

А. С. МОСТОВОЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ОБРАЗЦА НА ОСНОВЕ НЕКОТОРЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ О МЕХАНИЗМЕ УСТАЛОСТНОГО РАЗРУШЕНИЯ

В настоящее время существует множество теорий усталостного разрушения. «Для утверждения или отрицания какой-либо предложенной теории в качестве основного критерия должна быть принята физическая возможность определяющего ее механизма усталости. В свете последних экспериментальных исследований возникновения усталостных повреждений ни одна из предложенных к настоящему времени количественных теорий не представляется приемлемой на этой основе», утверждают А. Фрейденталь и Э. Гумбель [3].

В расчетах усталостной долговечности широкое распространение имеет теория линейного суммирования повреждений — теория Палмгрена-Майнера. Суммарное повреждение D в соответствии с этой теорией определяется выражением:

$$D = \sum \frac{n_i}{N_i},$$

где n_i — число циклов i -го уровня напряжения, N_i — разрушающее число циклов того же уровня.

В момент разрушения $D=1$. Как известно, эта теория во многих случаях не дает удовлетворительного совпадения с результатами эксперимента. Не является ли это результатом стремления применить теорию Палмгрена-Майнера в равной мере к образцам, частям конструкции и целым конструкциям без учета особенностей их формы, размеров, характера нагружения и т. п.?

С целью определения долговечности образца в настоящей работе рассматривается дискретная модель твердого тела, представляющая собой совокупность дискретных элементов-волокон, несвязанных между собой и не оказывающих давления друг на друга.

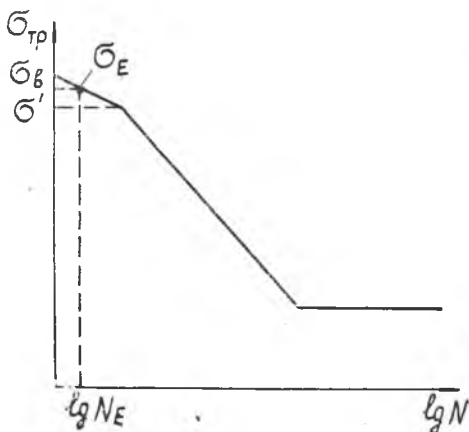
В основу исследования положена видоизмененная теория Палмгрена-Майнера — принцип линейного суммирования повреждений применяется к отдельным волокнам. В этом случае представляется возможным учесть влияние формы сечения образца, его размеров, характера нагружения на накопление повреждений в волокне, так как последнее определяется лишь напряженным состоянием волокна, рассмотренным с учетом истории его нагружения.

С помощью такого подхода, исходя из традиционного рассмотрения двух фаз усталостного разрушения (до появления макротрещины и распространения ее) описывается механизм усталостного разрушения для второй стадии усталостного разрушения — для стадии распространения трещины.

В качестве первой задачи рассматривается нагружение призматического образца гармонической нагрузкой при одноосном напряженном состоянии.

Таким образом, если известно время, соответствующее началу распространения трещины и описан процесс распространения трещины, то может быть рассчитана долговечность образца.

Время, соответствующее началу распространения трещины может быть определено из так называемой кривой усталости по трещине*, которая представляет собой зависимость напряжения $\sigma_{тр}$ от числа циклов, соответствующих появлению первой макротрещины. В полулогарифмических координатах эта кривая может быть аппроксимирована прямыми (фиг. 1), так как это делается для кривой Вёлера. Кривая усталости по трещине является по существу кривой Вёлера для волокна и, следовательно, не зависит от формы образца, нагрузки, наличия и типа концентратора напряжений. Она должна быть получена экспериментально для данного материала и данной обработки поверхности и должна быть задана статистически, т. е. для опреде-

