С. И. ИВАНОВ, М. П. ШАТУНОВ, В. Ф. ПАВЛОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В НАДРЕЗАХ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ДЕТАЛЯХ

Если на цилиндрической детали с остаточными напряжениями $\sigma_r(r)$, $\sigma_\Theta(r)$, $\sigma_z(r)$ сделать надрез, то в примыкающей к нему области напряжения изменятся. Приращения $\Delta\sigma_r$, $\Delta\sigma^\Theta$, $\Delta\sigma_z$ принято называть дополнительными напряжениями. Они являются результатом перераспределения остаточных усилий за счет удаления части детали и воздействия режущего инструмента. В отдельных случаях (например, при электрохимической обработке) дополнительные напряжения связаны только с перераспределением.

Эта причина, судя по результатам усталостных испытаний [1, 2, 3], является решающей и при других способах изготовления надреза, у дна которого наблюдается концентрация напряжений. Можно считать, что остаточные напряжения у основания надреза равны дополнительным напряжениям, вызванным перераспределением. Если исходные напряжения здесь существенны, их следует сложить с дополнительными.

Напряжения у дна надреза необходимо знать для оценки выносливости деталей с концентраторами, изготовленными после упрочняющей обработки. Другой практический выход задачи о дополнительных напряжениях связан с изучением раздельного влияния остаточных напряжений и наклепа. Если глубина надреза, изготовленного безнаклепным способом, больше толщины наклепанного слоя, то у основания концентратора возникает остаточное напряженное состояние в ненаклепанном материале. Зная эти напряжения, можно на основании усталостных испытаний установить влияние на выносливость только остаточных напряжений.

Дополнительные напряжения, связанные с перераспределением, можно рассматривать как результат нагружения, эквивалентного удалению части детали, приходящейся на надрез (рис. 1). На освободившейся поверхности действуют распределенные силы $-\sigma$, $-\tau$. Они равны остаточным усилиям гладкой детали, но имеют противоположное направление. Выразим их через исходные напряжения

При этом учтем, что $\sigma_r(r)$ в поверхностных слоях мало и им можно пренебречь. Учтем также, что σ и τ не связаны с $\sigma_\theta(r)$. Тогда

$$\sigma = \sigma_z(r)\cos^2\alpha(r),$$

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma_z(r)\sin 2\alpha(r). \qquad (1)$$

Полное напряжение на поверхности надреза равно

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} = \sigma_z(r)\cos\alpha(r) \qquad (2)$$

и направлено к детали параллельно ее оси Z.

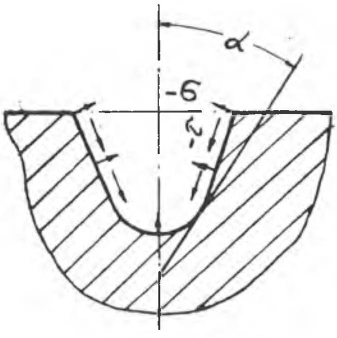

Рис. 1.

При определении дополнительных напряжений необходимо решить осесимметричную задачу теории упругости для цилиндра с мелким надрезом, нагруженного на поверхности кольцевой выточки (рис. 1). Сначала рассмотрим случай, когда в пределах глубины надреза исходное напряжение постоянно, т. е. $\sigma_z(r) = \sigma_z = \text{const}$. Такая задача сводится к известному решению Г. Нейбера [4]. На рис. 2 изображены три нагружения цилиндра с надрезом при $p(r) = \sigma_z \cos\alpha(r)$. Случай «*а*» является нашей задачей о дополнительных напряжениях. Нагружение «*б*» рассматривалось Г. Нейбером. Задача «*в*» имеет элементарное решение, по существу, это случай центрального растяжения призматического бруса. Напряженное состояние при этом является однородным и линейным, отличная от нуля компонента равна σ_z.

