ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, вып. I, 1974

И.С.Ахмедьянов, В.В.Горбатенко

РАСЧЕТ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАГРУЖЕННОЙ ЧЕРЕЗ ЭКСЦЕНТРИЧНО РАСПОЛОЖЕННУЮ ЖЕСТКУЮ ШАЙБУ (ОБРАТНО СИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ)

В статье [I] рассмотрена задача о симметричном изгибе сферической оболочки, нагруженной через эксцентрично расположенную жесткую шайбу. В настоящей работе исследуется обратно симметричный случай нагружения (с сохранением всех обозначений, принятых в [I]).

I. Если сферическая оболочка находится под действием нагрузки, обратно симметричной по отношению к плоскости $\varphi = 0$, то выражения для усилий, моментов и перемещений можно представить в виде следующих рядов:

$$N_1(N_2, Q_1, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = \sum_{n=1}^{\infty} N_{1n}(N_{2n}, Q_{1n}, \mathcal{M}_{1n}, \mathcal{M}_{2n}) \sin n\varphi$$

$$S(Q_2, H) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(Q_{2n}, H_n) \cos n\varphi$$

$$u(w, \vartheta_1) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(w_n, \vartheta_{1n}) \sin n\varphi$$

$$v(\vartheta_2) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(\vartheta_{2n}) \cos n\varphi .$$

Здесь

$$S_n = -\gamma E\delta \sum_{i=1}^{2} (C_{in}\lambda_{in} + D_{in}\mu_{in}) + \frac{E\delta}{\sin^2\psi}(C_n\lambda_n - D_n\mu_n)$$

$$Q_{2n} = -\frac{2n\gamma E\delta}{\sin\psi}\sum_{i=1}^{2}(C_{in}\sigma_{in} + D_{in}\tau_{in})$$

$$H_n = -m\gamma E\delta^2(1-\mu)\sum_{i=1}^{2}(A_{in}\lambda_{in} + B_{in}\mu_{in}) + \frac{E\delta^2}{6\sin^2\psi}(A_n\lambda_n - B_n\mu_n)$$

$$\frac{v_n}{R} = \frac{2n\gamma(1+\mu)}{\sin\psi}\sum_{i=1}^{2}(C_{in}\sigma_{in} + D_{in}\tau_{in}) + C_n F_n + D_n \mathcal{Y}_n -$$

$$- C_n^* F_n^* + D_n^* \mathcal{Y}_n^*$$

$$\vartheta_{2n} = \frac{n}{\sin\psi}\sum_{i=1}^{2}(A_{in}\sigma_{in} + B_{in}\tau_{in}) + C_n\Phi_n + D_n\Omega_n +$$

$$+ C_n^*\Phi_n^* - D_n^*\Omega_n^*$$

для $n \geqslant 2$ и

$$\frac{v_1}{R} = \frac{2\gamma(1+\mu)}{\sin\psi}\sum_{i=1}^{2}(C_{i1}\sigma_{i1} + D_{i1}\tau_{i1}) + (C_1 + D_1)\mathcal{Y}_1 + (C_1 - D_1)F_1 +$$

$$+ (C_1^* + D_1^*)\cos\psi - (C_1^* - D_1^*)$$

$$\vartheta_{21} = \frac{1}{\sin\psi}\sum_{i=1}^{2}(A_{i1}\sigma_{i1} + B_{i1}\tau_{i1}) + (C_1 + D_1)\Phi_1 + (C_1 - D_1)\Omega_1 +$$

$$+ (C_1^* + D_1^*)\cos\psi$$

$$S_o = E\delta\frac{2C_o}{\sin^2\psi}, \qquad H_o = \frac{E\delta^2}{3}\frac{A_o}{\sin^2\psi}$$

$$\frac{v_o}{R} = 2C_o\left(\sin\psi\ln\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} - \operatorname{ctg}\psi\right) - 2C_o^*\sin\psi, \qquad \vartheta_{20} = \frac{v_o}{R}$$

для $n = I$ и $n = 0$.

Остальные величины определяются формулами (2), (6) и (8) из[I] .