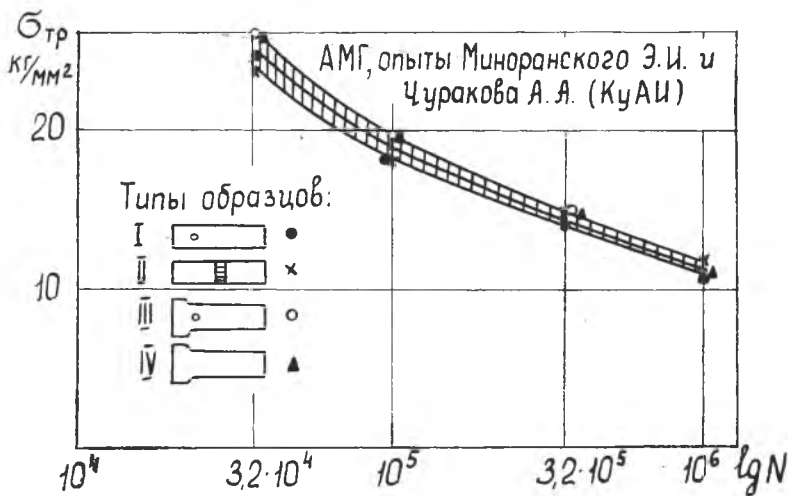
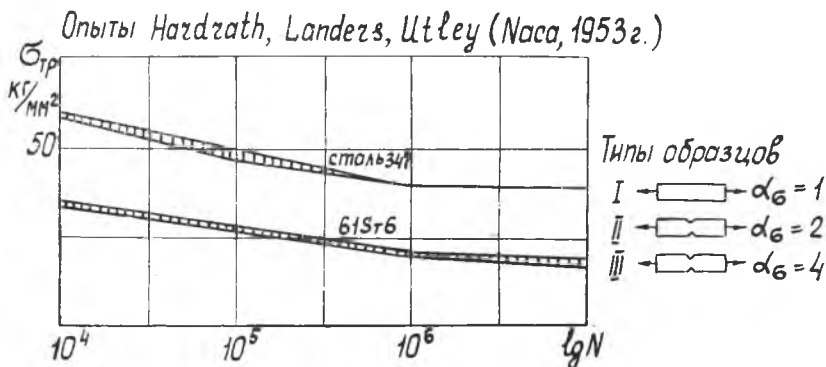


Фиг. 1.

* Р. Д. Вагапов называет ее кривой усталости по повреждению первой макротрещиной.

ленной вероятности появления трещины (разрушения первого волокна). Естественно, что она служит исходной для определения долговечности не только образцов, но и различных элементов конструкций, выполненных из данного материала при данной обработке поверхности.

Высказанные положения подтверждаются приведенными на фиг. 2 и 3 кривыми усталости по трещине, полученными обработкой экспериментальных результатов Hardrath'a, Landers'a, Utley (Nasa, 1953 г.) для двух материалов и опытов, проведенных Э. И. Миноранским и А. А. Чураковым для материала АМГ (Куйбышевский авиационный институт, 1966 г.), а также данными, приведенными Р. Д. Вагаповым [2].



Фиг. 3.

Таким образом, роль кривой усталости по трещине для расчета долговечности подобна роли диаграммы напряжение-деформация для статических расчетов.

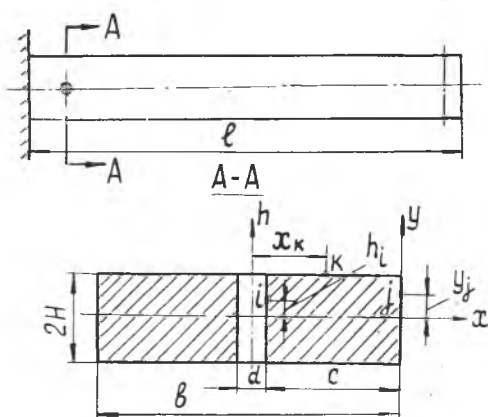
Так как знание уровней напряжений в «опасном» волокне является необходимым для определения его повреждения, то точность статического расчета и достоверность эффективных коэффициентов концентрации напряжений оказывает влияние на определяемую долговечность. Этим вопросам должно быть уделено особое внимание.

СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИНЫ

Приведенные ниже положения являются общими и могут быть применены к образцу (элементу конструкции) с поперечным сечением любого вида. Однако в целях удобства изложения рассматриваем конкретный тип

образца — консольный изгибаемый образец с концентратором в виде отверстия, изображенный на фиг. 4.

Схема распределения напряжений в сечении в разные моменты времени изображена на фиг. 5. Обозначим через σ_i^n (σ_k^n) напряжение в i -м (k -м) волокне в момент разрушения n -го волокна. Пусть волокно i с координатой h_i имеет напряжение σ_i^i в момент времени τ_i его разрушения. Соответствующее разрушающее



Фиг. 4.

число циклов по кривой усталости равно N_i^i . При этом за начало отсчета времени τ_i принимаем время появления трещины, т. е. время разрушения первого волокна.

В тот же момент времени $\tau_k = \tau_i$ разрушилось волокно k с координатой x_k и напряжением σ_k^k , которому соответствует разрушающее число циклов N_k^k .

В начале появления трещины — в момент времени τ_0 , отсчитанный от начала нагружения образца, при напряжениях σ_i^0 , σ_k^0 в волокнах i и k соответственно, повреждения этих волокон были равны

$$D_i^0 = \frac{\tau_0 \omega}{N_i^0}, \quad (1)$$

$$D_k^0 = \frac{\tau_0 \omega}{N_k^0}. \quad (2)$$

Увеличение повреждения волокна $i(\kappa)$ за время от τ_0 до τ_i (τ_k) будет равно:

$$\Delta D_i = \int_{\tau_0}^{\tau_i} \frac{\omega d\tau}{N_i^n} = \int_H^{h_i} \frac{\omega}{N_i^n} \left(\frac{d\tau}{dh} \right)_n dh_n, \quad (3)$$

$$\Delta D_k = \int_{\tau_0}^{\tau_k} \frac{\omega d\tau}{N_k^n} = \int_{x_0}^{x_k} \frac{\omega}{N_k^n} \left(\frac{d\tau}{dx} \right)_n dx_n, \quad (4)$$

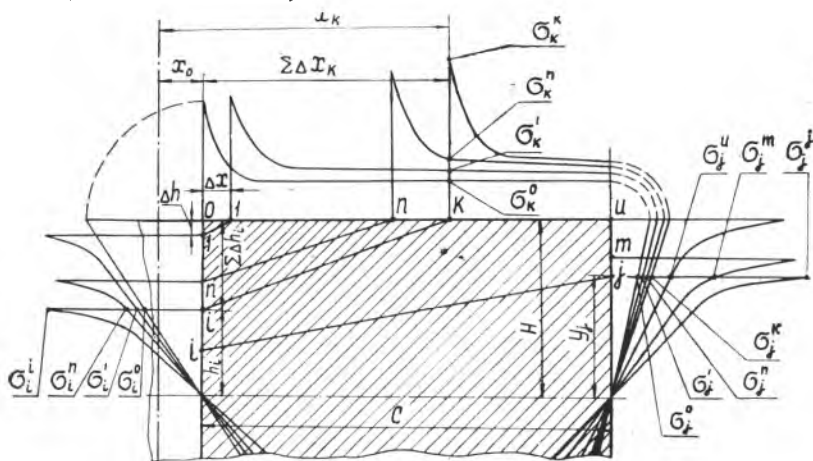
где ω — частота гармонической нагрузки, N_i^n (N_k^n) — разрушающее число циклов, соответствующее напряжению σ_i^n (σ_k^n) в волокне $i(\kappa)$ в момент разрушения волокна n .