Взяв разность между нагружениями «*б*» и «*в*», получим нашу задачу «а». Следовательно, дополнительные напряжения при $\sigma_z(r) = \text{const}$ равны разности между напряжениями в цилиндре с

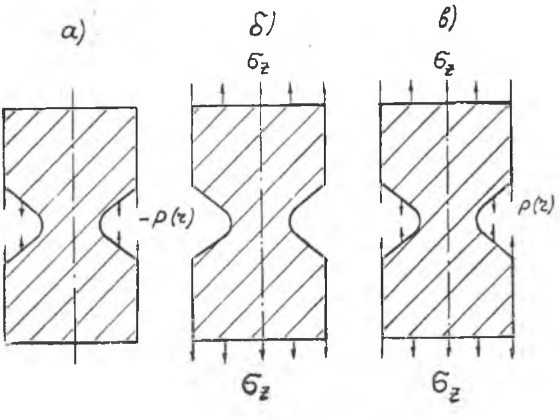

Рис. 2.

надрезом и напряжениями в гладком цилиндре при растяжени
одинаковыми силами.

Получим формулы для дополнительных напряжений у дна на-
реза

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{z\partial} &= \sigma_{z б} - \sigma_{z в} = \sigma_z\left(1 + 2\sqrt{\frac{t}{\rho}}\right) - \sigma_z = 2\sqrt{\frac{t}{\rho}}\cdot\sigma_z,\\ \sigma_{\theta\partial} &= \mu\sigma_{z\partial} = 2\mu\sqrt{\frac{t}{\rho}}\,\sigma_z.\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Здесь t — глубина мелкого надреза; ρ — радиус кривизны на-
реза у основания.

В работе [2] применялись надрезы, имеющие $\frac{t}{\rho}$ =5—50. При $\frac{t}{\rho}$ = 5 глубина надреза составляла 25% от толщины наклепан-
ного обкаткой слоя. Принимая исходные остаточные напряжени
на этой глубине постоянными и $\mu = 0{,}3$, получим $\sigma_{z\partial} = 4{,}5\,\sigma_z$, $\sigma_{\Theta\partial} = 1{,}35\,\sigma_z$.

Отсюда становится понятным значительный эффект рассматри-
ваемого способа упрочнения, заключающийся в том, что предел вы-
носливости повысился по сравнению с неупрочненным образцом н
214% [2].

Следует заметить, что формулы (3) получены на основании ре-
шения линейной задачи и поэтому действительны лишь до напря-
жений, равных пределу текучести соответствующего слоя.

Указанный прием определения дополнительных напряжени
можно применить к любой точке в области надреза. Необходимо
для этого решение задачи «б» имеется в работе [4].

Значительно больший практический интерес представляет зада-
ча с переменными по глубине слоя исходными остаточными напря-
жениями $\sigma_z(r)$. Рассмотрим ее для полукруглого надреза.

В случае мелкого надреза осесимметричная задача сводится к
исследованию плоской деформации полосы с аналогичными выточ-
ками [4]. В силу самоуравновешенности эквивалентных нагрузок в
пределах каждой выточки полосу можно заменить полуплоскостью,
нагруженной по круговому контуру (рис. 3). Контурные силы вы-
числяются через остаточные напряжения гладкой детали по фор-
мулам (1), (2), которые в нашем случае принимают вид

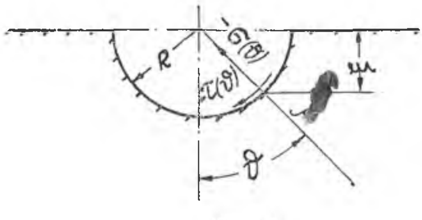

Рис. 3.

$$\sigma(\vartheta) = \sigma_z(\xi)\sin^2\vartheta,\quad \tau(\vartheta) = \frac{\sigma_z(\xi)}{2}\sin 2\vartheta,$$

$$p(\vartheta) = \sigma(\vartheta)\sin\vartheta + \tau(\vartheta)\cos\vartheta = \sigma_z(\xi)\sin\vartheta, \quad (4)$$

где $\xi = R\cos\vartheta$ — расстояние от поверхности детали до текущего слоя.

