КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА
Труды, выпуск 48, 1971 г.
Вопросы прочности элементов авиационных конструкций

М. П. Шатунов, С. И. Иванов

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТЕОРИИ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Одна из задач об остаточных напряжениях в цилиндре приводит к интегральному уравнению Вольтерра 1-го рода, полученному в работе [1]:

$$\int_0^{h-a}\left[2\frac{\eta}{h-a}-1+\frac{16}{\pi^3}\frac{h-a}{b}\sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{1}{k^3}\,\mathrm{th}\frac{k\pi}{2}\frac{b}{h-a}\cos k\pi\frac{\eta}{h-a}\right]\tau_{\theta z}(\eta)\,d\eta=$$

$$=w(a)\frac{2G}{3\pi D^2}(h-a)^2\left[1-\frac{192}{\pi^5}\frac{h-a}{b}\sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{1}{k^5}\,\mathrm{th}\frac{k\pi}{2}\frac{b}{h-a}\right]. \qquad (1)$$

Решение этого уравнения должно удовлетворять дополнительному условию равновесия:

$$\int_0^h \tau_{\theta z}(\eta)\,d\eta=0. \qquad (2)$$

Классическая теория интегральных уравнений в данном случае неприменима. В связи с этим вопросы существования и единственности решения задачи (1), (2), а также практическое построение этого решения необходимо рассматривать особо.

1. Введем безразмерные величины:

$$x=\frac{h-a}{h},\quad y=\frac{\eta}{h},\quad \beta=\frac{b}{h},\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant x \qquad (3)$$

и сокращенные обозначения:

$$\Gamma(x,y)=2\frac{y}{x}-1+\frac{16}{\pi^3}\frac{x}{\beta}\sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{1}{k^3}\,\mathrm{th}\frac{k\pi}{2}\frac{\beta}{x}\cos k\pi\frac{y}{x}; \qquad (4)$$

$$\Gamma(x, x) = 1 - \frac{16}{\pi^3}\frac{x}{\beta}\sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{k^3}\,\mathrm{th}\,\frac{k\pi}{2}\frac{\beta}{x},\quad \Gamma(0, 0) = 1; \tag{5}$$

$$\Gamma_1(x) = 1 - \frac{192}{\pi^3}\frac{x}{\beta}\sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{k^5}\,\mathrm{th}\,\frac{k\pi}{2}\frac{\beta}{x},\quad \Gamma_1(0)=1; \tag{6}$$

$$f(x) = \frac{2Gh}{3\pi D^2}w\,[h(1-x)]\cdot\Gamma_1(x)\,x^2 \text{ — известная функция;} \tag{7}$$

$$\varphi(y) = \tau_{\theta z}(hy) \text{ — искомая функция.} \tag{8}$$

Тогда уравнения (1), (2) запишутся в таком виде:

$$\int_0^x \Gamma(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x); \tag{9}$$

$$\int_0^1 \varphi(y)\,dy = 0. \tag{10}$$

Для ядра $\Gamma(x, y)$ выполняется тождество:

$$\int_0^x \Gamma(x, y)\,dy = 0. \tag{11}$$

Отсюда следует, что если некоторая функция $\varphi(y)$ удовлетворяет уравнению (9), то $\varphi(y)+C$ также удовлетворяет этому уравнению при любом $C=\mathrm{const}$.

В дальнейшем будем обозначать через $u(y)$ решение уравнения (9), обращающееся в 0 при $y=0$, т. е.

