde{x}) & 0 & 0 & 0 & T(\lambda \tilde{x})/\lambda \\ 0 & 0 & S(\lambda \tilde{x}) & 0 & T(\lambda \tilde{x})/\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\lambda_1' \tilde{x}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda V(\lambda \tilde{x}) & 0 & S(\lambda \tilde{x}) & 0 \\ 0 & \lambda V(\lambda \tilde{x}) & 0 & 0 & 0 & S(\lambda \tilde{x}) \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$A^{uq} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{J}{F\ell^2} \frac{\sin(\lambda_1 \tilde{x})}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{U(\lambda \tilde{x})}{\lambda^2} & 0 & -\frac{V(\lambda \tilde{x})}{\lambda^3} & 0 \\ 0 & \frac{U(\lambda \tilde{x})}{\lambda^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{V(\lambda \tilde{x})}{\lambda^3} \\ 1,3 \frac{\sin(\lambda_1' \tilde{x})}{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T(\lambda \tilde{x})}{\lambda} & 0 & 0 & 0 & -\frac{U(\lambda \tilde{x})}{\lambda^2} \\ 0 & 0 & \frac{T(\lambda \tilde{x})}{\lambda} & 0 & -\frac{U(\lambda \tilde{x})}{\lambda^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$A^{qu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda'_j \sin(\lambda'_j \tilde{x})}{1,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 U(\lambda \tilde{x}) & 0 & \lambda V(\lambda \tilde{x}) & 0 \\ 0 & \lambda^2 U(\lambda \tilde{x}) & 0 & 0 & 0 & \lambda V(\lambda \tilde{x}) \\ \frac{Fl^2}{J \lambda_j \sin(\lambda_j \tilde{x})} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^3 T(\lambda \tilde{x}) & 0 & 0 & 0 & -\lambda^2 U(\lambda \tilde{x}) \\ 0 & 0 & -\lambda^3 T(\lambda \tilde{x}) & 0 & -\lambda^2 U(\lambda \tilde{x}) & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$A^{qa} = \begin{bmatrix} \cos(\lambda'_j \tilde{x}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S(\lambda \tilde{x}) & 0 & 0 & 0 & -\frac{T(\lambda \tilde{x})}{\lambda} \\ 0 & 0 & S(\lambda \tilde{x}) & 0 & -\frac{T(\lambda \tilde{x})}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\lambda'_j \tilde{x}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda V(\lambda \tilde{x}) & 0 & S(\lambda \tilde{x}) & 0 \\ 0 & -\lambda V(\lambda \tilde{x}) & 0 & 0 & 0 & S(\lambda \tilde{x}) \end{bmatrix} \quad (41)$$

$F, l$  — геометрические характеристики сечения  $j$ -го участка;  
 $S, T, U, V$  — функции Крылова.

## 7. ТРУБОПРОВОД, СОСТОЯЩИЙ ИЗ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ И КРУГОВЫХ УЧАСТКОВ

Такой трубопровод можно представить состоящим из конечного числа прямолинейных и кольцевых участков и при его расчете можно воспользоваться замкнутыми переходными матрицами  $A$ .

Рассмотрим два рядом расположенных сечения  $j-1$  и  $j$ , ограничивающих  $j$ -й участок, на котором нет связей и отсутствует внешняя сила. Для соответствующих сечений  $j-1, j$  введем соотношения:

$$\vec{Q}_{j-1} = K_{j-1} \vec{U}_{j-1}; \quad \vec{Q}_j = K_j \vec{U}_j, \quad (42)$$

где  $K_{j-1}, K_j$  — динамические жесткости  $(j-1)$ -го и  $j$ -го сечений.