Для определения дополнительных напряжений воспользуемся следующими выражениями:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{\rho\partial} &= -\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\left[a_n\left(\frac{\rho}{R}\right)^{-n-2}+(n+2)\,b_n\cdot\left(\frac{\rho}{R}\right)^{-n}\right]\cos n\vartheta-\\ &-\sum_{k=0,2,4,\ldots}^{2m}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{-k-2}a_k\left[k\cos k\vartheta+(k+4)\cos(k+2)\vartheta\right],\\ \sigma_{\vartheta\partial} &= \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\left[a_n\left(\frac{\rho}{R}\right)^{-n-2}+(n-2)\,b_n\left(\frac{\rho}{R}\right)^{-n}\right]\cos n\vartheta+\\ &+\sum_{k=0,2,4,\ldots}^{2m}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{-k-2}a_k\left[k\cos k\vartheta+k\cos(k+2)\vartheta\right],\\ \tau_{\rho\vartheta\partial} &= -\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\left[a_n\left(\frac{\rho}{R}\right)^{-n-2}+nb_n\left(\frac{\rho}{R}\right)^{-n}\right]\sin n\vartheta-\\ &-\sum_{k=0,2,4,\ldots}^{2m}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{-k-2}a_k\left[k\sin k\vartheta+(k+2)\sin(k+2)\vartheta\right]\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Эти напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия и неразрывности деформаций, а также условию затухания на бесконечности. Постоянные a_n, b_n, $a_к$ определим в соответствии с нагрузками на контуре.

Из условий

$$\sigma_{\rho\partial}(R,\vartheta)=-\sigma(\vartheta),\quad \tau_{\rho\vartheta\partial}(R,\vartheta)=-\tau(\vartheta)\qquad(6)$$

получим

$$-\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\left[a_n+(n+2)\,b_n\right]\cos n\vartheta=g(\vartheta);$$

$$-\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\left[a_n+nb_n\right]\sin n\vartheta=f(\vartheta),\qquad(7)$$

где

$$\left.\begin{aligned}g(\vartheta) &= -\sigma(\vartheta)+\sum_{k=0,2,4,\ldots}^{2m}a_k\left[k\cos k\vartheta+(k+4)\cos(k+2)\vartheta\right],\\ f(\vartheta) &= -\tau(\vartheta)+\sum_{k=0,2,4,\ldots}^{2m}a_k\left[k\sin k\vartheta+(k+2)\sin(k+2)\vartheta\right].\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

Разложим функции $g(\vartheta)$, $f(\vartheta)$ в ряды Фурье

$$g(\vartheta)=\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}g_n\cos n\vartheta,\quad f(\vartheta)=\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}f_n\sin n\vartheta.\qquad(9)$$

Для этого необходимо продолжить их в область $\frac{\pi}{2} \leqslant \vartheta \leqslant \pi$ по закону $g(\vartheta) = -g(\pi - \vartheta)$, $f(\vartheta) = f(\pi - \vartheta)$. В таком случае

$$\left.\begin{aligned} g_n &= \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} g(\vartheta)\cos n\vartheta\, d\vartheta = -\sigma_n + \sum_{k=0,2,4,\ldots}^{2m} g_n^k a_k, \\ f_n &= \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\vartheta)\sin n\vartheta\, d\vartheta = -\tau_n + \sum_{k=0,2,4,\ldots}^{2m} f_n^k a_k . \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Здесь обозначено:

$$\sigma_n = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma(\vartheta)\cos n\vartheta\, d\vartheta, \quad \tau_n = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \tau(\vartheta)\sin n\vartheta\, d\vartheta; \tag{11}$$

$$g_n^k = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [k\cos k\vartheta + (k+4)\cos(k+2)\vartheta]\cos n\vartheta d\vartheta = \frac{16n(n^2+k)(-1)^{\frac{n+k+1}{2}}}{\pi(n^2-k^2)[n^2-(k+2)^2]}$$