Постоянные A_n, B_n и C_n, D_n, C_n^*, D_n^* при $n \geqslant 1$ связаны теми же зависимостями, что и в случае симметричного нагружения оболочки [I]. При $n = 0$

$$C_0 = -D_0, \quad A_0 = -B_0 = \frac{C_0}{2m}, \quad C_0^* = -D_0^* .$$

2. Усилия N_1, S, Q и моменты $\mathcal{M}_1$, H, распределенные вдоль некоторой параллели ψ (рис. 3а в [I]), дают равнодействующую (рис. I)

$$F_\eta = \pi R E \delta (C_1 - D_1) \qquad (I)$$

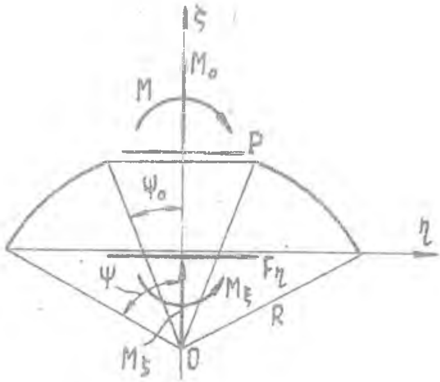

Рис. I.

и моменты относительно осей ξ, η и ζ, равные

$$\mathcal{M}_\xi = -\pi R^2 E\delta[(1+æ)(C_1 + D_1) - (C_1 - D_1)\cos\psi]$$

$$\mathcal{M}_\eta = 0, \quad \mathcal{M}_\zeta = 4\pi R^2 E\delta C_0 (1+æ) . \qquad (2)$$

Если к верхнему сечению оболочки $\psi = \psi_0$ приложены краевые усилия и моменты, приводящиеся к силе P и моментам $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_0$, то, составив условия равновесия отсеченной части оболочки с использованием зависимостей (I) и (2), можно получить, что

$$2C_0 = -\frac{\mathcal{M}_0}{2\pi R^2 E\delta (1+æ)}, \quad C_1 + D_1 = \frac{\mathcal{M} - PR\cos\psi_0}{\pi R^2 E\delta(1+æ)}, \quad C_1 - D_1 = -\frac{P}{\pi R E \delta}$$

3. При обратно симметричном нагружении оболочки со смещенной от вершины шайбой (рис. 2) выражения для усилий, моментов и перемещений, как и в случае симметричного нагружения [I],

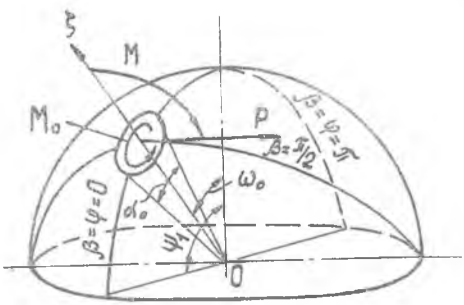

Рис. 2.

представим в следующем виде:

$$N_\alpha = N_\alpha^\circ + N_\alpha^*, \qquad N_\beta = N_\beta^\circ + N_\beta^*, \qquad S_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}^\circ + S_{\alpha\beta}^*$$

$$Q_\alpha = Q_\alpha^\circ + Q_\alpha^*, \quad Q_\beta = Q_\beta^\circ + Q_\beta^* \tag{3}$$

$$\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}_\alpha^\circ + \mathcal{M}_\alpha^*, \quad \mathcal{M}_\beta = \mathcal{M}_\beta^\circ + \mathcal{M}_\beta^*, \quad H_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta}^\circ + H_{\alpha\beta}^*$$

$$U = U^\circ + U^*, \qquad V = V^\circ + V^*, \qquad W = W^\circ + W^*$$

$$\varkappa_1 = \varkappa_1^\circ + \varkappa_1^*, \quad \varkappa_2 = \varkappa_2^\circ + \varkappa_2^* . \tag{4}$$

