ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, вып. 2, 1975

М.В.Зацепина

ВАРИАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ВЫРЕЗОМ ПРИ БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ

Основные обозначения:

R, h – радиус срединной поверхности и толщина оболочки;
R_1, R_2 – главные радиусы кривизны;
R_α, R_β – радиусы кривизны координатных линий α, β;
A, B – параметры Ляме в координатах α, β;
ε_α, ε_β, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ – компоненты деформации в срединной поверхности оболочки;
æ_ρ, æ_θ, $\text{æ}_{\rho\theta}$ – изменение кривизн и кручение срединной поверхности;
N_α, N_β, $N_{\alpha\beta}$ – нормальные и сдвигающее усилия;
M_α, M_β, $M_{\alpha\beta}$ – изгибающие и крутящий моменты в сечениях оболочки;
Q_α – обобщенная перерезывающая сила в смысле Кирхгофа;
u, v, w – компоненты перемещений точки срединной поверхности;
p – внешнее давление;
E, μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона.

В работе [1] были получены вариационные уравнения, позволяющие решать задачи о напряженно-деформированном состоянии в зоне кругового выреза на боковой поверхности цилиндрической оболочки. В настоящей статье приводится вывод вариационных уравнений типа Лагранжа и Кастильяно для произвольной пологой оболочки с криволинейным вырезом при больших прогибах.

Рассмотрим упругую цилиндрическую оболочку постоянной толщины h, ослабленную отверстием средних размеров. Срединную поверхность оболочки отнесем к криволинейным ортогональным координатам α, β. Примем, что координатная линия α =I совпадает с контуром отверстия, параметр β выбирается таким образом, чтобы при обходе контура α =I он изменялся в пределах от 0 до 2π. Возмущения напряженно-деформированного состояния, обусловленные вырезом, проявляются лишь в ограниченной зоне вблизи отверстия. Значение параметра α, при котором эти возмущения практически затухают, обозначим через α_1.

За исходные примем геометрические соотношения нелинейной теории пологой оболочки в виде [2]

$$\varepsilon_\alpha = e_\alpha + \frac{1}{2}\vartheta_\alpha^2, \quad \varepsilon_\beta = e_\beta + \frac{1}{2}\vartheta_\beta^2, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{A}\frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\vartheta_\beta \quad (\mathrm{I})$$

$$\varkappa_\alpha = \frac{1}{A}\frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\vartheta_\beta, \quad \varkappa_\beta = \frac{1}{B}\frac{\partial \vartheta_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\vartheta_\alpha, \quad \varkappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{A}\frac{\partial \vartheta_\beta}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\vartheta_\alpha, \quad (2)$$

где

$$e_\alpha = \frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}v + \frac{1}{R_\alpha}w, \quad e_\beta = \frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}u + \frac{1}{R_\alpha}w$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u}{A}\right) + \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{v}{B}\right) - \frac{2}{R_{\alpha\beta}}w, \quad \vartheta_\alpha = -\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha}, \quad \vartheta_\beta = -\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta} \quad (3)$$

В теории пологих оболочек в качестве основных неизвестных принимают две функции: нормальное перемещение w и функцию напряжений φ. Через w определяются моменты и перерезывающие силы, а через φ выражаются усилия в срединной поверхности оболочки [3]. Относительно этих функций выводится система вариационных уравнений.

Первое из них, вариационное уравнение Лагранжа, получим путем варьирования перемещения w. Применим принцип возможных перемещений

$$\delta U = \delta A, \qquad (4)$$

где

δU – вариация потенциальной энергии деформации системы,

δA – суммарная работа внешних сил на возможных перемещениях.

Если в качестве внешних нагрузок рассматривать распределенное нормальное давление p , а также погонные силы $\tilde{N}_{\alpha}$, $\tilde{N}_{\alpha\beta}$, $\tilde{Q}_{\alpha}^{*}$ и моменты $\tilde{\mathcal{M}}_{\alpha}$, $\tilde{\mathcal{M}}_{\alpha\beta}$, заданные на контуре отверстия (рис. I), то

$$\delta A = -\int_{0}^{2\pi}(\tilde{N}_{\alpha}\,\delta u + \tilde{N}_{\alpha\beta}\,\delta v + \tilde{Q}_{\alpha}^{*}\,\delta w + \tilde{\mathcal{M}}_{\alpha}\,\delta\vartheta_{\alpha} + \tilde{\mathcal{M}}_{\alpha\beta}\,\delta\vartheta_{\beta})\,B\,d\beta + \int_{1}^{\alpha_1}\int_{0}^{2\pi} p\,\delta w\,AB\,d\alpha\,d\beta, \qquad (5)$$

где δu , δv , δw - произвольные вариации компонентов перемещения точек срединной поверхности оболочки, направленные в сторону положительных координатных осей и обращающиеся в нуль при $\alpha \longrightarrow \alpha_1$.

