

В.Г. Фокин

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В МНОГОСЛОЙНЫХ
ПЛАСТИНАХ С АНИЗОТРОПНЫМИ СЛОЯМИ

Настоящая статья посвящена механическому методу определения остаточных напряжений в многослойных анизотропных пластинах.

В отличие от работы [1] используется более простой способ обоснования расчетных соотношений и рассматривается не только случай измерения деформаций, но и случай измерения кривизн исследуемой пластины. Для касательных напряжений при ортогональной анизотропии слоев получены явные расчетные формулы. Разработанный метод иллюстрируется практическим примером.

Рассмотрим многослойную пластину (рис.1) с анизотропными слоями, имеющими плоскость упругой симметрии, параллельную плоскости пластины. Предполагаем, что остаточное напряженное состояние имеет характерный для практики вид

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}(X_3), \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}(X_3), \quad \sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}(X_3), \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (1)$$

Чтобы сократить записи, будем применять тензорную символику. Индексы i, j, k, l могут принимать значения 1, 2.

Со стороны нижней широкой грани пластины удалим слой толщиной a . Удаление этого слоя эквивалентно нагружению пластины по краю силами и парами сил:

$$N_{ij}(a) = \int_0^a \sigma_{ij}(\xi) d\xi, \quad M_{ij}(a) = \int_0^a (h-\xi) \sigma_{ij}(\xi) d\xi. \quad (2)$$

Усилия (2) вызовут дополнительные напряжения σ_{ij}^a , для определения которых применим теорию анизотропных пластин, использующую гипотезу жесткой нормали и условие $\sigma_{33}^a = 0$. Деформацию в любой точке пластины можно представить как сумму:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \chi_3 x_{ij}, \quad (3)$$

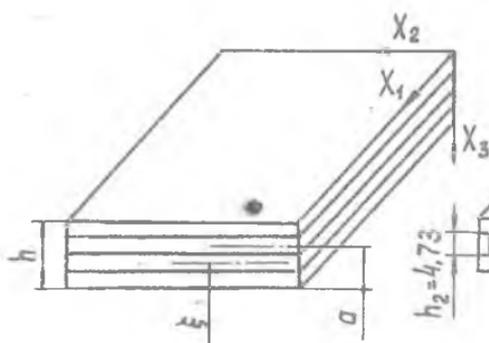


Рис. 1.

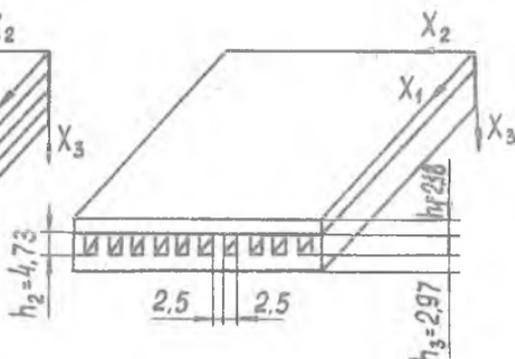


Рис. 2.

где $\varepsilon_{ij}^{(0)}$ - деформации координатной плоскости X_1, X_2 , совпадающей с верхней гранью пластины, χ_{ij} - кривизны и относительное закручивание координатной плоскости.

Для дополнительного плоского напряженного состояния анизотропной пластины соотношения упругости имеют вид

$$\sigma_{ij}^d = A_{ijke} \varepsilon_{ke} \quad (4)$$

Интегрируя равенства (4) в пределах $[0, h-a]$ и учитывая выражения (2), (3), получим

$$\int_0^a \sigma_{ij}(\xi) d\xi = D_{ijke}^{(1)}(a) \varepsilon_{ke}^{(0)}(a) + D_{ijke}^{(2)}(a) \chi_{ke}(a) \quad (5)$$

$$\int_0^a (h-\xi) \sigma_{ij}(\xi) d\xi = D_{ijke}^{(2)}(a) \varepsilon_{ke}^{(0)}(a) + D_{ijke}^{(3)}(a) \chi_{ke}(a)$$