$$f_n^k = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [k\sin k\vartheta + (k+2)\sin(k+2)\vartheta]\sin n\vartheta\, d\vartheta = \frac{16n^2(k+1)(-1)^{\frac{n+k+1}{2}}}{\pi(n^2-k^2)[n^2-(k+2)^2]} \tag{12}$$

$$(k = 0,\ 2,\ 4\ \ldots; \quad n = 1,\ 3,\ 5, \ldots)$$

Подставим полученные результаты в (7) и приравняем коэффициенты Фурье левой и правой части:

$$a_n + (n+2)b_n = -g_n, \quad a_n + nb_n = -f_n \tag{13}$$

Решив эту систему и используя (10), получим

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}[ng_n - (n+2)f_n] = -\frac{1}{2}[n\sigma_n - (n+2)\tau_n] + \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{k=0,2,4,\ldots}^{2m} [ng_n^k - (n+2)f_n^k]\, a_k, \\ b_n &= \frac{1}{2}(f_n - g_n) = -\frac{1}{2}(\tau_n - \sigma_n) + \frac{1}{2}\sum_{k=0,2,4,\ldots}^{2m} (f_n^k - g_n^k)\, a_k. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Запишем формулы (5) с учетом (14):

$$\sigma_{\rho\partial} = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \left[g_n + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\rho^{-2}}{R^{-2}}\right)(ng_n - (n+2)f_n)\right]\left(\frac{\rho}{R}\right)^{-n}\cos n\vartheta -$$

$$- \sum_{k=0,2,4,\ldots}^{2m} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{-k-2} a_k\, [k\cos k\vartheta + (k+4)\cos(k+2)\vartheta],$$

$$\sigma_{\theta\partial} = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \left[g_n - 2f_n - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\rho^{-2}}{R^{-2}}\right)(ng_n - (n+2)f_n)\right]\left(\frac{\rho}{R}\right)^{-n} \times$$

$$\times \cos n\vartheta + \sum_{k=0,2,4,\dots}^{2m} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{-k-2} a_k \left[k\cos k\vartheta + k\cos(k+2)\vartheta\right],$$

$$\left.\begin{aligned}\tau_{\rho\vartheta} = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[f_n + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\rho^{-2}}{R^{-2}}\right)(n g_n - (n+2) f_n)\right]\left(\frac{\rho}{R}\right)^{-n} \sin n\vartheta - \\ - \sum_{k=0,2,4,\dots}^{2m} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{-k-2} a_k \left[k \sin k\vartheta + (k+2)\sin(k+2)\vartheta\right].\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Далее необходимо удовлетворить граничным условиям

$$\sigma_{\vartheta}\left(\rho, \pm \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \tau_{\rho\vartheta}\left(\rho, \pm\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad (16)$$

которые нужно рассматривать при $\rho \geqslant R$. Первое условие выполняется тождественно, второму следует удовлетворить надлежащим выбором коэффициентов $a_к$. Располагая ограниченным числом коэффициентов, удовлетворим указанному условию приближенно. Сначала приравняем нулю равнодействующую касательных нагрузок на прямой $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, $R \leqslant \rho \leqslant \infty$

$$\int_R^{\infty} \tau_{\rho\vartheta}\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) d\rho = 0 \quad (17)$$

или, используя (15) и (10):

$$\frac{1}{R}\int_R^{\infty} \tau_{\rho\vartheta}\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) d\rho = \frac{1}{4}(f_1 + g_1) + \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} \frac{n g_n - f_n}{n^2-1} \sin\frac{n\pi}{2} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\vartheta)\left[\frac{1}{4}\sin n\vartheta - \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin n\vartheta}{n^2-1}\sin\frac{n\pi}{2}\right] d\vartheta +$$

$$+ \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\vartheta)\left[\frac{1}{4}\cos\vartheta + \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} \frac{n\cos n\vartheta}{n^2-1}\sin\frac{n\pi}{2}\right] d\vartheta =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(\vartheta)\cos\vartheta + g(\vartheta)\sin\vartheta\right]\vartheta\, d\vartheta =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \vartheta p(\vartheta)\, d\vartheta - \sum_{k=0,2,4,\dots}^{2m} (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{4a_k}{(k+1)^2(k+3)}\right]. \quad (18)$$