Тогда, согласно принятой гипотезе, в момент разрушения волокон i и κ получим:

$$D_i = D_i^0 + \Delta D_i = \frac{\tau_0 \omega}{N_i^0} + \int_H^{h_i} \frac{\omega}{N_i^n} \left(\frac{d\tau}{dh} \right)_n dh_n = 1, \quad (5)$$

$$D_k = D_k^0 + \Delta D_k = \frac{\tau_0 \omega}{N_k^0} + \int_{x_0}^{x_k} \frac{\omega}{N_k^n} \left(\frac{d\tau}{dx} \right)_n dx_n = 1, \quad (6)$$

Волокна равного повреждения (i, κ) являются граничными волокнами линии равного повреждения, имеющей вид, показанный на фиг. 6. С незначительной погрешностью примем, что линии равного повреждения являются прямыми, как это изображено на фиг. 5 (линии $n-n, i-\kappa$).



Фиг. 5.

Воспользуемся линейной аппроксимацией кривой усталости по трещине в полупологарифмических координатах:

$$\ln N = a - b\sigma. \quad (7)$$



Фиг. 6.

Тогда вместо (5) и (6) будем иметь:

$$1 - \frac{\tau_0 \omega}{e^{a-b\sigma_i^0}} = \int_H^{h_i} \frac{\omega}{e^{a-b\sigma_i^n}} \left(\frac{d\tau}{dh} \right)_n dh_n, \quad (8)$$

$$1 - \frac{\tau_0 \omega}{e^{a-b\sigma_k^0}} = \int_{x_0}^{x_k} \frac{\omega}{e^{a-b\sigma_k^n}} \left(\frac{d\tau}{dx} \right)_n dx_n. \quad (9)$$

Выражения (8) и (9) представляют собой интегральные уравнения относительно производных $\left(\frac{d\tau}{dh} \right)_n$ и $\left(\frac{d\tau}{dx} \right)_n$ — величин, обратных скоростям распространения трещин вдоль осей h и x .

Решения уравнений (8) и (9) получим в виде:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\tau}{dh} \right)_i = & - \left[\tau_0 \frac{e^{b\sigma_i^0 - a}}{e^{b\sigma_i^i - a}} b \frac{d\sigma_i^0}{dh_i} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{e^{b\sigma_i^i - a}} \int_H^{h_i} \left(\frac{d\tau}{dh} \right)_n \frac{d}{dh_i} (e^{b\sigma_i^n - a}) dh_n \right], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\tau}{dx} \right)_k = & - \left[\tau_0 \frac{e^{b\sigma_k^0 - a}}{e^{b\sigma_k^k - a}} b \frac{d\sigma_k^0}{dx_k} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{e^{b\sigma_k^k - a}} \int_{x_0}^{x_k} \left(\frac{d\tau}{dx} \right)_n \frac{d}{dx_k} (e^{b\sigma_k^n - a}) dx_n \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Перейдя к конечным приращениям и обозначив

$$b\sigma_i^n - a = \gamma_i^n; \quad b\sigma_k^n - a = \gamma_k^n,$$

окончательно получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\tau}{dh} \right)_i = & - \left[\tau_0 e^{\gamma_i^0 - \gamma_i^i} b \frac{d\sigma_i^0}{dh_i} + \right. \\ & \left. + \sum_{n=0}^{i-1} \left(\frac{d\tau}{dh} \right)_n (e^{\gamma_i^n - \gamma_i^i} - e^{\gamma_{i-1}^n - \gamma_i^i}) \frac{\Delta h_n}{\Delta h_{i-1}} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\tau}{dx} \right)_k = & - \left[\tau_0 e^{\gamma_k^0 - \gamma_k^k} b \frac{d\sigma_k^0}{dx_k} + \right. \\ & \left. + \sum_{n=0}^{k-1} \left(\frac{d\tau}{dx} \right)_n (e^{\gamma_k^n - \gamma_k^k} - e^{\gamma_{k-1}^n - \gamma_k^k}) \frac{\Delta x_n}{\Delta x_{k-1}} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Формулы (12) и (13) являются рекуррентными и искомые производные могут быть получены численными методами.

