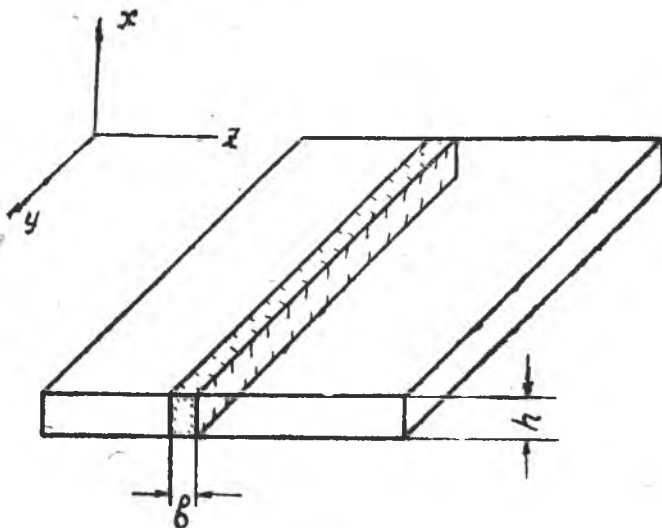


С. И. ИВАНОВ

ЗОНА ВКЛЮЧЕНИЯ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОЛОСКЕ

При определении остаточных напряжений в пластинке, из последней вырезаются узкие полоски (фиг. 1) [1]. Во многих практических случаях почти вся полоска, исключая район торцов, испытывает линейное напряженное состояние, напряжение σ_y при этом изменяется только по координате x .



Фиг. 1.

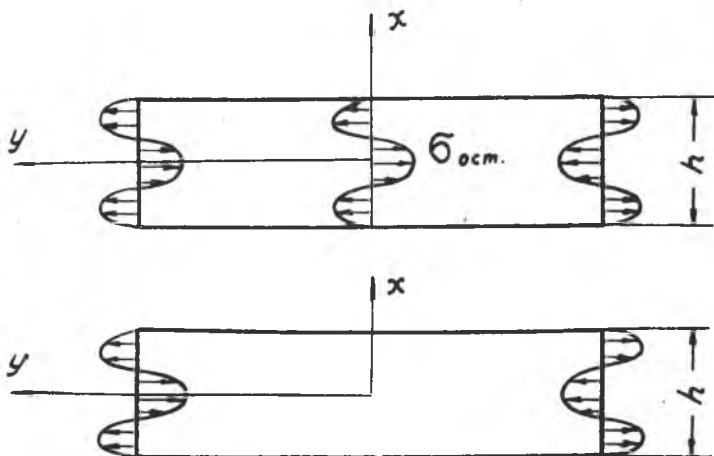
В области, примыкающей к торцу полоски, происходит изменение остаточных напряжений до нуля на торце, т. к. последний свободен от нагрузок. Эту область будем называть зоной включения остаточных напряжений. В соответствии с принципом

Сен-Венана длина зоны включения не превышает высоту полоски h . Однако для решения ряда практических вопросов, например для определения минимальной длины полоски, зону включения необходимо знать подробнее. В этом направлении предпринимались экспериментальные попытки, которые носят сугубо частный характер [2].

В настоящей статье изложены результаты аналитического исследования, которые позволяют проследить за зоной включения в связи с изменением характера распределения остаточных напряжений по высоте полоски.

В дальнейшем рассматривается случай, когда причина возникновения остаточных напряжений — первоначальная деформация — по длине полоски, в том числе и в зоне включения, не изменяется.

Для определения напряжений в зоне включения рассматриваются два случая напряжений в полоске (фиг. 2). В первом случае

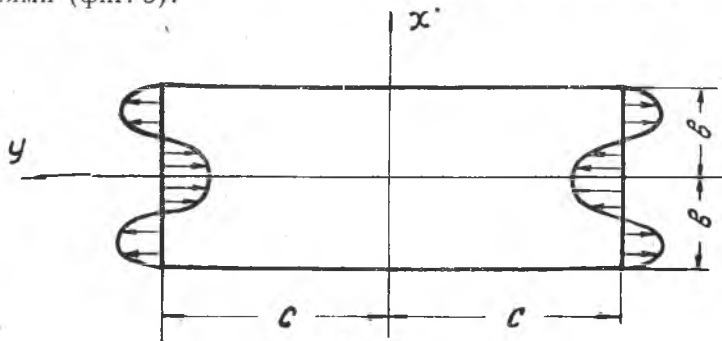


Фиг. 2.