Здесь учтено равенство $f_1 = g_1$, которое следует из (4) и выражает тот факт, что полное напряжение на круговом контуре параллельно прямой $\vartheta=\frac{\pi}{2}$. Суммирование рядов произведено с помощью равенств

$$\frac{1}{4}\sin\vartheta-\sum_{n=3,5,\ldots}^{\infty}\frac{\sin n\vartheta}{n^2-1}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{1}{2}\vartheta\cos\vartheta,$$

$$\frac{1}{4}\cos\vartheta+\sum_{n=3,5,\ldots}^{\infty}\frac{n\cos n\vartheta}{n^2-1}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{1}{2}\vartheta\sin\vartheta,$$

справедливых при $-\frac{\pi}{2}\leqslant\vartheta\leqslant\frac{\pi}{2}$.

Подставив (18) в (17), получим первое уравнение для определения a_k

$$\sum_{k=0,2,4,\ldots}^{2m}(-1)^{\frac{k}{2}}\frac{4}{(k+1)^2\,(k+3)}a_k=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\vartheta p(\vartheta)\,d\vartheta. \tag{19}$$

Для обеспечения хорошей сходимости рядов (15) вблизи границы, необходимо, чтобы продолженные функции $f(\vartheta)$, $g(\vartheta)$ были непрерывны на отрезке $(-\pi\leqslant\vartheta\leqslant\pi)$. Отсюда вытекает условие $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, которое дает второе уравнение

$$\sum_{k=0,2,4,\ldots}^{2m}(-1)^{\frac{k}{2}}4a_k=-p\left(\frac{\pi}{2}\right). \tag{20}$$

Далее рассмотрим касательные напряжения на прямолинейной границе $\left(\vartheta=\frac{\pi}{2},\ \rho\leqslant R\right)$.

$$\tau_{\rho\vartheta}\left(\rho,\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}(-1)^{\frac{n+1}{2}}\left[a_n\left(\frac{\rho}{R}\right)^{-n-2}+nb_n\left(\frac{\rho}{R}\right)^{-n}\right]=$$

$$=\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}(-1)^{\frac{n+1}{2}}\left[a_n-(n+2)\,b_{n+2}\right]\left(\frac{\rho}{R}\right)^{-n-2}. \tag{21}$$

В этой записи учтено $b_1=0$, что следует из (13) и равенства $f_1=g_1$.

Приравняем нулю коэффициенты в первых $m-1$ слагаемых:

$$a_n-(n+2)\,b_{n+2}=0,\quad(n=1,3,5,\ldots,2m-3). \tag{22}$$

Используя (14), (12), получим

$$\sum_{k=0,2,4,\ldots}^{2m}(-1)^{\frac{k}{2}}\frac{n\,(n^2-1)\,[(n+1)\,(k+1)-1]}{(k^2-n^2)\,(k+n+2)\,(k+n+4)}a_k=$$

$$=(-1)^{\frac{n+1}{2}}\frac{\pi}{64}n(n-1)\left[n\sigma_n\ \text{[illegible]}\ (n+2)\,\tau_n+(n+2)(\sigma_{n+2}-\tau_{n+2})\right], \tag{23}$$

$(n=1,\,3,\,5,\,\ldots,\,2m-3)$.

Уравнения (19), (20), (23) служат для определения коэффициентов a_k. Они представляют собой систему $m+1$ уравнений с таким же числом неизвестных $a_0, a_2, \ldots, a_{2m}$. Определив эти коэффициенты и подставив их в (15), получим выражения для дополнительных напряжений.