$$\int_0^x \Gamma(x, y)\,u(y)\,dy = f(x),\quad u(0) = 0. \tag{12}$$

Если $u(y)$ известно, то решение уравнений (9) и (10) получим в виде

$$\varphi(y) = u(y) - \int_0^1 u(y)\,dy. \tag{13}$$

Если задача (12) имеет единственное решение в классе непрерывных функций, то таким же свойством обладает и задача (9)—(10). Продифференцировав (12), получим равносильную задачу:

$$\Gamma(x, x)\,u(x) + \int_0^x \Gamma'_x(x, y)\,u(y)\,dy = f'(x),\quad u(0) = 0, \tag{14}$$

$$\Gamma'_x(x, y) = -2\frac{y}{x^2} + \frac{16}{\pi^3\beta}\sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty}\left[\frac{1}{k^3}\,\mathrm{th}\,\frac{k\pi}{2}\frac{\beta}{x}\cos k\pi\frac{y}{x} + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi y}{k^2 x}\,\mathrm{th}\,\frac{k\pi}{2}\frac{\beta}{x}\sin k\pi\frac{y}{x} - \frac{\pi\beta}{2k^2 x}\cdot\frac{\cos k\pi\frac{y}{x}}{\mathrm{ch}^2\frac{k\pi}{2}\frac{\beta}{x}}\right] \tag{15}$$

При $x=0$ функция (15) обращается в ∞, поэтому классическая теория интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода к уравнению (14) неприменима.

2. Установим некоторые вспомогательные результаты.

а) Функции $\Gamma(x, x)$, $\Gamma_1(x)$ положительны при всех $x \geqslant 0$ и монотонно убывают от значения $\Gamma(o, o)=\Gamma_1(o)=1$.

Для доказательства найдем производную

$$\left[\frac{x}{\beta} \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} \frac{\beta}{x}\right]' = \frac{\operatorname{sh} k\pi \frac{\beta}{x} - k\pi \frac{\beta}{x}}{2\beta \operatorname{ch}^2 \frac{k\pi}{2} \frac{\beta}{x}} > 0.$$

Значит, выражение $\frac{x}{\beta} \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} \frac{\beta}{x}$ возрастает при $x \geqslant 0$ и, следовательно, остается меньше своего предела

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\beta} \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} \frac{\beta}{x} = \frac{k\pi}{2},$$

т. е.

$$\frac{x}{\beta} \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} \frac{\beta}{x} < \frac{k\pi}{2}, \quad x \geqslant 0. \tag{16}$$

Применяя известные суммы рядов

$$\sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{96}, \tag{17}$$

оценим

$$\frac{16}{\pi^3} \frac{x}{\beta} \sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{k^3} \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} \frac{\beta}{x} < \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1; \tag{18}$$

$$\frac{192}{\pi^5} \frac{x}{\beta} \sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{k^5} \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} \frac{\beta}{x} < \frac{96}{\pi^4} \sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{k^4} = 1. \tag{19}$$

Отсюда и следует наше утверждение.

б) Для ядер $\Gamma(x, y)$, $\Gamma'_x(x, y)$ справедливы следующие оценки:

$$|\Gamma(x, y)| \leqslant 2; \quad |\Gamma'_x(x, y)| \leqslant \frac{2y}{x^2} + \frac{4}{\beta}; \quad (0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant x). \tag{20}$$

Это немедленно вытекает из (16), (17) и очевидных неравенств:

$$|\sin\alpha| \leqslant 1; \quad |\cos\alpha| \leqslant 1; \quad |\operatorname{th}\alpha| \leqslant 1; \quad \operatorname{ch}^2\alpha \geqslant \alpha;$$

$$|\Gamma'_x(x, y)| \leqslant \frac{2y}{x^2} + \frac{16}{\pi^3\beta} \sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{\pi}{k^2} + \frac{1}{k^2}\right) =$$

$$= \frac{2y}{x^2} + \frac{16}{\pi^3\beta} \cdot \frac{(2+\pi)\pi^2}{8} < \frac{2y}{x^2} + \frac{4}{\beta}.$$

3. Докажем существование и единственность решения задачи (14). Запишем ее в виде

$$u(x) = F(x) - \int_0^x \frac{\Gamma'_x(x, y)}{\Gamma(x, x)} u(y)\,dy, \quad u(0) = 0, \tag{21}$$