во всех сечениях полоски действуют одинаковые напряжения. Такое состояние можно получить нагружением торцов полоски с остаточными напряжениями нагрузкой, изменяющейся по закону остаточных напряжений. Во втором случае полоска без начальных напряжений нагружена по торцам усилиями, изменяющимися по закону остаточных напряжений, действующих в первой полоске. Взяв разность напряжений в двух полосках, получим напряжения в зоне включения.

Для того, чтобы воспользоваться этим приемом, необходимо определить напряжения во второй полоске. С этой целью реша-

ем задачу теории упругости для прямоугольной полосы, нагруженной по двум коротким сторонам одинаковыми нормальными усилиями (фиг. 3).



Фиг. 3.

Сложность этой задачи заключается в том, что необходимо точно, а не только в смысле Сен-Венана, удовлетворить граничным условиям на свободных от нагрузок длинных сторонах. Ограничимся рассмотрением остаточных напряжений, являющихся четной функцией от x .

Воспользуемся обобщением метода Рибьера на случай, когда необходимо точно удовлетворить граничным условиям на всех сторонах прямоугольника.

Принимаем следующее выражение для функции напряжения

$$\varphi = A_0 x^2 + B_0 y^2 + C_0 xy + \sum_{n=1}^{\infty} [\psi_n(y) \cos \alpha_n x + f_n(x) \cos \beta_n y] \dots \quad (1)$$

$$\alpha_n = n \frac{\pi}{b}; \quad \beta_n = n \frac{\pi}{c}.$$

Неизвестные функции $\psi_n(y)$ и $f_n(x)$ определяются решением дифференциальных уравнений, которые следуют из бигармонического уравнения задачи.

$$\left. \begin{aligned} \psi_n(y) &= A_{1n} \operatorname{sh} \alpha_n y + B_{1n} \operatorname{ch} \alpha_n y + C_{1n} y \operatorname{sh} \alpha_n y + D_{1n} y \operatorname{ch} \alpha_n y \\ f_n(x) &= A_{2n} \operatorname{sh} \beta_n x + B_{2n} \operatorname{ch} \beta_n x + C_{2n} x \operatorname{sh} \beta_n x + D_{2n} x \operatorname{ch} \beta_n x \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

После подстановки φ в выражения для напряжений и удовлетворения условию симметрии задачи относительно осей x и y получим

$$C_0 = A_{1n} = D_{1n} = A_{2n} = D_{2n} = 0.$$

С учетом этого равенства выражения для напряжений принимают следующий вид:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2 B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [B_{1n} \alpha_n^2 \operatorname{ch} \alpha_n y + C_{1n} (2 \alpha_n \operatorname{ch} \alpha_n y + \alpha_n^2 y \operatorname{sh} \alpha_n y)] \times$$

$$\times \cos \alpha_n x - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 (B_{2n} \operatorname{ch} \beta_n x + C_{2n} x \operatorname{sh} \beta_n x) \cos \beta_n y \quad (3)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 (B_{1n} \operatorname{ch} \alpha_n y + C_{1n} y \operatorname{sh} \alpha_n y) \cdot \cos \alpha_n x +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [B_{2n} \beta_n^2 \operatorname{ch} \beta_n x + C_{2n} (2\beta_n \operatorname{ch} \beta_n x + \beta_n^2 x \operatorname{sh} \beta_n x)] \cos \beta_n y \quad (4)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n [B_{1n} \alpha_n \operatorname{sh} \alpha_n y + C_{1n} (\operatorname{sh} \alpha_n y + \alpha_n y \operatorname{ch} \alpha_n y)] \sin \alpha_n x +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n [B_{2n} \beta_n \operatorname{sh} \beta_n x + C_{2n} (\operatorname{sh} \beta_n x + \beta_n x \operatorname{ch} \beta_n x)] \sin \beta_n y \quad (5)$$

Удовлетворяя граничным условиям

$$\tau_{xy} |_{y=\pm c} = \tau_{xy} |_{x=\pm b} = 0, \text{ получим}$$

$$C_{1n} = - \frac{\alpha_n \operatorname{sh} \alpha_n c}{\operatorname{sh} \alpha_n c + \alpha_n c \operatorname{ch} \alpha_n c} \cdot B_{1n}; \quad C_{2n} = - \frac{\beta_n \operatorname{sh} \beta_n b}{\operatorname{sh} \beta_n b + \beta_n b \operatorname{ch} \beta_n b} \cdot B_{2n} \quad (6)$$

С учетом этих соотношений в выражениях для напряжений остается две группы неизвестных коэффициентов: B_{1n} и B_{2n} .