Здесь величины $N_\alpha^\circ, \ldots, \varkappa_2^\circ$ определяются в системе (α, β) с полюсом в точке B с координатами $\varphi = 0$, $\psi = \omega_0$ (рис.6 и 7 из [I]):

$$N_\alpha^\circ (N_\beta^\circ, Q_\alpha^\circ, \mathcal{M}_\alpha^\circ, \mathcal{M}_\beta^\circ) = \sum_{k=1}^{\infty} N_{\alpha k}^\circ (N_{\beta k}^\circ, Q_{\alpha k}^\circ, \mathcal{M}_{\alpha k}^\circ, \mathcal{M}_{\beta k}^\circ) \sin k\beta$$

$$S_{\alpha\beta}^\circ (Q_\beta^\circ, H_{\alpha\beta}^\circ) = \sum_{k=0}^{\infty} S_{\alpha\beta k}^\circ (Q_{\beta k}^\circ, H_{\alpha\beta k}^\circ) \cos k\beta$$

$$U^\circ(W^\circ, \chi_1^\circ) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k^\circ(W_k^\circ, \chi_{1k}^\circ)\sin k\beta$$

$$V^\circ(\chi_2^\circ) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k^\circ(\chi_{2k}^\circ)\cos k\beta .$$

Формулы для вычисления $N_{\alpha k}^\circ, \ldots, \chi_{2k}^\circ$ можно получить из выражений для $N_{1n}, \ldots, \vartheta_{2n}$, если в них перейти от аргумента ψ к аргументу α, изменить n на k и, кроме того, положить $C_{1k} = D_{1k} = 0$ (соответственно $A_{1k} = B_{1k} = 0$).

Усилия N_α^*, N_β^*, $S_{\alpha\beta}^*$, Q_α^*, Q_β^* и моменты M_α^*, M_β^*, $H_{\alpha\beta}^*$ определяются краевыми нагрузками, приложенными к сечению $\psi = \psi_1$, и могут быть найдены по формулам (I4) из [I], в которых величины $N_1, \ldots, H$ следует заменить на $N_1^*, \ldots, H^*$ и принять:

$$N_1^*(N_2^*, Q_1^*, M_1^*, M_2^*) = \sum_{n=1}^{\infty} N_{1n}^*(N_{2n}^*, Q_{1n}^*, M_{1n}^*, M_{2n}^*)\sin n\varphi$$

$$S^*(Q_2^*, H^*) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n^*(Q_{2n}^*, H_n^*)\cos n\varphi .$$

Связь между координатами α, β и ψ, φ одной и той же точки срединной поверхности оболочки выражается формулами сферической тригонометрии [I].

Для перемещений $U^*, \ldots, \chi_2^*$ имеем (рис. 8 и 9 из [I]):

$$U^* = u^*\cos\theta + v^*\sin\theta, \qquad V^* = -u^*\sin\theta + v^*\cos\theta, \qquad W^* = w^*$$

$$\chi_1^* = \vartheta_1^*\cos\theta + \vartheta_2^*\sin\theta, \qquad \chi_2^* = -\vartheta_1^*\sin\theta + \vartheta_2^*\cos\theta,$$

где

$$u^*(w^*, \vartheta_1^*) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^*(w_n^*, \vartheta_{1n}^*)\sin n\varphi$$

$$v^*(\vartheta_2^*) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^*(\vartheta_{2n}^*)\cos n\varphi . \tag{5}$$

Величины $N_{1n}, \ldots, H_n^*, u_n^*, \ldots, \vartheta_{2n}^*$ находятся из формул для $N_{1n}, \ldots, H_n, u_n, \ldots, \vartheta_{2n}$ при

$$C_{2n} = D_{2n} = 0, \quad C_n = D_n = 0, \quad C_n^* = D_n^* = 0.$$

В соотношения (3) и (4), если их записать в развернутом виде, войдут постоянные C_{1n}, D_{1n} ($n \geqslant 1$), C_{2k}, D_{2k}, D_k, D_k^* ($k \geqslant 1$) и C_k, C_k^* ($k \geqslant 0$). Три из этих постоянных

(C_0 , C_1 , D_1) находятся из уравнений равновесия, а остальные – из граничных условий.