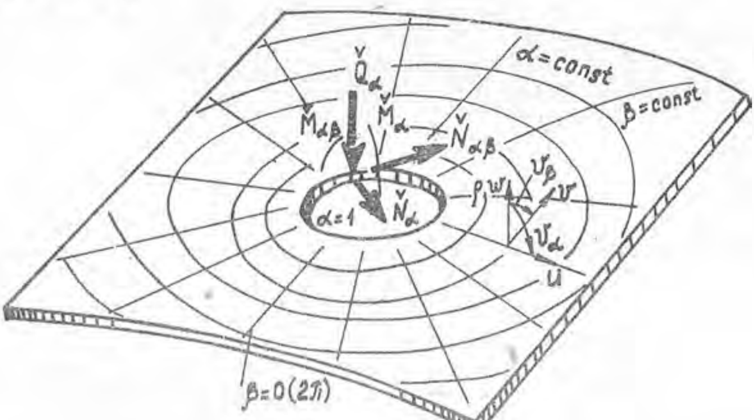

Рис. 1

Выражение для вариации потенциальной энергии деформации оболочки имеет вид

$$\delta U = \int_{1}^{\alpha_1}\int_{0}^{2\pi}(N_{\alpha}\,\delta\varepsilon_{\alpha} + N_{\beta}\,\delta\varepsilon_{\beta} + N_{\alpha\beta}\,\delta\varepsilon_{\alpha\beta} + \mathcal{M}_{\alpha}\,\delta\varkappa_{\alpha} + \mathcal{M}_{\beta}\,\delta\varkappa_{\beta} + 2\mathcal{M}_{\alpha\beta}\,\delta\varkappa_{\alpha})\,AB\,d\alpha\,d\beta. \qquad (6)$$

Воспользовавшись равенствами (I) - (3), найдем зависимости между вариациями деформаций и возможными перемещениями δu , δv , δw и подставим их в подынтегральное выражение в (6). Применим формулы интегрирования по частям и после подстановки (5), (6) в (4) получим

$$\int_1^{\alpha_1}\int_0^{2\pi}[F_1\delta u+F_2\delta v+(F_3+F_4-p)\delta w]AB\,d\alpha\,d\beta-$$

$$-\int_0^{2\pi}(N_\alpha-\tilde N_\alpha)\delta u+(N_{\alpha\beta}-\tilde N_{\alpha\beta})\delta v+(\overset{*}{Q}_\alpha-\tilde Q^*_\alpha-\tilde N_\alpha\vartheta_\alpha-\tilde N_{\alpha\beta}\vartheta_\beta)\delta w-(\mathcal{M}_\alpha-\tilde{\mathcal{M}}_\alpha)\delta\vartheta_\alpha]B\,d\beta=0 \quad (7)$$

где

$$F_1(\alpha,\beta)=-\frac{1}{AB}\Big[\frac{\partial(BN_\alpha)}{\partial\alpha}+\frac{\partial(AN_{\alpha\beta})}{\partial\beta}+\frac{\partial A}{\partial\beta}N_{\alpha\beta}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}N_\beta\Big] \quad (8)$$

$$F_2(\alpha,\beta)=-\frac{1}{AB}\Big[\frac{\partial(AN_\beta)}{\partial\beta}+\frac{\partial(BN_{\alpha\beta})}{\partial\alpha}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}N_{\alpha\beta}-\frac{\partial A}{\partial\beta}N_\alpha\Big] \quad (9)$$

$$F_3(\alpha,\beta)=-\frac{1}{AB}\Big[\frac{\partial(BQ_\alpha)}{\partial\alpha}+\frac{\partial(AQ_\beta)}{\partial\beta}+\frac{N_\alpha}{R_\alpha}+\frac{N_\beta}{R_\beta}-2\frac{N_{\alpha\beta}}{R_{\alpha\beta}}\Big] \quad (10)$$

$$F_4(\alpha,\beta)=\frac{1}{AB}\Big[\frac{\partial(BN_\alpha\vartheta_\alpha)}{\partial\alpha}+\frac{\partial(AN_\beta\vartheta_\beta)}{\partial\beta}+\frac{\partial(BN_{\alpha\beta}\vartheta_\beta)}{\partial\alpha}\Big] \quad (11)$$

$$Q^*_\alpha=Q_\alpha+\frac{1}{B}\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial\beta}. \quad (12)$$

Поскольку вариации δu , δv , δw произвольны и независимы, то из (7) вытекают уравнения равновесия

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(BN_\alpha)}{\partial\alpha}+\frac{\partial(AN_{\alpha\beta})}{\partial\beta}+\frac{\partial A}{\partial\beta}N_{\alpha\beta}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}N_\beta=0\\&\frac{\partial(AN_\beta)}{\partial\beta}+\frac{\partial(BN_{\alpha\beta})}{\partial\alpha}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}N_{\alpha\beta}-\frac{\partial A}{\partial\beta}N_\alpha=0\end{aligned} \quad (13)$$

и статические граничные условия.