Используем граничное условие на свободных от нагрузки сторонах:

$$\sigma_x |_{x=\pm b} = 0. \quad (7)$$

В выражении для σ_x при $x = \pm b$ необходимо множитель при B_{1n} разложить в ряд Фурье с периодом $2c$ с тем, чтобы объединить ряды в левой части (7). Приравнявая коэффициенты при $\cos \beta_n y$ нулю, получим: $B_0 = 0$;

$$\frac{\operatorname{sh} 2\beta_i b + 2\beta_i b}{\operatorname{sh} \beta_i b + \beta_i b \operatorname{ch} \beta_i b} \cdot B_{2i} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+i} \frac{8\alpha_n^2 \operatorname{sh}^2 \alpha_n c}{c (\operatorname{sh} \alpha_n c + \alpha_n c \operatorname{ch} \alpha_n c) (\alpha_n^2 + \beta_i^2)^2} \cdot B_{1n} \quad (8)$$

Обращаемся к последнему граничному условию

$$\tau_y |_{y=\pm c} = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos \alpha_k x, \quad (9)$$

где в правой части представлена нагрузка на контуре, разложенная в ряд Фурье с периодом $2b$.

В левой части выражения (9), после использования (8), содержатся только коэффициенты B_{1n} . Напряжение $\sigma_y |_{y=\pm c}$ следует разложить в ряд Фурье с периодом $2b$.

Далее, сравнивая коэффициенты при $\cos \alpha_k x$ в левой и правой части (9), приходим к следующему результату:

$$A_0 = \frac{b_0}{2};$$

$$-\frac{\alpha_k^2 (sh 2\alpha_k c + 2\alpha_k c)}{2 (sh \alpha_k c + \alpha_k c ch \alpha_k c)} \cdot B_{1k} + \sum_{p=1}^{\infty} B_{1p} (-1)^k \cdot \frac{32\alpha_k^2 \alpha_p^3 sh^2 \alpha_p c}{bc (sh \alpha_p c + \alpha_p c ch \alpha_p c)} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^3 sh^2 \beta_n b}{(sh 2\beta_n b + 2\beta_n b)(\alpha_p^2 + \beta_n^2)^2 (\beta_n^2 + \alpha_k^2)^2} = b_k. \quad (10)$$

Введем новые постоянные

$$A_k = -\frac{\alpha_k^2 (sh 2\alpha_k c + 2\alpha_k c)}{2 (sh \alpha_k c + \alpha_k c ch \alpha_k c)} \cdot B_{1k};$$

$$B_k = -\frac{\alpha_k^2 b^2 (sh 2\beta_k b + 2\beta_k b)}{2c^2 (sh \beta_k b + \beta_k b ch \beta_k b)} \cdot B_{2k}.$$

Выражения для напряжений через новые постоянные принимают следующий вид:

$$\sigma_x = -2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\left(\frac{n\pi}{q} ch \frac{n\pi}{q} - sh \frac{n\pi}{q} \right) ch \frac{n\pi}{b} y - \frac{n\pi}{b} y sh \frac{n\pi}{b} y sh \frac{n\pi}{q}}{\left(sh 2 \frac{n\pi}{q} + 2 \frac{n\pi}{q} \right)} \cos \frac{n\pi}{b} x +$$

$$+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{(qn \pi ch qn \pi + sh qn \pi) ch \frac{qn\pi}{b} x - \frac{qn\pi}{b} x sh \frac{qn\pi}{b} x \cdot sh qn\pi}{(sh 2qn\pi + 2qn\pi)} \cos \frac{qn\pi}{b} y \quad (11)$$