4. Запишем граничные условия для края $\alpha = \alpha_0$. Ввиду абсолютной жесткости шайбы будем иметь при $\alpha = \alpha_0$ (рис. 3):

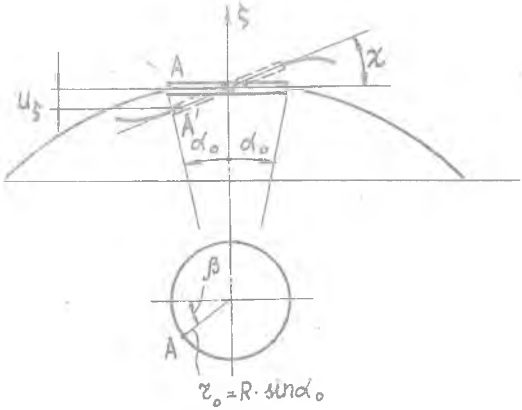

Рис. 3.

$$W(\alpha_0,\beta)\sin\alpha_0 + U(\alpha_0,\beta)\cos\alpha_0 = d_1 \sin\beta$$

$$W(\alpha_0,\beta)\cos\alpha_0 - U(\alpha_0,\beta)\sin\alpha_0 = -R\chi_0 \sin\alpha_0 \sin\beta \qquad (6)$$

$$V(\alpha_0,\beta) = d_0 + d_1\cos\beta , \qquad \chi_1(\alpha_0,\beta) = \chi \sin\beta$$

Здесь d_1, $d_0/R\sin\alpha_0$ и χ – перемещения шайбы (поступательное и повороты вокруг осей ζ и ξ).

Если края оболочки $\alpha = \alpha_0$ и $\psi = \psi_1$ настолько удалены друг от друга, что можно пренебречь взаимным влиянием краевых эффектов, то условия (6) можно представить в виде следующей системы уравнений:

$$\overset{0}{W}_K(\alpha_0)\sin\alpha_0 + \overset{0}{U}_K(\alpha_0)\cos\alpha_0 = 0$$

$$W_K^\circ(\alpha_\circ)\cos\alpha_\circ - U_K^\circ(\alpha_\circ)\sin\alpha_\circ = 0$$

$$V_K^\circ(\alpha_\circ) = 0, \qquad \chi_{1K}^\circ(\alpha_\circ) = 0$$

для всех $K \geqslant 2$ и

$$W_1^\circ(\alpha_\circ)\sin\alpha_\circ + U_1^\circ(\alpha_\circ)\cos\alpha_\circ = d_1$$

$$W_1^\circ(\alpha_\circ)\cos\alpha_\circ - U_1^\circ(\alpha_\circ)\sin\alpha_\circ = -R\chi\sin\alpha_\circ$$

$$V_1^\circ(\alpha_\circ) = d_1, \quad \chi_{11}^\circ(\alpha_\circ) = \chi, \quad V_\circ^\circ(\alpha_\circ) = d_\circ$$

для $K = 1$ и $K = 0$.

5. Для записи граничных условий по нижнему краю оболочки найдем выражения для перемещений в системе (ψ , φ), используя зависимости (4) и формулы (16), (17), (19) из [1] :

$$u(\psi,\varphi) = u^* + U^\circ\cos\theta - V^\circ\sin\theta$$

$$v(\psi,\varphi) = v^* + U^\circ\sin\theta + V^\circ\cos\theta$$

$$w(\psi,\varphi) = w^* + W^\circ$$

$$\vartheta_1(\psi,\varphi) = \vartheta_1^* + \chi_1^\circ\cos\theta - \chi_2^\circ\sin\theta$$