С введением функции напряжений [3] уравнения равновесия (13) тождественно удовлетворяются, и в (7) следует положить $F_1=F_2=0$. Таким образом, в первом интеграле исчезают члены, содержащие вариации δu и δv . Чтобы пропали соответствующие члены и во втором интеграле (7), нужно удовлетворить по контуру выреза граничным условиям в срединной поверхности оболочки. С учетом этого уравнения (7) можно представить в следующем виде:

$$\int_1^{\alpha_1}\int_0^{2\pi}[D\nabla^2\nabla^2w-\ell(\varphi)+\ell_1(\varphi,w)-p]\delta w\,AB\,d\alpha\,d\beta-$$

$$-\int_0^{2\pi}[(Q^*_\alpha-\tilde Q^*_\alpha)\delta w+(\mathcal{M}_\alpha-\tilde{\mathcal{M}}_\alpha)\delta\vartheta_\alpha]_{\alpha=1}B\,d\beta=0, \quad (14)$$

где

$$\ell(\varphi)=\frac{1}{R_\alpha}\Big[\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\Big(\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\Big)+\frac{1}{A^2B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\Big]-\frac{1}{R_\beta}\Big[\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big(\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\Big)+$$

$$+\frac{1}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\Big]+\frac{2}{R_{\alpha\beta}AB}\Big[\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\Big] \qquad (15)$$

$$\ell_1(\varphi,w)=\frac{1}{AB}\Big\{\Big[\frac{\partial}{\partial\beta}\Big(\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\Big)+\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\Big]\Big[\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\Big)+$$

$$+\frac{1}{B^2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\beta}\Big]+\Big[\frac{\partial}{\partial\beta}\Big(\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\Big)+\frac{1}{B^2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\Big]\Big[\frac{\partial}{\partial\beta}\Big(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}\Big)+\frac{1}{A^2}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\Big]+$$

$$+\frac{2}{AB}\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta}-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\Big)\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\alpha}-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta}\Big)\Big\} \qquad (16)$$

Итак, получено вариационное уравнение типа Лагранжа для пологой оболочки при больших прогибах.

Второе уравнение - вариационное уравнение Кастильяно, выражающее принцип дополнительной энергии, - получим, варьируя функцией напряжений. Однако обычная запись этого принципа в форме

$$\delta\overset{*}{U}=\delta\overset{*}{A}$$

($\delta\overset{*}{U}$ - вариация дополнительной потенциальной энергии, $\delta\overset{*}{A}$ - вариация дополнительной работы внешних сил) имеет место лишь в геометрически линейной задаче и только в том случае, когда при варьировании напряженного состояния удовлетворяются все уравнения равновесия. В данном случае, при варьировании функции φ , удовлетворяются лишь два уравнения равновесия, и задача является геометрически нелинейной. Поэтому следует перейти к более общей записи принципа Кастильяно.

Дадим функции напряжений произвольную вариацию, удовлетворяющую условиям периодичности относительно окружной координаты β и стремящуюся к нулю при $\alpha\to\alpha_1$.

Вариация дополнительной потенциальной энергии запишется в виде

$$\delta\overset{*}{U}=\int_1^{\alpha_1}\int_0^{2\pi}(\delta N_\alpha\varepsilon_\alpha+\delta N_\beta\varepsilon_\beta+\delta N_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta})AB\,d\alpha\,d\beta. \qquad (18)$$

Подставив в подынтегральное выражение (18) вместо деформаций ε_α , ε_β , $\varepsilon_{\alpha\beta}$ их значения (1) и выполнив преобразования, придем с учетом (13) к следующему уравнению:

$$\delta\overset{*}{U}=\int_1^{\alpha_1}\int_0^{2\pi}(\delta F_{3k}w+\delta F_5)AB\,d\alpha\,d\beta-\int_0^{2\pi}(\delta N_\alpha u+\delta N_{\alpha\beta}v)_{\alpha=1}B\,d\alpha. \qquad (19)$$

Здесь

$$\delta F_3 = \frac{\delta N_\alpha}{R_\alpha} + \frac{\delta N_\beta}{R_\beta} - \frac{2}{R_{\alpha\beta}} \delta N_{\alpha\beta} \tag{20}$$

$$\delta F_5 = \frac{1}{2}(\delta N_\alpha \vartheta_\alpha^2 + \delta N_\beta \vartheta_\beta^2 + 2N_{\alpha\beta} \vartheta_\alpha \vartheta_\beta). \tag{21}$$