$$\sigma_y = b_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\left(\frac{n\pi}{q} ch \frac{n\pi}{q} + sh \frac{n\pi}{q} \right) ch \frac{n\pi}{b} y - \frac{n\pi}{b} y sh \frac{n\pi}{b} y \cdot sh \frac{n\pi}{q}}{\left(sh 2 \frac{n\pi}{q} + 2 \frac{n\pi}{q} \right)} \times$$

$$\times \cos \frac{n\pi}{b} x - 2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{(qn \pi ch qn \pi - sh qn \pi) ch \frac{qn\pi}{b} x - \frac{qn\pi}{b} x \cdot sh \frac{qn\pi}{b} x sh qn \pi}{(sh 2qn\pi + 2qn\pi)} \times$$

$$\times \cos \frac{qn\pi}{b} y. \quad (12)$$

$$\tau_{xy} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\frac{n\pi}{q} ch \frac{n\pi}{q} sh \frac{n\pi}{b} y - \frac{n\pi}{b} y ch \frac{n\pi}{b} y sh \frac{n\pi}{q}}{\left(sh 2 \frac{n\pi}{q} + 2 \frac{n\pi}{q} \right)} \cdot \sin \frac{n\pi}{b} x =$$

$$-2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{qn\pi \cdot ch qn\pi \cdot sh \frac{qn\pi}{b} x - \frac{qn\pi}{b} x ch \frac{qn\pi}{b} x \cdot sh qn\pi}{(sh 2qn\pi + 2qn\pi)} \cdot \sin \frac{qn\pi}{b} y. \quad (13)$$

В этих выражениях $q = \frac{b}{c}$.

Соотношения (10) и (8) в новых постоянных принимают следующий вид:

$$A_i = b_i + \sum_{n=1}^{\infty} a_{in} A_n, \quad (14)$$

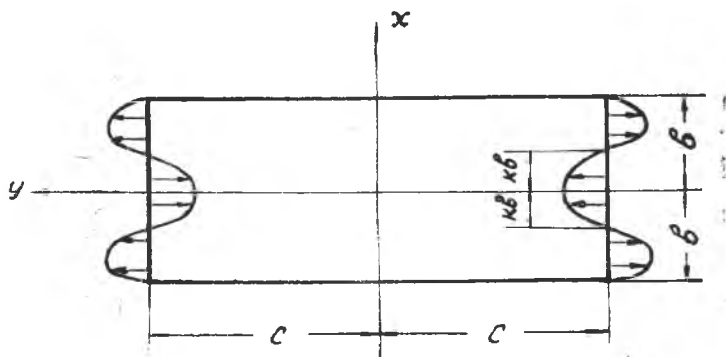
где

$$a_{in} = (-1)^{n+i} \frac{64i^2 nq^4 sh^2 \frac{n\pi}{q}}{\pi^2 \left(sh 2 \frac{n\pi}{q} + 2 \frac{n\pi}{q} \right)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 sh^2 kq\pi}{(k^2q^2 + i^2)^2 (n^2 + k^2q^2)^2 (sh 2kq\pi + 2kq\pi)};$$

$$B_i = (-1)^{i+1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{8nq^3 sh^2 \frac{n\pi}{q}}{\pi \left(sh 2 \frac{n\pi}{q} + 2 \frac{n\pi}{q} \right)} \cdot \frac{i^2}{(n^2 + q^2i^2)^2} A_n \quad (15)$$

Вычисление напряжений производится в следующем порядке. Из системы уравнений (14) определяются коэффициенты A_n , затем вычисляются коэффициенты B_i по формуле (15) и далее определяются напряжения с помощью выражений (11), (12) и (13). Во всех решениях, которые приведены ниже, при вычислении напряжений удерживалось 40 членов каждого ряда. В соответствии с этим бесконечная система (14) заменялась системой сорока уравнений. Вычисления производились на машине «Урал-2». Точность решения оценивалась сравнением вычисленных напряжений на контуре с исходной нагрузкой.