В соответствии с методом начальных параметров [3] для  $j$ -го сечения можно записать:

$$\begin{aligned} \vec{U}_j &= A_j^{uu} \vec{U}_{j-1} + A_j^{uQ} \vec{Q}_{j-1}; \\ \vec{Q}_j &= A_j^{Qu} \vec{U}_{j-1} + A_j^{QQ} \vec{Q}_{j-1}. \end{aligned} \quad (43)$$

Полагая в системах (42) и (43) элементы векторов состояния в сечениях  $j-1$  и  $j$  неизвестными, получим рекуррентную зависимость для определения динамической жесткости сечения  $j$ :

$$K_j = (A_j^{Qu} + A_j^{QQ} K_{j-1})(A_j^{uu} + A_j^{uQ} K_{j-1})^{-1}. \quad (44)$$

Рассмотрим сечение  $i$ , в котором приложена внешняя нагрузка. Выделим в районе точки  $i$  бесконечно малый участок трубопровода, представленного на рис. 1, и для сечений, находящихся бесконечно близко слева и справа от сечения  $i$ , запишем соотношения, аналогичные (42):

$$\vec{Q}_i^- = K_i^- \vec{U}_i, \quad \vec{Q}_i^+ = K_i^+ \vec{U}_i. \quad (45)$$

Кроме того, для сечения  $i$  можно записать:

$$\vec{F}_i = K_i \vec{U}_i \quad (46), \quad \vec{F}_i = \vec{Q}_i^- + \vec{Q}_i^+. \quad (47)$$

Подставляя в (47) соотношения (45) и (46) и сокращая на  $\vec{U}_i$ , получим:

$$K_i = K_i^- + K_i^+. \quad (48)$$



Динамическая жесткость трубопровода в каком-либо сечении равна сумме динамических жесткостей, вычисленных для участков трубопровода, расположенных слева и справа от рассматриваемого сечения. Для определения  $K^+$ ,  $K^-$  можно пользоваться рекуррентной формулой (44).

Введем далее матрицу функций влияния для перемещений следующей формулой:

$$\vec{U}_j = \Phi_{ji}^u \vec{F}_j. \quad (49)$$

Учитывая выражения (46), (48), (49), можем записать для функции  $\Phi_{ji}^u$ :

$$\Phi_{ji}^u = (K_i^- + K_i^+)^{-1}, \quad (50)$$

т. е. матрица функций влияния перемещения от силы в сечении, где действует эта сила, равна обратной матрице динамической жесткости стержня в этом сечении. Используя зависимости (42), (43) и (49), получим рекуррентную формулу для вычисления  $\Phi_{ji}^u$ :

$$\Phi_{ji}^u = (A_j^{uu} - A_j^{u0} K_{j-1}) \Phi_{j-1, i}^u. \quad (51)$$

В формуле (51) необходимо использовать матрицу динамической жесткости той части трубопровода, куда идет процесс вычисления.

Матрицы функций влияния для внутренних усилий в соответствии с равенствами (42) определяются из соотношения:

$$\Phi_{ji}^q = K_j \Phi_{ji}^u. \quad (52)$$

Для трубопроводов с кусочно-постоянными характеристиками сечения, направления и кривизны при вычислении переходной матрицы  $A_j$  необходимо учитывать сосредоточенные изменения направления, жесткость связей с внешним телом, податливые соединения участков. Условимся эти особенности помещать в конце  $j$ -го участка. Тогда матрицу перехода участка с особенностью  $\tilde{A}_j$  можно связать с матрицей перехода участка без особенностей  $A_j$  следующим образом:

$$\tilde{A}_j = R_j A_j, \quad (53)$$

где  $R_j$  — матрица особенностей.

При сосредоточенном повороте оси стержня в конце  $j$ -го сечения:

$$R = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_1 \end{bmatrix}, \quad \Phi_1 = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \cos \beta \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad (54)$$

где  $\alpha, \beta$  — соответственно углы поворота плоскости  $xy$  относительно оси  $Ox$  и новой плоскости  $yz$  относительно новой оси  $Oz$ .