или

$$u(\psi,\varphi) = u^* + \sum_{K=0}^{\infty}(U_K^\circ\sin K\beta\cos\theta - V_K^\circ\cos K\beta\sin\theta)$$

$$v(\psi,\varphi) = v^* + \sum_{K=0}^{\infty}(U_K^\circ\sin K\beta\sin\theta + V_K^\circ\cos K\beta\cos\theta)$$

$$w(\psi,\varphi) = w^* + \sum_{K=1}^{\infty}W_K^\circ\sin K\beta \tag{7}$$

$$\vartheta_1(\psi,\varphi) = \vartheta_1^* + \sum_{K=0}^{\infty}(\chi_{1K}^\circ\sin K\beta\cos\theta - \chi_{2K}^\circ\cos K\beta\sin\theta).$$

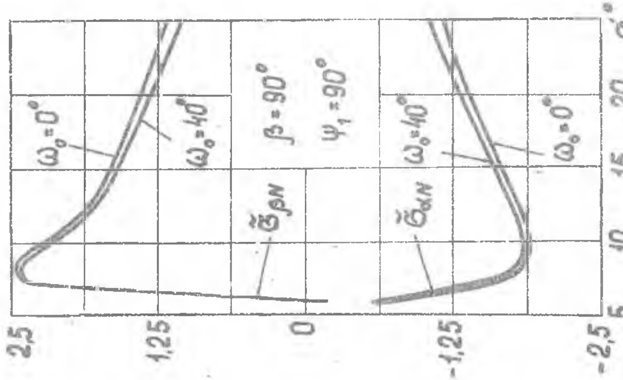
2,5
1,25
0
-1,25
-2,5
5
10
15
20
α°
$\omega_0 = 0°$
$\omega_0 = 40°$
$\beta = 90°$
$\psi_1 = 90°$
$\tilde{\sigma}_{\beta N}$
$\tilde{\sigma}_{\alpha N}$

Рис. 4

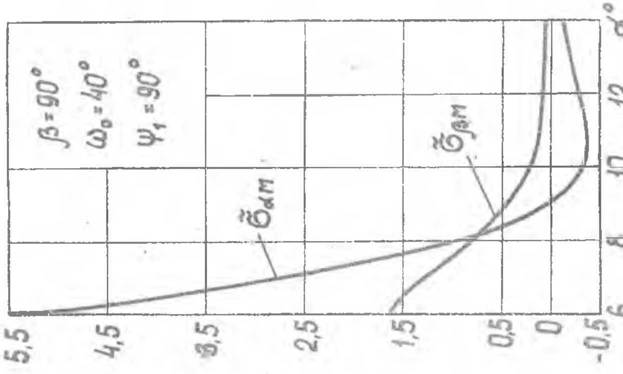
5,5
4,5
3,5
2,5
1,5
0,5
0
-0,5
6
8
10
12
α°
$\beta = 90°$
$\omega_0 = 40°$
$\psi_1 = 90°$
$\tilde{\sigma}_{\alpha M}$
$\tilde{\sigma}_{\beta M}$

Рис. 5

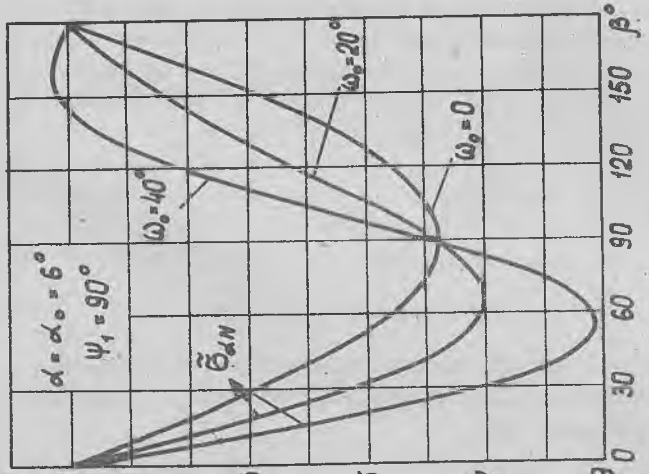
$\alpha = \alpha_0 = 6^\circ$
$\psi_1 = 90^\circ$
$\tilde{\sigma}_{\alpha N}$
$\omega_0 = 40^\circ$
$\omega_0 = 20^\circ$
$\omega_0 = 0$
1
0
-1
-3
-5
-7
-9
0
30
60
90
120
150
β°