Во всех задачах разница между вычисленными и исходными напряжениями не превышала $1 \div 2\%$. В соответствии с намеченным способом исследования было рассмотрено нагружение полосы, представленное на фиг. 4. Нагрузка на вертикальных сторонах

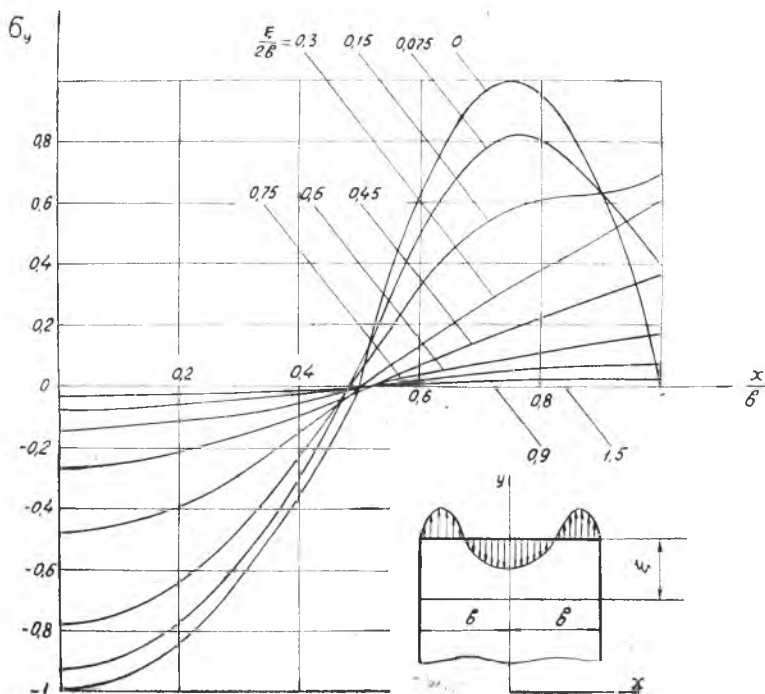


Фиг. 4.

$$\sigma_y|_{y=\pm c} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1-k}{k^3 b} x^2 + \frac{k-1}{k} \text{ при } 0 \leq x \leq kb \\ -\frac{4}{(1-k)^2 b^2} x^2 + \frac{4(1+k)}{(1-k)^2 b} x - \frac{4k}{(1-k)^2} \text{ при } x \geq kb \end{array} \right\} \quad (16)$$

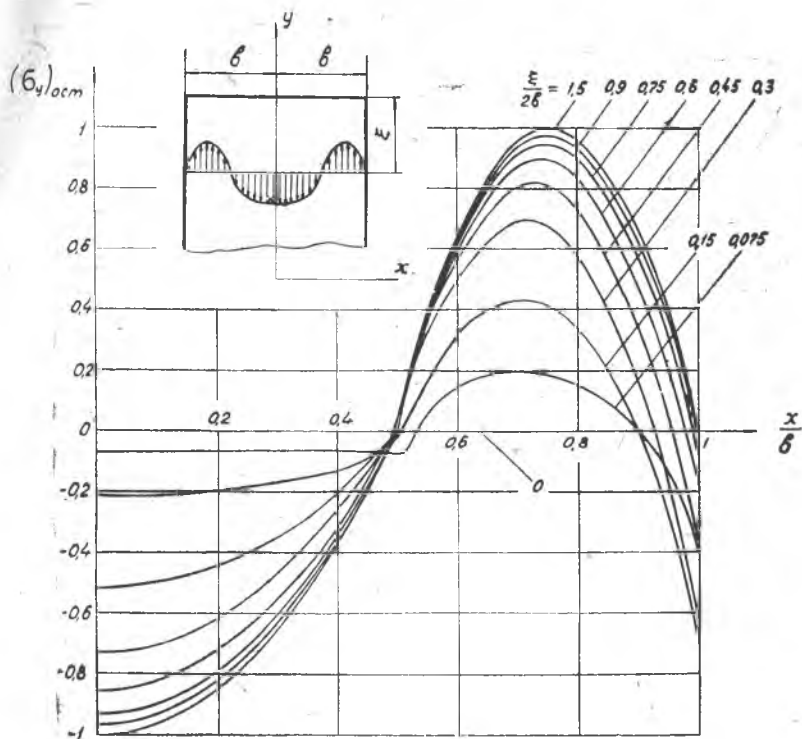
Нагрузка в пределах каждой стороны самоуравновешена, что является обязательным условием для остаточных напряжений.