При наличии УДС стержня с внешним телом:

$$R = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ k_{mu} & k_{m\varphi} & E & 0 \\ k_{qu} & k_{q\varphi} & 0 & E \end{bmatrix}, \quad (55)$$

где  $E$  — единичная матрица третьего порядка.

В случае упругого соединения конечного сечения участка  $j$  и начального сечения  $(j+1)$ -го участка:

$$R = \begin{bmatrix} e_{um} & e_{uQ} & 0 & 0 \\ e_{\varphi m} & e_{\varphi Q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix} \quad (56)$$

## 8. СВЯЗАННЫЕ ТРУБОПРОВОДЫ

Когда одни точки трубопровода связаны с другими упруго-демпфирующими связями (внутренние связи) или два трубопровода соединяются между собой, образуется сложная связанная система, расчет которой существенно усложняется. В работе [7] рассмотрен вопрос о расчете таких систем и получены рекуррентные формулы для вычисления функций влияния. Эти формулы позволяют определять функции влия-

ния системы со связью по аналогичным функциям для системы без связей. Многократное применение этих формул позволяет получить функции влияния сколь угодно сложной системы. Ниже без вывода приводятся рекуррентные формулы для вычисления функций влияния сложных систем.

Если между точками  $k$  и  $l$  трубопровода устанавливается внутренняя связь с матрицей жесткости  $k_c$ , то между матрицами функций влияния после ( $\tilde{\Phi}_{jl}$ ) и до ( $\Phi_{jl}$ ) установки связи существуют соотношения:

$$\tilde{\Phi}_{jl}^u = \Phi_{jl}^u + (\Phi_{jk}^u - \Phi_{jl}^u) [E + k_c (\Phi_{il}^u + \Phi_{kk}^u - \Phi_{lk}^u - \Phi_{kl}^u)]^{-1} \times \\ \times k_c (\Phi_{li}^u - \Phi_{ki}^u), \quad (57)$$

$$\tilde{\Phi}_{jl}^Q = \Phi_{jl}^Q + (\Phi_{jk}^Q - \Phi_{jl}^Q) [E + k_c (\Phi_{il}^u - \Phi_{kk}^u - \Phi_{lk}^u - \Phi_{kl}^u)]^{-1} \times \\ \times k_c (\Phi_{li}^u - \Phi_{ki}^u).$$

Теперь рассмотрим два несвязанных трубопровода, в точках  $r$  и  $r'$ , которых может быть приложена внешняя сила, а для точек  $s$  и  $s'$  необходимо определить функцию влияния. Предположим, что в некоторых точках  $c$  и  $c'$  эти два трубопровода связаны между собой матрицей жесткости  $k_c$ , тогда:

$$\tilde{\Phi}_{sr}^u = \Phi_{sr}^u - \Phi_{sc}^u [E + k_c (\Phi_{cc}^u + \Phi_{c'c'}^u)]^{-1} k_c \Phi_{cr}^u; \\ \tilde{\Phi}_{s'r'}^u = \Phi_{sc}^u [E + k_c (\Phi_{cc}^u + \Phi_{c'c'}^u)]^{-1} k_c \Phi_{c'r'}^u; \\ \tilde{\Phi}_{sr}^Q = \Phi_{sr}^Q - \Phi_{sc}^Q [E + k_c (\Phi_{cc}^u + \Phi_{c'c'}^u)]^{-1} k_c \Phi_{cr}^u; \\ \tilde{\Phi}_{s'r'}^Q = \Phi_{sc}^Q [E + k_c (\Phi_{cc}^u + \Phi_{c'c'}^u)]^{-1} k_c \Phi_{c'r'}^u. \quad (58)$$

Функции влияния  $\tilde{\Phi}_{sr}^{u'}$ ,  $\tilde{\Phi}_{sr}^{Q'}$ ,  $\tilde{\Phi}_{s'r'}^{u'}$ ,  $\tilde{\Phi}_{s'r'}^{Q'}$  вычисляются по формулам, аналогичным (58), в которых нижние индексы со штрихами должны быть заменены соответствующими индексами без штрихов и наоборот.