Здесь $D_{ijke}^{(1)}(a) = \int_0^{h-a} A_{ijke} dX_3$, $D_{ijke}^{(2)}(a) = \int_0^{h-a} X_3 A_{ijke} dX_3$, $D_{ijke}^{(3)}(a) = \int_0^{h-a} X_3^2 A_{ijke} dX_3$ (6)

Продифференцируем первые три уравнения из системы (5) по параметру a :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^d(a) = & \frac{dD_{ijke}^{(1)}(a)}{da} \varepsilon_{ke}^{(0)}(a) + D_{ijke}^{(1)}(a) \frac{d\varepsilon_{ke}^{(0)}(a)}{da} + \\ & + \frac{dD_{ijke}^{(2)}(a)}{da} \chi_{ke}(a) + D_{ijke}^{(2)}(a) \frac{d\chi_{ke}(a)}{da} \end{aligned} \quad (7)$$

Соотношения (7) являются расчетными формулами для определения остаточных напряжений, если в процессе удаления слоев материала с нижней грани пластины измерять деформации $\epsilon_{ke}^{(0)}(\alpha)$, кривизны и кручение $\chi_{ke}(\alpha)$ верхней грани.

Можно вывести другие расчетные соотношения, где используются лишь три измеренные величины. С этой целью обратим равенства (5) и представим новые зависимости как интегральные уравнения для σ_{ij} . Если использовать деформации, то будем иметь систему трех интегральных уравнений

$$\epsilon_{ij}^{(0)}(\alpha) = \int_0^{\alpha} K_{ijke}^{(1)}(\alpha, \xi) \sigma_{ke}(\xi) d\xi. \quad (8)$$

При измерении кривизны и кручения получим аналогичную систему

$$\chi_{ij}(\alpha) = \int_0^{\alpha} K_{ijke}^{(2)}(\alpha, \xi) \sigma_{ke}(\xi) d\xi. \quad (9)$$

В уравнениях (8), (9)

$$K_{ijke}^{(1)}(\alpha, \xi) = [B_{ijke}^{(1)} + B_{ijke}^{(2)}(h - \xi)], \quad K_{ijke}^{(2)}(\alpha, \xi) = [B_{ijke}^{(2)} + B_{ijke}^{(3)}(h - \xi)],$$

$$\begin{bmatrix} B_{ijke}^{(1)} & B_{ijke}^{(2)} \\ B_{ijke}^{(2)} & B_{ijke}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{ijke}^{(1)} & D_{ijke}^{(2)} \\ D_{ijke}^{(2)} & D_{ijke}^{(3)} \end{bmatrix}^{-1}$$

Интегральные уравнения (8), (9) решаются лишь численным методом, но для поверхностного слоя $\alpha = 0$ из них путем дифференцирования по параметру α можно вывести явные расчетные формулы, имеющие вид алгебраических систем уравнений:

$$\frac{d\epsilon_{ij}^{(0)}}{d\alpha}(\alpha) = K_{ijke}^{(1)}(0, h) \cdot \sigma_{ke}(0) \quad \frac{d\chi_{ij}}{d\alpha}(\alpha) = K_{ijke}^{(2)}(0, h) \sigma_{ke}(0). \quad (10)$$

С помощью дифференцирования по параметру α можно найти также скачки функции $\sigma_{ke}(\alpha)$ на границах раздела слоев. Когда материалы слоев ортотропны и направления осей симметрии совпадают с осями X_1 , X_2 , X_3 , соотношения (8) и (9) упрощаются. Нормальные остаточные напряжения многослойной ортотропной пластины определяются из системы двух интегральных уравнений, а касательные - из одного интегрального уравнения.