В дальнейшем напряжения в зоне, где имеются первоначальные деформации, именуются активными напряжениями. В оставшейся части полоски развиваются реактивные напряжения, которые уравновешивают активные. Применительно к фиг. 4 напряжения одного знака можно считать активными, а напряжения другого знака реактивными. Изменением k можно менять соотношение между зонами. Для исключения взаимного влияния торцевых нагрузок было принято $q = \frac{b}{c} = \frac{1}{3}$. Несмотря на очевидность отсутствия взаимного влияния торцевых нагрузок при таком значении q , были вычислены напряжения в точках на оси x , они оказались на несколько порядков ниже торцевых нагрузок. На фиг. 5 приведено решение для нагрузки (16) при $k=0,5$. Вы-



Фиг. 5.

нитая ординаты этих кривых из напряжений по формуле (16), получим остаточные напряжения в зоне включения (фиг. 6).

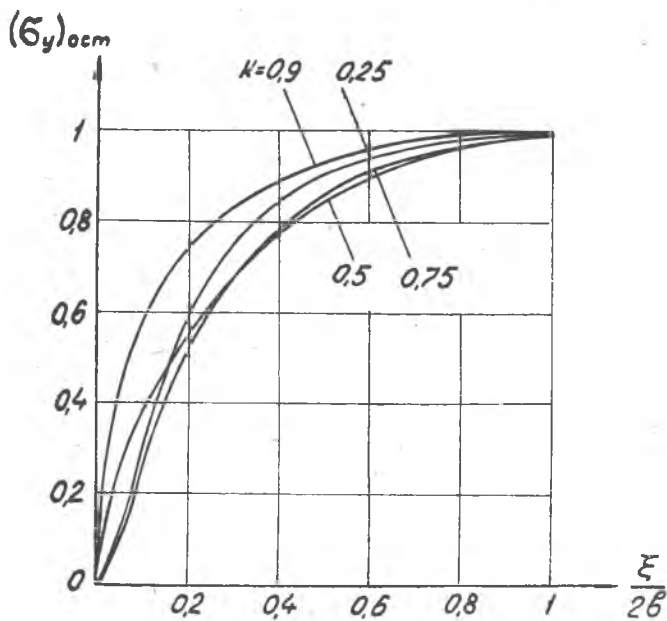


Фиг. 6.

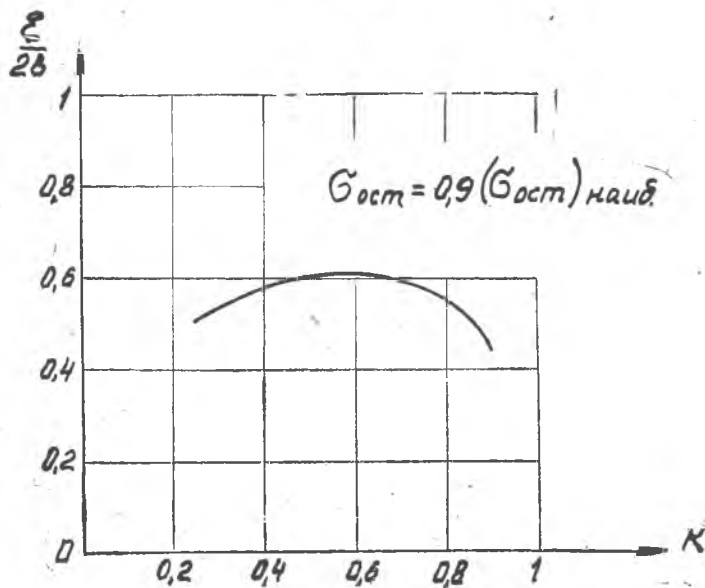
На фиг. 7 показано изменение наибольшего остаточного напряжения в зоне включения для различных значений κ . В случае, когда зоны активных и реактивных напряжений сопоставимы по протяженности ($\kappa=0,25; 0,5; 0,75$), характер включения является примерно одинаковым (соответствующие кривые расположены рядом).

С увеличением разницы в размерах указанных зон наибольшие остаточные напряжения включаются быстрее, что можно видеть на примере кривой для $\kappa=0,9$.