Формулы (58) могут применяться только при введении первой связи между трубопроводами, после чего они уже становятся единой системой, для которой остальные связи будут внутренними. Поэтому вычисление функций влияния при последовательном введении следующих связей осуществляется по формулам (57). Многократное применение формул (57), (58) позволяет вычислять функции влияния при последова-

тельном подсоединении к существующей системе какого угодно количества новых трубопроводов с каким угодно количеством связей.

## 9. РЕАКЦИЯ ТРУБОПРОВОДА НА КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ

Функции влияния очень удобны при вычислении реакции трубопровода при кинематическом возбуждении. Так, если отдельный трубопровод или система трубопроводов соединены с внешним колеблющимся телом упруго-демпфирующими связями с матрицей  $k_i$  и вектор перемещения точки  $i$  внешнего колеблющегося тела —  $\vec{a}_i$ , то векторы перемещения и внутренних усилий при гармонических колебаниях вычисляются по формулам:

$$\vec{u}_j = \sum_{i=1}^m \Phi_{ji}^u k_i \vec{a}_i; \quad \vec{Q}_j = \sum_{i=1}^m \Phi_{ji}^Q k_i \vec{a}_i, \quad (59)$$

где  $m$  — количество связей.

Предполагая, что колебания всех точек внешнего тела имеют одинаковую частоту, необходимо иметь в виду, что они могут отличаться не только по амплитуде колебания, но и по фазе. Каждый элемент вектора  $\vec{a}_i$  при этом имеет множитель  $e^{i\psi_i}$ , где в данном случае  $i = \sqrt{-1}$ , а  $\psi_i$  — фаза. Поэтому в общем случае вектор  $\vec{a}_i$  является комплексным.

В работе [7] показано применение функций влияния при вычислении реакции стержневой системы на случайные вибрации при кинематическом возбуждении. Обозначим  $S_{ip}$  матрицу спектральных плотностей взаимных корреляций компонент вектора перемещений  $\vec{a}_i$  и  $\vec{a}_p$   $i$ -й и  $p$ -й опор. Тогда матрицы спектральных плотностей перемещения и внутренних усилий  $j$ -го сечения трубопровода будут соответственно равны:

$$S_j^u(\omega) = \sum_{i=1}^m \sum_{p=1}^m \Phi_{ji}^{u*} k_i^* \Phi_{jp}^u k_p S_{ip}; \quad (60)$$

$$S_j^Q(\omega) = \sum_{i=1}^m \sum_{p=1}^m \Phi_{ji}^{Q*} k_i^* \Phi_{jp}^Q k_p S_{ip}.$$

Например, элемент 2, 3 матриц  $S_j^u(\omega)$  (или  $S_j^Q(\omega)$ ) имеет физический смысл спектральной плотности перемещения вдоль оси  $y$  (или момента относительно оси  $y$ ) от линейных

перемещений точек крепления опор вдоль оси  $z$ . Алгоритм расчета в соответствии с формулами (59), (60) позволяет получить реакцию по перемещению или внутреннему усилию. Однако окончательный результат расчета состоит в определении напряжений. Для этого используются реакции  $\vec{Q}$  и  $S^Q(\omega)$ , вычисленные в относительной форме. Переходя от относительных величин к абсолютным с учетом принятых обозначений в п. 2, получим:

$$\vec{m} = \vec{m} \frac{EI}{l^2}; \quad \vec{q} = \vec{q} \frac{EI}{l^3}.$$

Отсюда вытекают следующие формулы для: нормальных напряжений при растяжении

$$\sigma_n = \vec{q}_x \frac{EI}{l^3 F};$$

касательных напряжений при кручении

$$\tau_{кр} = \vec{m}_x \frac{EI}{l^2 W_p} (W_p - \text{полярный момент инерции сечения});$$