ДОЛГОВЕЧНОСТЬ ОБРАЗЦА

Из формул (10) и (11) получаем время распространения трещины:

$$\tau_i = - \left\{ \int_H^{h_i} \tau_0 e^{x_i^0 - x_i^i} b \frac{d\sigma_i^0}{dh_i} dh_i + \int_H^{h_i} \frac{dh_i}{e^{x_i^i}} \int_H^{h_i} \left(\frac{d\tau}{dh} \right)_n \frac{dx_i^n}{dh_i} dh_i \right\},$$

$$\tau_k = - \left\{ \int_{x_0}^{x_k} \tau_0 e^{x_k^0 - x_k^k} b \frac{d\sigma_k^0}{dx_k} dx_k + \int_{x_0}^{x_k} \frac{dx_k}{e^{x_k^k}} \int_{x_0}^{x_k} \left(\frac{d\tau}{dx} \right)_n \frac{dx_k^n}{dx_k} dx_k \right\}.$$

Однако, поскольку производные $\left(\frac{d\tau}{dh} \right)_n$ и $\left(\frac{d\tau}{dx} \right)_n$ определяются численными методами, то вычисление τ_i (τ_k) произведем следующим образом:

1) Из формул (12), (13) определяем:

$$\left(\frac{d\tau}{dh} \right)_0 = - \tau_0 b \frac{d\sigma_i^0}{dh_i}, \quad \left(\frac{d\tau}{dx} \right)_0 = - \tau_0 b \frac{d\sigma_k^0}{dx_k}.$$

2) Введем величину:

$$Z_{ik} = \frac{(d\tau/dx)_k}{(d\tau/dh)_i}. \quad (14)$$

Так как рассматриваются «парные» значения $\left(\frac{d\tau}{dh} \right)_i$ и $\left(\frac{d\tau}{dx} \right)_k$ (т. е. величины, снабженные одинаковыми порядковыми номерами рассматриваемых волокон), то $Z_{ik} = \frac{dh_i}{dx_k}$.

Из формулы (14) находим

$$Z_{00} = \frac{\left(\frac{d\tau}{dx} \right)_0}{\left(\frac{d\tau}{dh} \right)_0} = \frac{dh_0}{dx_0}.$$

3) Задаемся значением Δx_0 (оно должно быть достаточно малым для обеспечения точности численного решения уравнений (12), (13), и определяем $\Delta h_0 = Z_{00} \Delta x_0$.

4) Находим геометрические характеристики поврежденного сечения и напряжения $\sigma_0^0, (\sigma_1^0)_i, (\sigma_1^0)_k, (\sigma_1^1)_k$.

5) Определяем из формул (12), (13) значения $\left(\frac{d\tau}{dh} \right)_1, \left(\frac{d\tau}{dx} \right)_1$.

6) Определяем из формулы (14) Z_{11} .

7) Задаемся значением Δx_1 и находим $\Delta h_1 = Z_{11} \Delta x_1$ и т. д. Затем из выражений

$$\tau_i = \int_{H_i}^{h_i} \left(\frac{d\tau}{dh} \right)_i dh_i, \quad (15)$$

$$\tau_k = \int_{x_0}^{x_k} \left(\frac{d\tau}{dx} \right)_k dx_k. \quad (16)$$

получаем время, прошедшее от начала образования трещины до разрушения i -го (k -го) волокна. При этом для «парных» волокон имеет место равенство $\tau_i = \tau_k$.

Значение τ_p , при котором напряжение σ_i^i (σ_k^k) в момент разрушения некоторого волокна i (k) достигает предельной величины (предела прочности), есть время распространения трещины до разрушения образца, т. к. в дальнейшем скорость распространения трещины $\frac{dh}{d\tau} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)$ становится весьма большой.

Тогда долговечность

$$T = \tau_0 + \tau_p. \quad (17)$$

При высоком уровне напряжений площадь усталостного разрушения мала и напряжение $\sigma_k^k > \sigma_i^i$ достигает предела прочности для значений $x_k < (x_0 + c)$ (см. фиг. 5).