На фиг. 8 показано влияние κ на протяженность зоны, в которой наибольшее остаточное напряжение включается на 90%. На основании этих результатов можно считать, что для принятого допуска на величину остаточных напряжений, в случае соизмеримых зон активных и реактивных напряжений, протяженность зоны включения равна приблизительно половине высоты полоски.



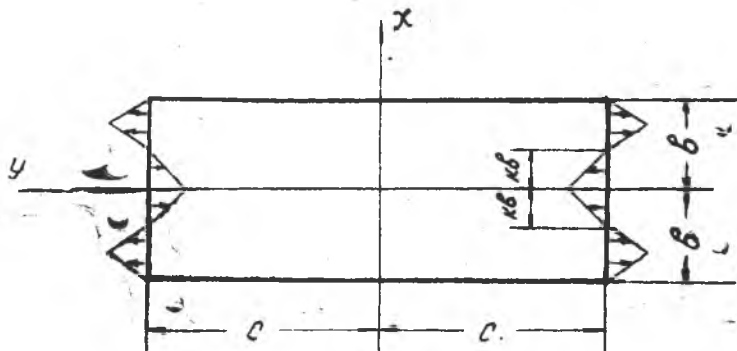
Фиг. 7.



Фиг. 8.

С увеличением разницы в размерах зон, протяженность зоны включения уменьшается. К сожалению, нам не удалось получить решение для $\kappa > 0,9$, так как в этом случае нужно удерживать в каждом ряде решения более сорока членов, но это превышает возможности машины «Урал-2», на которой производились вычисления. Однако кривая, приведенная на фиг. 8, позволяет предположить, что для весьма малых активных зон ($\kappa \rightarrow 1$), характерных для остаточных напряжений после механической обработки, включение остаточных напряжений происходит на участке, размеры которого малы сравнительно с высотой полосы.

На фиг. 9 показано нагружение по закону ломаной прямой. Здесь, по сравнению с предыдущим случаем при одинаковых наибольших напряжениях, равнодействующие нагрузок в каждой



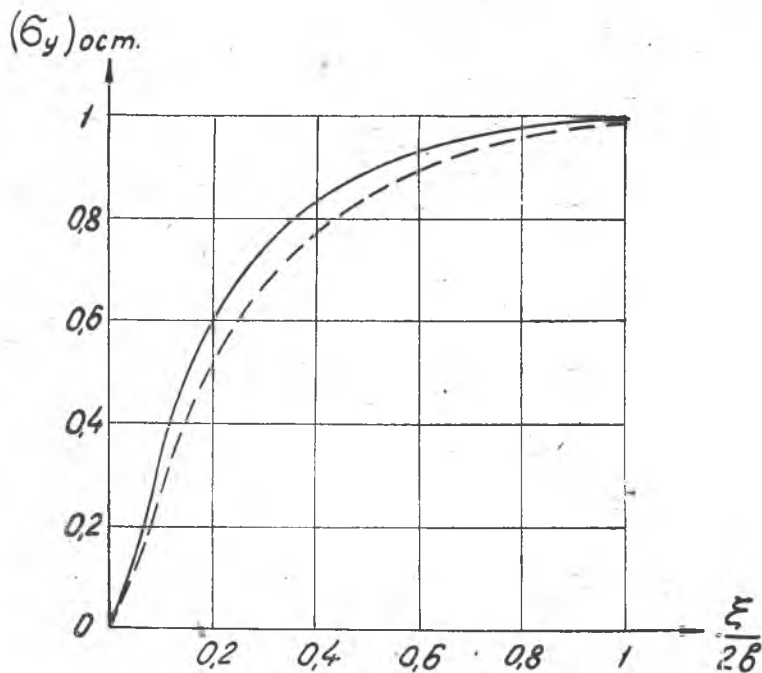
Фиг. 9

зоне на 25% ниже. Решение для этого случая позволяет выяснить порядок влияния полноты эпюры остаточных напряжений на зону включения.