Рис. 6

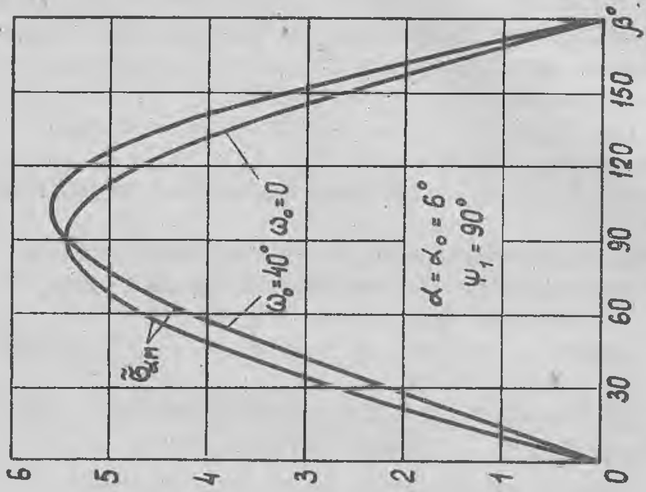
$\tilde{\sigma}_{\alpha m}$
$\omega_0 = 40^\circ$
$\omega_0 = 0$
$\alpha = \alpha_0 = 6^\circ$
$\psi_1 = 90^\circ$
6
5
4
3
2
1
0
30
60
90
120
150
β°

Рис. 7

Здесь u^*, v^*, w^* и ϑ_1^* определяются формулами (5).

Полагая в (7) $\psi = \psi_1$, будем иметь распределение перемещений по нижнему краю оболочки. Сопоставляя это распределение с заданными перемещениями края, получаем уравнения для определения постоянных интегрирования C_K, D_K ($K \geqslant 2$), C_K^* ($K \geqslant 0$), D_K^* ($K \geqslant 1$) и C_{1n}, D_{1n} ($n \geqslant 1$). Эти уравнения можно упростить, подставив в них значения C_K, D_K, C_K^* и D_K^* ($K \geqslant 2$), выраженные через C_{2K} и D_{2K} (из граничных условий по верхнему краю $\alpha = \alpha_0$ [2]).

6. Приведем результаты численного расчета полусферической оболочки, нагруженной через жесткую шайбу касательной силой P, перпендикулярной плоскости меридиана $\varphi = 0$.

Исходные данные: $R = 150$ см, $\delta = 0{,}3$ см, $\alpha_0 = 6^0$, $\omega_0 = 20^0$, $\mu = 0{,}3$, $E = 7 \cdot 10^5$ дан/см^2.

Расчеты были проведены для случая жесткого защемления опорной параллели $\psi = \psi_1 = \frac{\pi}{2}$, причем граничные условия

$$u(\psi_1, \varphi) = 0, \qquad v(\psi_1, \varphi) = 0$$

$$w(\psi_1, \varphi) = 0, \qquad \vartheta_1(\psi_1, \varphi) = 0$$

удовлетворялись в отдельных ее точках. Результаты расчетов представлены на рис. 4 - 7. Здесь

$$\tilde{\sigma}_{\alpha N} = \frac{N_\alpha}{\sigma^\circ \delta}, \qquad \tilde{\sigma}_{\beta N} = \frac{N_\beta}{\sigma^\circ \delta}, \qquad \tilde{\sigma}_{\alpha M} = \frac{6 M_\alpha}{\sigma^\circ \delta^2}, \qquad \tilde{\sigma}_{\beta M} = \frac{6 M_\beta}{\sigma^\circ \delta^2},$$

причем

$$\sigma^\circ = \frac{P \cos\alpha_0}{\pi R \delta}.$$

Литература

1. Ахмедьянов И.С. Расчет сферической оболочки, нагруженной через эксцентрично расположенную жесткую шайбу. Труды КуАИ, вып. 60, Куйбышев, 1973.
2. Ахмедьянов И.С., Горбатенко В.В. Труды КуАИ, вып.66, Куйбышев, 1973.