нормальных напряжений при изгибе

$$\sigma_u^y = \frac{\vec{m}_y EI}{l^2 W}; \quad \sigma_u^z = \frac{\vec{m}_z EI}{l^2 W} (W - \text{экваториальный момент инерции сечения});$$

касательных напряжений при изгибе

$$\tau_u^y = \nu \frac{\vec{q}_y EI}{l^3 F}; \quad \tau_u^z = \nu \frac{\vec{q}_z EI}{l^3 F^2} (\nu - \text{коэффициент формы сечения}).$$

Спектральная плотность нормальных напряжений при растяжении:

$$S_{4k}^{\sigma} = S_{4k}^Q \frac{E^2 I^2}{l^6 F^2} (S_{4k}^Q - \text{элемент столбца } k\text{-й матрицы } S^Q);$$

изгибе:

$$S_{5k}^{\sigma} = S_{5k}^Q \frac{E^2 I^2}{l^4 W^2}; \quad S_{6k}^{\sigma} = S_{6k}^Q \frac{E^2 I^2}{l^4 W^2}.$$

Спектральная плотность касательных напряжений при кручении:

$$S_{1k}^{\tau} = S_{1k}^Q \frac{E^2 I^2}{l^4 W_p^2};$$

изгибе:

$$S_{2k}^{\tau} = S_{2k}^Q V^2 \frac{E^2 I^2}{l^6 F^2}; \quad S_{3k}^{\tau} = S_{3k}^Q V^2 \frac{E^2 I^2}{l^6 F^2}.$$

При вычислении напряжений и спектральных плотностей напряжений функции влияния в формулах (59), (60) должны быть обязательно приведены к локальной подвижной системе координат.

## 10. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Для варианта трубопроводов, составленных из отрезков прямых, была составлена программа для ЭВМ М-220 на языке Алгол-60. В качестве примера приведены следующие варианты трубопроводов:

а) прямой трубопровод с тремя промежуточными упруго-демпфирующими опорами;

б) трубопровод, изогнутый в одной плоскости, с угломгиба  $0^\circ$  (прямой),  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  и  $90^\circ$ ; с угломгиба  $90^\circ$  и двумя промежуточными упруго-демпфирующими опорами;

в) трубопровод, изогнутый в двух плоскостях, с угламигиба в обеих плоскостях  $90^\circ$ .

Размеры трубопроводов: наружный диаметр  $8 \cdot 10^{-3}$  м, толщина стенки  $10^{-3}$  м, длина 0,6 м. Элементы матрицы жесткости промежуточных опор  $k_{14} = 1$  нм,  $k_{25} = 2$  нм,  $k_{36} = 4$  нм,  $k_{41} = 5 \cdot 10^4$  н/м;  $k_{52} = 7,5 \cdot 10^4$  н/м,  $k_{63} = 10^5$  н/м. Жесткость заделок принималась на 2 порядка выше. Для всех элементов матрицы жесткости  $k_c$  коэффициент потерь в опоре принимался одинаковым и равным  $\eta = 0,5$ .

На рис. 2 показана зависимость амплитуды приведенных изгибных напряжений у левой заделки от частоты для прямого трубопровода с тремя упруго-демпфирующими равномерно расставленными опорами. Каждой опоре в направлении трех осей задавались перемещения, соответствующие постоянной по частоте виброскорости. Для симметричного нагружения (задаваемые опорам перемещения одинаковы) на трубопроводе определены три резонанса: 294 гц, 690 гц, 1557 гц. Для изогнутого в одной плоскости трубопровода аналогичные зависимости представлены на рис. 3. Первый резонанс соответствует основному тону при колебаниях из плоскостигиба, второй и третий резонанс соответствуют первому обертому из плоскостигиба и основному тону в плоскостигиба. По мере уменьшения углагиба второй и третий резонансы сближаются и для прямого трубопровода они исчезают.