Последний член в правой части (19) представляет собой дополнительную работу δA^*, т.е. работу, которую совершают приращения усилий δN_α и $\delta N_{\alpha\beta}$ на действительных перемещениях края выреза. Обозначим их через $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ и в дальнейшем дополнительную работу будем записывать в виде

$$\delta \overset{*}{A} = -\int_0^{2\pi} (\delta N_\alpha \tilde{u} + \delta N_{\alpha\beta} \tilde{v}) B\, d\beta. \tag{22}$$

В итоге приходим к обобщенной записи принципа Кастильяно для пологой оболочки

$$\delta \overset{*}{U} - \int_1^{\alpha_1}\int_0^{2\pi} (\delta F_3 w + \delta F_5) AB\, d\alpha\, d\beta = \delta \overset{*}{A}. \tag{23}$$

Подставив в уравнение (23) зависимости (18), (20) – (22), получим

$$\begin{gathered}\int_1^{\alpha_1}\int_0^{2\pi} \delta N_\alpha \overset{*}{\varepsilon}_\alpha + \delta N_\beta \overset{*}{\varepsilon}_\beta + \delta N_{\alpha\beta} \overset{*}{\varepsilon}_{\alpha\beta}) AB\, d\alpha\, d\beta = \\ = \int_0^{2\pi} (\delta N_\alpha \tilde{u} + \delta N_{\alpha\beta} \tilde{v}) B\, d\beta.\end{gathered} \tag{24}$$

Здесь для краткости записи введены следующие обозначения:

$$\begin{gathered}\overset{*}{\varepsilon}_\alpha = \varepsilon_\alpha - \frac{1}{R_\alpha} w - \frac{1}{2}\vartheta_\alpha^2, \quad \overset{*}{\varepsilon}_\beta = \varepsilon_\beta - \frac{1}{R_\beta} w - \frac{1}{2}\vartheta_\beta^2 \\ \overset{*}{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} + \frac{2}{R_{\alpha\beta}} w - \vartheta_\alpha \vartheta_\beta.\end{gathered} \tag{25}$$

Применяя формулы интегрирования по частям, левую часть уравнения (24) с учетом зависимостей (25) можно привести к следующему виду:

$$\begin{gathered}-\int_1^{\alpha_1}\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{Eh}\nabla^2\nabla^2\varphi + \ell(w) - \frac{1}{2}\ell_1(w,w)\right] AB\, d\alpha\, d\beta - \\ -\frac{1}{AB}\int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial(B\overset{*}{\varepsilon}_\alpha)}{\partial\alpha} - \frac{\partial(A\overset{*}{\varepsilon}_{\alpha\beta})}{\partial\beta} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}\overset{*}{\varepsilon}_\alpha\right]\delta\varphi - \frac{\overset{*}{\varepsilon}_\beta}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\delta\varphi.\end{gathered} \tag{26}$$

Для преобразования выражения, стоящего под знаком одинарного интеграла в (26), воспользуемся соотношениями, которые вытекают из формул (1) – (3):

$$\overset{*}{\varepsilon}_{\alpha} = \frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta} v, \qquad \overset{*}{\varepsilon}_{\beta} = \frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha} u$$

$$\overset{*}{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u}{A}\right) + \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{v}{A}\right). \tag{27}$$

В итоге искомое вариационное уравнение типа Кастильяно для рассматриваемой задачи (24) представим в виде

$$\int_{1}^{\alpha_1}\int_{0}^{2\pi}\left[\frac{1}{Eh}\nabla^2\nabla^2\varphi + \ell(w) - \frac{1}{2}\ell_1(w,w)\right]\delta\varphi\, AB\, d\alpha\, d\beta -$$

$$-\int_{0}^{2\pi}\left[\delta N_{\alpha}(\tilde{u} - u) + \delta N_{\alpha\beta}(\tilde{v} - v)\right] B\, d\beta = 0. \tag{28}$$

Поскольку вариации $\delta\varphi$ произвольны, то из (28) вытекает условие совместности деформаций, выраженное через φ и w, и геометрические граничные условия.

Таким образом, для пологой оболочки с большим прогибом получены в произвольных ортогональных координатах два вариационных уравнения относительно функций φ и w.

Литература

I. Зацепина М.В., Хазанов Х.С. Вариационные уравнения для цилиндрической оболочки с круглым вырезом при больших прогибах. Сб. "Вопросы прочности элементов авиационных конструкций", Труды КуАИ, вып.48, 1971.

2. Вольмир А.С. Устойчивость деформированных систем, Москва, 1967.

3. Власов В.З. Избранные труды. Изд.АН СССР, 1962.