Строго говоря, построенное выше решение является точным, когда, кроме заданных нагрузок на круговом контуре, на прямолинейной границе действуют касательные напряжения

$$\tau_{\rho\vartheta\partial}\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=2m-1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \left[a_n - (n+2)\, b_{n+2}\right] \left(\frac{\rho}{R}\right)^{-n-2} \tag{24}$$

Их равнодействующая по каждую сторону от выточки равна нулю, а при $\rho = R$ $\tau_{\rho\vartheta\partial}\left(R, \frac{\pi}{2}\right) = 0$. Далее при $\rho > R$ напряжение несколько отличается от нуля и тем меньше, чем больше число m; при дальнейшем возрастании ρ рассматриваемое напряжение быстро убывает. Перечисленные обстоятельства обеспечивают высокую точность приближенного решения даже при небольших m.

Вычислим дополнительные напряжения у дна надреза при $\rho = R$, $\vartheta = 0$. Из выражений (15) следует

$$\sigma_{\vartheta\partial}(R, 0) = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} g_n - 2 \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} f_n + 2 \sum_{k=0,2,4,\ldots}^{2m} k a_k \tag{25}$$

Выразим слагаемые правой части через известные величины, воспользовавшись формулами (9), (10).

$$\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} g_n = g(0) = \sum_{k=0,2,4,\ldots}^{2m} (2k+4)\, a_k. \tag{26}$$

Найдем выражение для второго слагаемого.

$$\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} f_n = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\vartheta) \sin n\vartheta\, d\vartheta = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(\vartheta) \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n}\, d\vartheta.$$

Заменив ряд его суммой по формуле $\sum\limits_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n} = \frac{1}{2}\, ln ctg\, \frac{\vartheta}{2}$ и выполнив интегрирование по частям, приходим к следующему результату:

$$\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\vartheta) \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} = \frac{2}{\pi} \left\{ -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau(\vartheta) \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} + \sum_{k=0,2,4,\ldots}^{2m} \left[k S_k + (k+2) S_{k+2}\right] a_k \right\}, \tag{27}$$

где $S_k = 2 \sum\limits_{q=1}^{q=\frac{k}{2}} \frac{(-1)^{q+1}}{2q-1}$, $(k = 2, 4, 6, \ldots)$.

Подстановка (26), (27) в (25) дает

$$\sigma_{\vartheta\partial}(R, 0) =$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau(\vartheta) \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} + 4 \sum_{k=0,2,4,\ldots}^{2m} \left\{ k + 1 - \frac{1}{\pi} \left[k S_k + (k+2) S_{k+2} \right] \right\} a_k \quad (28)$$

Используя (4), (19), (20), (23), получим

$$\sigma_{\vartheta\partial}(R, 0) = \sum_{i=0}^{m+1} c_i A_i, \quad (29)$$

где $A_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_z(\vartheta) \cos\vartheta \, d\vartheta$, $A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vartheta \sigma_z(\vartheta) \sin\vartheta \, d\vartheta$, $A_2 = p\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sigma_z\left(\frac{\pi}{2}\right)$,

$$A_i = \frac{(2i-3)(2i-4)}{16(-1)^i} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(2i-2)\sin(2i-4)\vartheta +$$

$$+ (2i-4)\sin(2i-6)\vartheta] \, \sigma_z(\vartheta) \sin\vartheta \, d\vartheta, \quad (i = 3, 4, \ldots) \quad (30)$$

Таблица 1

i	c_i			
	$m=1$	$m=2$	$m=6$	$m=9$
0	1,27324	1,27324	1,27324	1,27324
1	0,78472	0,85194	0,86888	0,86791
2	0,01167	0,00146	−0,00004	0,00000
3		0,06100	0,07958	0,07839
4			0,00205	0,00189
5			0,00016	0,00021
6			0,00002	0,00000
7			0,00000	0,00000
8				0,00000
9				0,00000
10				0,00000

Коэффициенты c_i при различных m, вычисленные на ЭЦВМ, приведены в таблице 1.

В формулах (30) остаточное напряжение гладкой детали σ_z рассматривается как функция от угловой координаты ϑ. Для получения $\sigma_z(\vartheta)$ следует воспользоваться $\sigma_z(\xi)$ и учесть, что $\xi = R\cos\vartheta$ (рис. 3).