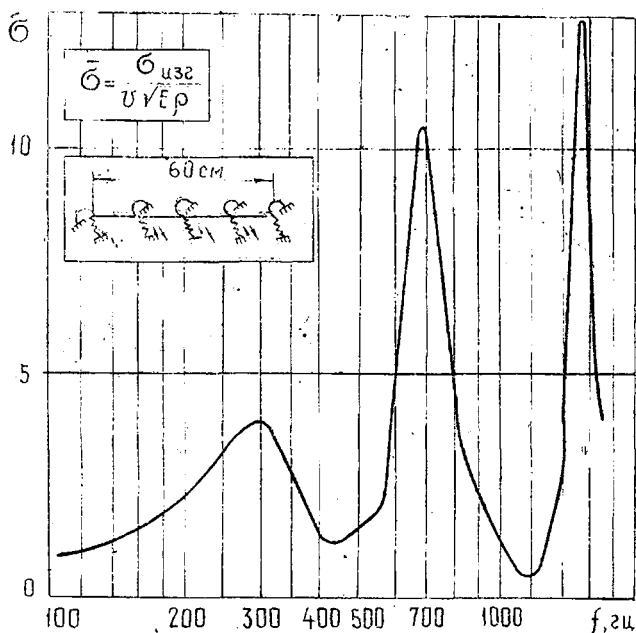
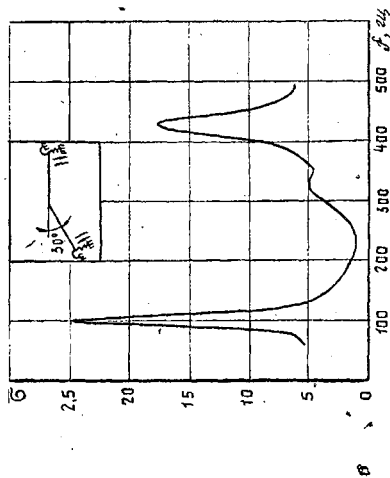
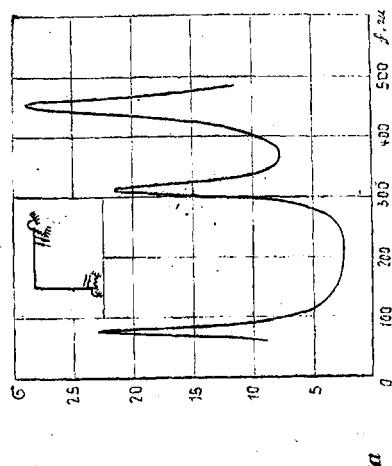
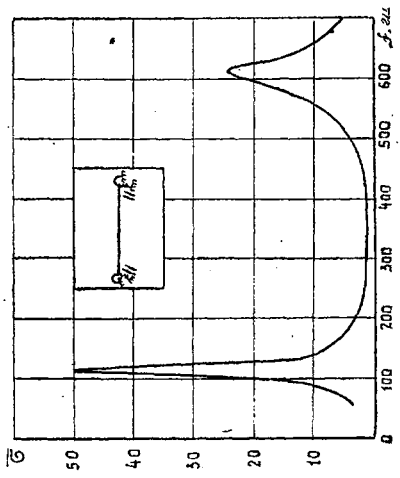
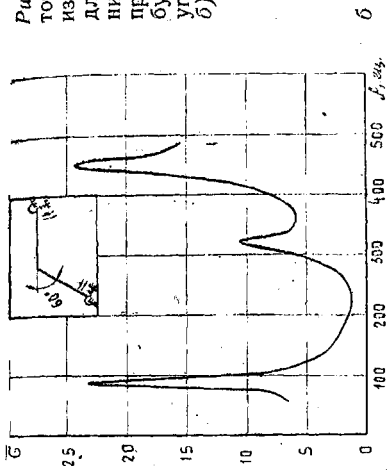


Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика прямого трубопровода с промежуточными опорами для изгибных напряжений в крайнем сечении при симметричном возбуждении

На рис. 4 приведена резонансная кривая для изогнутого трубопровода с угломгиба  $90^\circ$  при возбуждении только левой опоры (несимметричное возбуждение). Сравнение резонансных кривых, полученных при симметричном и несимметричном возбуждении (рис. 3а и рис. 4), показывает, что резонансные частоты остались неизменными для обоих видов возбуждения, но амплитуды первых двух резонансов при несимметричном возбуждении снизились в 2 раза, амплитуда 3-го резонанса осталась прежней. Так как изогнутая трубка не является симметричной, то как симметричное, так и несимметричное возбуждение вызывает все формы колебаний трубопровода.

На рис. 5 приведена резонансная кривая для изогнутого в одной плоскости трубопровода с угломгиба  $90^\circ$  и двумя промежуточными упруго-демпфирующими опорами при сим-

Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика изогнутого трубопровода для изгибных напряжений в крайнем сечении при симметричном возбуждении и следующих углах гиба: а)  $90^\circ$ ; б)  $60^\circ$ ; в)  $30^\circ$ ; г)  $0^\circ$





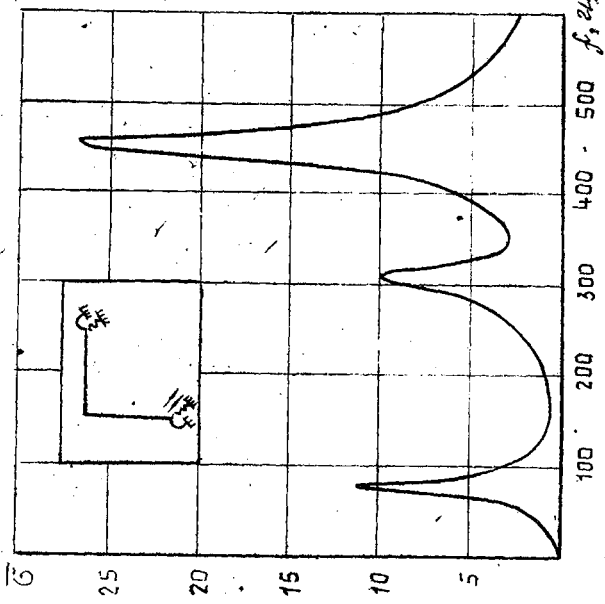


Рис. 4. Амплитудно-частотная характеристика изогнутого трубопровода для изгибных напряжений в крайнем сечении при несимметричном возбуждении

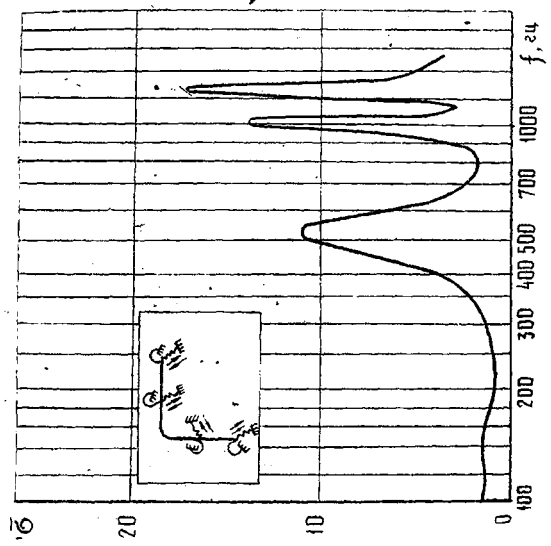


Рис. 5. Амплитудно-частотная характеристика изогнутого трубопровода с упруго-демпфирующими опорами для изгибных напряжений в крайнем сечении при симметричном возбуждении

метричном возбуждении. Резонансная кривая для трубопровода с 2 опорами отличается от резонансной кривой аналогичного трубопровода без промежуточных опор (рис. 3а). Наличие опор приводит к вырождению первого резонанса (колебание трубопровода в плоскости, перпендикулярной плоскости чертежа), повышению резонансных частот и уменьшению амплитуды резонансных колебаний.