Остановимся подробнее на определении остаточных касательных напряжений ортотропных пластин. После некоторых преобразований из равенств (8), (9) получим интегральные уравнения

$$2\chi_{12}(\alpha) D_G(\alpha) = \int_0^{\alpha} [h - \xi - c(\alpha)] \sigma_{12}(\xi) d\xi, \quad (11)$$

$$-2 \varepsilon_{12}^{(0)}(a) = \int_0^a \left[\frac{C(\alpha)}{D_G(\alpha)} (h - \xi - C(\alpha)) - \frac{1}{F_G(\alpha)} \right] G_{12}(\xi) d\xi, \quad (12)$$

где $C(\alpha) = \int_0^{h-\alpha} G_{12} X_3 dX_3$, $F_G(\alpha) = \int_0^{h-\alpha} G_{12} dX_3$, $D_G(\alpha) = \int_0^{h-\alpha} [X_3 - C(\alpha)]^2 G_{12} dX_3$.

$G_{12} = A_{1212}$ - модуль упругости при сдвиге.

Зависимости (11), (12) аналогичны интегральным уравнениям, рассмотренным в работе [2]. Они имеют явное решение:

$$G_{12}(\alpha) = L(\alpha) - G_{12}(\alpha) \int_0^a \frac{L(\xi)}{F_G(\xi)} d\xi, \quad (13)$$

$$G_{12}(\alpha) = T(\alpha) - (h-\alpha) G_{12}(\alpha) \int_0^a \frac{T(\xi)}{F_G(\xi) C(\xi)} d\xi, \quad (14)$$

где $L(\alpha) = 2 \frac{d}{d\alpha} \frac{[x_{12}(\alpha) D_G(\alpha)]}{[h - C(\alpha) - \alpha]}$, $T(\alpha) = -2 \frac{d}{d\alpha} \frac{[\varepsilon_{12}^{(0)}(\alpha) \frac{D_G(\alpha)}{C(\alpha)}]}{[h - C(\alpha) - \alpha - \frac{D_G(\alpha)}{C(\alpha) F_G(\alpha)}}$.

Все найденные соотношения применимы и к пластине с конструктивно-ортотропными слоями [3]. В этом случае нужно положить

$$A_{iiii} = \frac{E t_{ii}}{1 - \nu^2 t_{ii} t_{22}}, \quad A_{1122} = \frac{E \nu t_{11} t_{22}}{1 - \nu^2 t_{11} t_{22}}, \quad A_{1212} = G t_{12},$$

где E , G , ν - упругие характеристики материала слоя, t_{11} , t_{22} , t_{12} - коэффициенты заполнения слоя.

По формулам (8) определялись остаточные напряжения в конструктивно-ортотропной пластине, геометрия которой показана на рис.2. Верхний слой пластины h_1 был выполнен из стали IX18H10T ($E_1 = 1,9 \cdot 10^4$ кг/мм², $\nu_1 = 0,3$), ребра h_2 и нижний слой h_3 - из медного сплава ($E_2 = E_3 = 1,1 \cdot 10^4$ кг/мм², $\nu_2 = \nu_3 = 0,3$). Пластина изготавливалась путем пайки серебряным припоем в среде аргона при температуре 940°C. Охлаждение производилось вместе с контейнером вне печи. В процессе нагрева и охлаждения паяемый пакет поднимался грузами, создающими давление $\sim 0,05$ кг/см². Для исследования напряжения из пластины вырезались два образца-пластинки размерами 70ммx70мм. У одного образца последовательными слоями удалялась стальная часть, у другого - медная часть. Удаление материала осуществлялось фрезерованием на минимальных режимах с охлаждением водой. Каждый расчетный слой снимался в несколько проходов. Глубина фрезерования на последнем проходе не превышала 0,1 мм. В процессе удаления слоев измерялись дефор-