Можно показать, что коэффициенты A_i ограничены, если $p(\vartheta)$ имеет производную. Согласно таблице 1, множители c_i убывают с ростом i. Эти закономерности позволяют предполагать, что при $i\to\infty$ $(m\to\infty)$ формула (29) приведет к точному решению.

В соответствии со значениями c_i в сумме (29) существенны лишь слагаемые при $i=0, 1, 3$.

Следовательно,

$$\sigma_{\vartheta\partial}(R, 0) = 1{,}273 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_z(\vartheta)\cos\vartheta\, d\vartheta + 0{,}868 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \vartheta\sigma_z(\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta -$$

$$- 0{,}118 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_z(\vartheta)\sin\vartheta\sin 2\vartheta\, d\vartheta. \tag{31}$$

Вторая компонента дополнительного напряженного состояния в рассматриваемой точке определяется из условия плоской деформации

$$\sigma_{\theta\partial}(R, 0) = \mu\sigma_{\vartheta\partial}(R, 0). \tag{32}$$

Применим полученные формулы для надреза, в пределах которого исходные остаточные напряжения постоянны. Подстановка $\sigma_z(\vartheta)=\sigma_z=\text{const}$ в (31), (32) при $\mu=0{,}3$ дает $\sigma_{\vartheta\partial}(R, 0)=2{,}063\ \sigma_z$, $\sigma_{\theta\partial}(R, 0)=0{,}618\sigma_z$. На основании (3) $\sigma_{\upsilon\partial}(R, 0)=\sigma_{z\partial}=2\sigma_z$, $\sigma_{\Theta\partial}(R, 0)=0{,}6\ \sigma_z$.

Если воспользоваться более точным значением $\sigma_{z\delta}$ [6], то получим $\sigma_{\vartheta\partial}(R, 0)=2{,}07\sigma_z$, $\sigma_{\theta\partial}(R, 0)=0{,}621\ \sigma_z$.

Результаты данного примера еще раз свидетельствуют о высокой точности формул (31), (32).

Определение дополнительных напряжений в любой точке производится с помощью выражений (15). При этом сначала по формулам (11) вычисляются коэффициенты Фурье σ_n, τ_n. Далее из уравнений (19), (20), (23) определяются коэффициенты a_k. Они используются в (10) для вычисления f_n, g_n и в формулах (15) при расчете напряжений.

Практическое значение имеют напряжения лишь в небольшой области, примыкающей к дну надреза. В связи с этим в расчетах можно, по-видимому, ограничиться небольшим значением m (например, $m=2$). Есть также основания предполагать, что ряды по n сходятся достаточно быстро и поэтому хорошо представимы суммами с малым n. Для точек на прямой $\vartheta=0$ можно воспользоваться формулой (в общем случае приближенной):

$$\sigma_{\vartheta\partial}(\rho, 0) = \sigma_{\vartheta\partial}(R, 0)\frac{R^2}{4\rho^2}\left(1 + 3\frac{R^2}{\rho^2}\right), \tag{33}$$

которая является решением для случая $\sigma_z(\xi)=\text{const}$ [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудрявцев И. В. Внутренние напряжения как резерв прочности в машиностроении. Машгиз, 1951.

2. Куликов О. О., Пинчук Г. А., Неманов М. С. О влиянии обра ботки роликами на выносливость валов с надрезами. «Повышение долговеч ности деталей машин методом поверхностного наклепа», ЦНИИТМАШ, кн. 108, 1966.

3. Кобрин М. М., Миндлина И. М. Повышение выносливости рез бовых деталей мачтовых сооружений поверхностным пластическим деформи рованием. «Повышение эксплуатационных свойств деталей поверхностным пла стическим деформированием», МДНТП им. Ф. Э. Дзержинского, сб. 1, 1971.

4. Нейбер Г. Концентрация напряжений. ОГИЗ, 1947.

5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, ря дов и произведений. Ф. М., 1963.

6. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. ГИТТЛ, 1950.