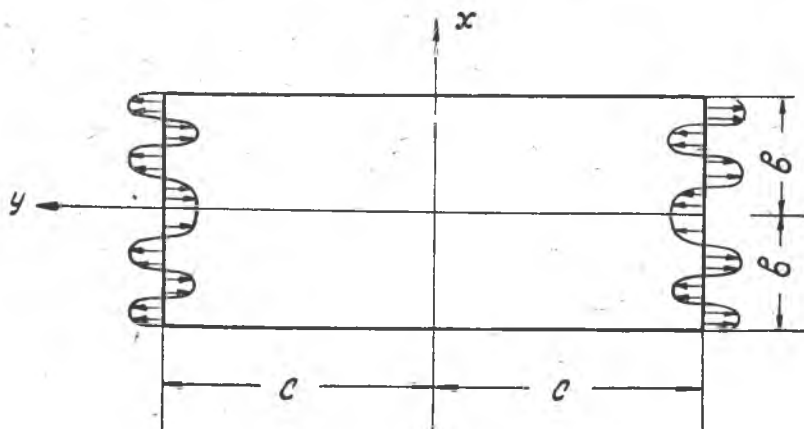
На фиг. 10 приводится решение задачи для $\kappa=0,5$ (сплошная линия). Здесь же для сравнения приведено предыдущее решение для соответствующего значения κ (штриховая линия). Сравнивая эти результаты, можно заключить, что с уменьшением полноты эпюры, включение остаточных напряжений происходит на несколько меньшей длине. На фиг. 11 показано нагружение с неоднократной сменой знака усилий:

$$\sigma_y|_{v=1c} = \left. \begin{array}{l} 16 \frac{x^2}{b^2} - 1 \quad \text{при } 0 \leq x \leq \frac{b}{4} \\ -64 \frac{x^2}{b^2} + 48 \frac{x}{b} - 8 \quad \text{при } \frac{b}{4} \leq x \leq \frac{b}{2} \\ 64 \frac{x^2}{b^2} - 80 \frac{x}{b} + 24 \quad \text{при } \frac{b}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}b \\ -64 \frac{x^2}{b^2} + 112 \frac{x}{b} - 48 \quad \text{при } \frac{3}{4}b \leq x \leq b \end{array} \right\} \quad (17)$$

С помощью этого решения выясняется влияние многократной смены знака остаточными напряжениями на зону включения. Результаты решения после вычисления наибольших остаточных напряжений приведены на фиг. 12 (сплошная линия), где для

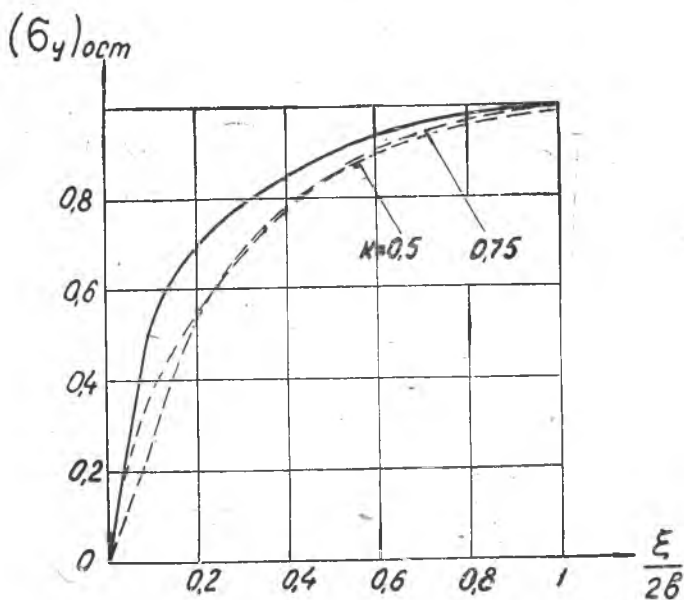


Фиг. 10.



Фиг. 11.

сравнения изображены кривые включения остаточных напряжений в случае (16) при $\kappa=0,5$ и $\kappa=0,75$ (штриховая линия). Рассматривая эти кривые, можно видеть, что увеличение числа областей активных и реактивных напряжений приводит к уменьшению протяженности зоны включения.



Фиг. 12.

Представленные выше решения позволяют составить представление о характере зоны включения остаточных напряжений в полоске и оценить влияние на эту зону различных факторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Биргер. Остаточные напряжения. Машгиз, 1963.
2. Г. Бюлер. Полное определение поля остаточных напряжений в сплошных и полых металлических цилиндрах. Сборник «Остаточные напряжения» под редакцией В. Р. Осгуда, И. Л., 1957.