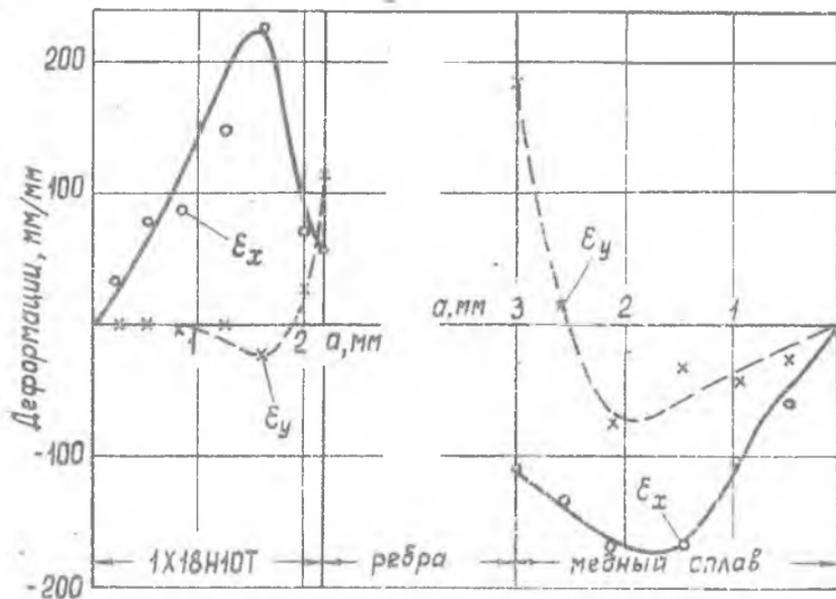


Рис. 3.

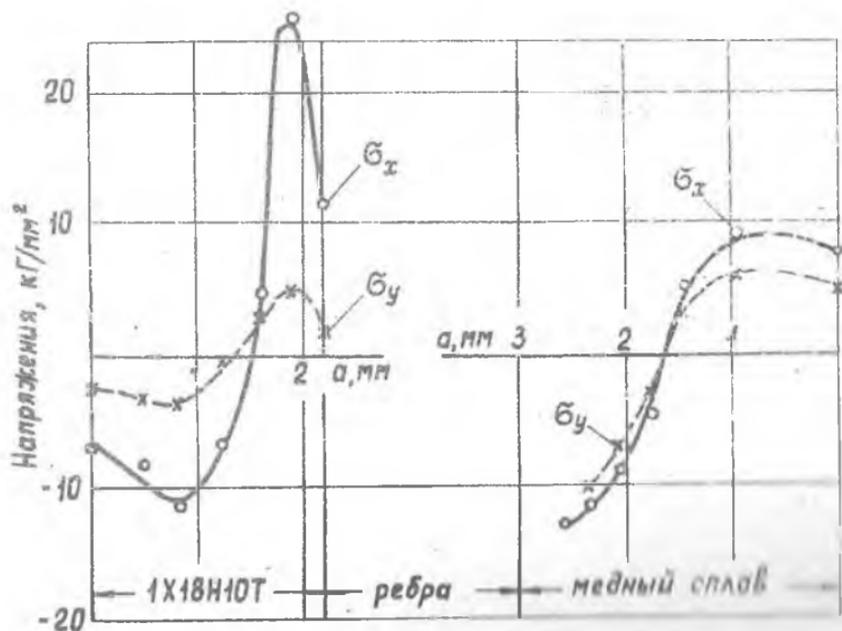


Рис. 4

мации образцов со стороны свободных широких граней. Для этой цели использовались тензодатчики ШС10Х100 и тензометрическая аппаратура ВСТ4. Датчики приклеивались в направлении ребер и перпендикулярно к ним. Результаты измерений деформаций представлены на рис. 3. Вычисленные по ним остаточные напряжения паяной пластины показаны на рис. 4. Из полученных данных вытекает: на поверхности стального слоя создаются напряжения сжатия, на поверхности медного слоя - напряжения растяжения; вблизи спая со стороны стали образуются растягивающие остаточные напряжения.

Л и т е р а т у р а

1. Schimmöller N. *Materialprüf*, 14, N4, 1972.
2. Фокин В.Г.; Иванов С.И. Труды КуАИ, вып. 53, 1971.
3. Биргер И.А. *Круглые пластинки и оболочки вращения*. Оборонгиз, М., 1961.