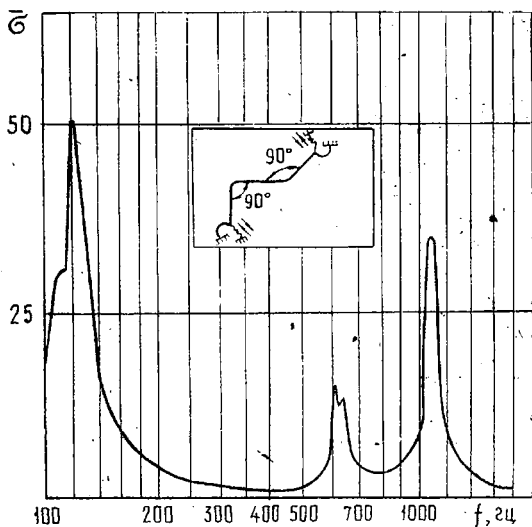


Рис. 6. Амплитудно-частотная характеристика изогнутого в двух плоскостях трубопровода для изгибных напряжений в крайнем сечении при симметричном возбуждении

Резонансная кривая для трубопровода, изогнутого в двух плоскостях с угламигиба в каждой плоскости  $90^\circ$ , приведена на рис. 6. Она посчитана в диапазоне частот  $50 + 1860$  гц для симметричного возбуждения. Получены три резонанса, причем первые два — раздвоенные: 112 и 123 гц, 610 и 631 гц, третий резонанс — 1106 гц. Раздвоение резонансов объясняется тем, что изогнутый трубопровод имеет близкие резонансные частоты.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кондрашов Н. С., Лашкова Л. А. Демпфирование колебаний многоопорных трубопроводов. «Проблемы прочности», 1976, № 5.
2. Кондрашов Н. С. Колебания балки на линейных и нелинейных упруго-демпфирующих опорах при кинематическом случайном возбуждении. В сб. «Рассеяние энергии при колебаниях механических систем». Киев, «Наукова думка», 1974.
3. Ивович В. А. Переходные матрицы в динамике упругих систем. М., «Машиностроение», 1969.
4. Пальмов В. А., Первозванский А. А. О вычислительных особенностях матричных методов расчета колебаний. В сб. «Динамика и прочность машин». Труды ЛПИ № 210, Машгиз, М-Л, 1960.
5. Бидерман В. Л. Применение метода прогонки для численного решения задач строительной механики. Инженерный журнал МТТ, 1967, № 5.
6. Кондрашов Н. С., Сусликов В. И. Метод динамического расчета сложных стержневых систем. В сб. «Некоторые вопросы проектирования и доводки авиационных газотурбинных двигателей». Труды КуАИ, вып. № 78, Куйбышев, 1976.
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1966.

УДК 621.45.02.0.001.24:681.3

*В. Н. Альперт, Л. П. Пимахина, Д. Г. Федорченко*

## РАЗРАБОТКА ПРОГРАММЫ ПРОЕКТИРОВОЧНОГО ПРОЧНОСТНОГО РАСЧЕТА ОСЕВОГО КОМПРЕССОРА ДЛЯ СИСТЕМЫ МАШИННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ГТД

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Проектирование является важным этапом создания новых изделий, во многом определяющим достижение заявленных параметров, надежность и технологичность конструкции, стоимость изготовления и эксплуатации ГТД, а также стоимость и длительность доводочных работ.

Для повышения качества проекта существенно обеспечение наибольшей глубины его проработки в отведенный для проектирования срок.

Применение ЭВМ значительно способствовало решению этой проблемы, повысив объем и точность расчетных оценок