В этом случае формулы (12), (13) полностью определяют скорость распространения трещины и, следовательно, долговечность.

Однако при низком уровне напряжений величина σ_k^k в точке $x_k = x_0 + c$ меньше предела прочности и тогда трещина распространяется вдоль оси y . Поврежденная площадь в этом случае ограничивается линией $i-j$ (фиг. 5).

На основании соображений, аналогичных изложенным выше, получим для скорости распространения трещины вдоль оси y выражение:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\tau}{dy} \right)_i = & - \left[\tau_0 e^{x_j^0 - x_j^i} b \frac{d\sigma_j^0}{dy_j} + \sum_{n=0}^u \left(\frac{d\tau}{dx} \right)_n (e^{x_j^n - x_j^i} - e^{x_{j-1}^n - x_j^i}) \frac{\Delta x_n}{\Delta y_{j-1}} + \right. \\ & \left. + \sum_{m=u+1}^{l-1} \left(\frac{d\tau}{dy} \right)_m (e^{x_j^m - x_j^i} - e^{x_{j-1}^m - x_j^i}) \frac{\Delta y_m}{\Delta y_{j-1}} \right]. \quad (18) \end{aligned}$$

Скорость распространения трещины вдоль оси h по-прежнему определяется формулой (12).

Время распространения трещины находится как меньшая из двух величин, полученных из выражений: *

$$\tau_{jp} = \int_{x_0}^{x_k} \left(\frac{d\tau}{dx} \right)_k dx_k + \int_H^{y_{jp}} \left(\frac{d\tau}{dy} \right)_j dy_j. \quad (19)$$

или

$$\tau_{lp} = \int_H^{h_{lp}} \left(\frac{d\tau}{dh} \right)_i dh_i. \quad (20)$$

Скорости изменения относительной поврежденной площади $\overline{F}_n = \frac{F_n}{F_0}$

$$\frac{d\overline{F}_{ik}}{d\tau} = \frac{2}{F_0} \left[\frac{dx_k}{d\tau} (H - h_i) - \frac{dh_i}{d\tau} (x_k - x_0) \right];$$

$$\frac{d\overline{F}_{ij}}{d\tau} = -\frac{1}{2H} \left[\left(\frac{dy}{d\tau} \right)_j + \left(\frac{dh}{d\tau} \right)_i \right].$$

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕНИЙ. ВЫВОДЫ

В целях сопоставления результатов проведенного нами расчета долговечности по излагаемой теории и результатов эксперимента, который проводился в условиях фиксированного прогиба при изгибе, необходимо учесть изменение нагрузки на образец в процессе его повреждения.

Уменьшение нагрузки, действующей на поврежденный образец, определим, пользуясь методикой, изложенной в работах [5], [6]. Сущность ее сводится к замене поврежденного образца с переменной жесткостью образцом такой же формы с постоянной жесткостью EI_{np} , определяемой из условия равенства перемещений обоих образцов в точке приложения нагрузки. Из этого следует, что внешние нагрузки, действующие на образец в разные моменты времени, относятся как соответствующие приведенные жесткости:

$$\frac{P_l}{P_0} = \frac{EI_{np}}{EI_0} = \overline{I}_{np}. \quad (21)$$

Зависимость \overline{I}_{np} от $\overline{I} = \frac{l}{l_0}$ удовлетворительно аппроксимируется уравнением

$$\overline{I}_{np} = a_1 \sqrt[3]{\overline{I}} + b_1 \sqrt[3]{\overline{I}^2}. \quad (22)$$

Принимая диаграмму растяжения с линейным упрочнением, напишем напряжения для волокон, расположенных, например, вдоль оси h .

Для упругого участка диаграммы растяжения

$$\sigma_i^n = \frac{M}{I_{nn}} \overline{I}_{np}^n \beta_i^n h_i; \quad (23)$$

для участка линейного упрочнения

$$\sigma_i^n = \frac{M}{I_{nn}} T_{np}^{nn} \beta_i^n h_i \varphi_i + \sigma_E^0, \quad (24)$$

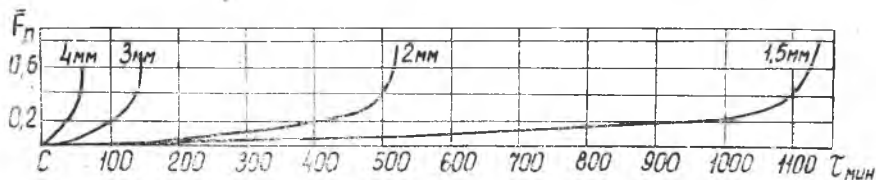
где β_i^n — коэффициент концентрации в i -той точке в момент разрушения волокна n ,

$\varphi_i = \frac{E_i}{E_0}$ — редуцированный коэффициент,

σ_E^0 — условное напряжение, определяемое точкой пересечения участка линейного упрочнения с осью напряжений.

Для плоского образца из стали 30ХГСА с концентратором в виде отверстия $d=3$ мм и размерами $l=135$ мм, $b=14$ мм, $2H=4$ мм (см. фиг. 4) на ЭЦВМ «Урал-2» произведены расчеты долговечности при разных уровнях (амплитудах A мм) гармонической нагрузки.

На фиг. 7 показаны кривые зависимости относительной поврежденной площади \bar{F}_n от времени τ . Для них характерно нелинейное нарастание \bar{F}_n по τ с резким увеличением скорости $\frac{d\bar{F}_n}{d\tau}$ к моменту разрушения. В момент разрушения значения \bar{F}_n для низких уровней нагружения больше, чем для высоких. Это находится в полном соответствии с изложенными представлениями,



Фиг. 7.

τ . к. напряжения, равные пределу прочности имеют место в этом случае при меньшей величине неповрежденной части сечения. В таблице приведены экспериментальные и расчетные данные для времени τ_p распространения трещины и долговечности T .

Таблица 1

$A, \text{мм}$	$\tau_p^{\text{расч}} \text{ мин.}$	$\tau_p^{\text{эксп}} \text{ мин}$	$T^{\text{расч}} \text{ мин}$	$T^{\text{эксп}} \text{ мин}$
1,5	1140	1395	1530	1785
2,0	522	638	718	834
3,0	147	139	195	187
4,0	59,5	62,5	71,5	74,5

Экспериментальные данные приведены для вероятности $P=50\%$, Учитывая это, можно считать их совпадение с расчетом вполне

удовлетворительным. Распространение приведенной методики на определение расчетным путем долговечности образцов и элементов конструкций, работающих при случайных нагрузках может явиться следующим этапом в разработке высказанных положений.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. В. Серенсен, В. П. Когаев, Р. М. Шнейдерович. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. Машгиз, 1963.
2. Р. Д. Вагапов. Статистические и детерминистические закономерности усталости и возможность их моделирования. Сборник «Вопросы механической усталости». Машиностроение, 1964.
3. Э. Фрейденталь, Э. Гумбель. Явление усталости в физическом и статистическом аспектах. Сборник «Проблемы механики», вып. 2, изд-во иностр. литературы, 1959.
4. К. Е. Филлипс. Усталостные трещины как концентраторы напряжений и их поведение под действием циклических нагрузок. Сборник «Усталость самолетных конструкций». Оборонгиз, 1961.
5. А. С. Мостовой, Б. А. Лавров. Об оценке усталостного повреждения образца по изменению его жесткости. Труды Куйбышевского авиационного института, вып. XXIX, 1967 г.
6. А. С. Мостовой, Б. А. Лавров. Влияние усталостной трещины на изгибную жесткость образца. Труды Куйбышевского авиационного института, вып. XXIX, 1967 г.
7. А. С. Мостовой. Определение долговечности образца на основе некоторых представлений о механизме усталостного разрушения. Тезисы доклада на юбилейной научно-технической конференции. Куйбышевский авиационный институт, Куйбышев, 1967 г.