где

$$F(x) = \frac{f'(x)}{\Gamma(x, x)}. \tag{22}$$

Будем считать, что данная функция $w(a) = w[h(1-x)]$ имеет непрерывную производную. Тогда, согласно (7), для $F(x)$ выполняется неравенство

$$|F(x)| \leqslant F_0 x, \quad F_0 = \text{const}. \tag{23}$$

Построим решение задачи (21) в виде ряда

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x); \tag{24}$$

$$u_0(x) = F(x); \quad u_n(x) = -\int_0^x \frac{\Gamma'_x(x, y)}{\Gamma(x, x)} u_{n-1}(y)\,dy; \; n = 1, 2, 3, \ldots \tag{25}$$

В случае непрерывного ядра ряд (24) сходится при любых значениях из $(0,1)$. В нашем случае это удается показать лишь для достаточно малого отрезка $(0 \leqslant x \leqslant x_0)$. Рассмотрим функцию

$$q(x) = \frac{1}{\Gamma(x, x)}\left[\frac{2}{3} + \frac{2x}{\beta}\right], \quad (0 \leqslant x \leqslant 1). \tag{26}$$

Она непрерывна и монотонно возрастает от значения $q(0) = \frac{2}{3}$. Фиксируем число q_0 между $\frac{2}{3}$ и 1, например, $q_0 = \frac{3}{4}$.

Существует такое значение $x_0 > 0$, при котором $q(x_0) = q_0$. Для функций (25) на отрезке $(0 \leqslant x \leqslant x_0)$ выполняются неравенства:

$$|u_n(x)| \leqslant F_0 x q_0^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{27}$$

Действительно, при $n = 0$ (27) совпадает с (23). Полагая в (25) $n = 1$ и учитывая оценки (20) и (23), будем иметь:

$$|u_1(x)| \leqslant \frac{1}{\Gamma(x, x)} \int_0^x \left(\frac{2y}{x^2} + \frac{4}{\beta}\right) F_0 y\,dy =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(x, x)}\left(\frac{2}{3} + \frac{2x}{\beta}\right) F_0 x = q(x) F_0 x \leqslant q_0 F_0 x, \quad (0 \leqslant x \leqslant x_0). \tag{28}$$

Полагая в (25) $n = 2$ и учитывая полученную оценку (28), таким же образом оценим $|u_2(x)| \leqslant q_0^2 F_0(x)$ и т. п. Таким образом, на отрезке $(0 \leqslant x \leqslant x_0)$ ряд (24) мажорируется сходящейся геометрической прогрессией

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_0 x q_0^n = \frac{F_0 x}{1 - q_0} \tag{29}$$

Значит, на этом отрезке ряд (24) сходится абсолютно и равномерно; его сумма $u(x)$ есть непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству

$$|u(x)| \leqslant \frac{1}{1-q_0} F_0 x, \quad (0 \leqslant x \leqslant x_0). \tag{30}$$

Прямой подстановкой в уравнение (21) убеждаемся, что ряд (24) является решением этого уравнения. Покажем, что всякое решение $v(x)$, удовлетворяющее условию

$$|v(x)| \leqslant C_0 F_0 x, \quad (C_0 = \text{const}), \tag{31}$$

совпадает с построенным решением $u(x)$. Разность $z(x) = u(x) - v(x)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$z(x) = -\int_0^x \frac{\Gamma'_x(x, y)}{\Gamma(x, x)} z(y)\, dy \tag{32}$$

дополнительному условию

$$|z(x)| \leqslant C_1 F_0 x, \tag{33}$$

где
$$C_1 = C_0 + \frac{1}{1-q_0}, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0.$$

Отсюда методом, изложенным выше, получим неравенства:

$$|z(x)| \leqslant q_0^n C_1 F_0 x; \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots; \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0 \tag{34}$$

Устремим $n \to \infty$, при этом $q_0^n \to 0$.

В пределе получим $z(x) \equiv 0$, т. е. $v(x) \equiv u(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant x_0$. Это означает единственность решения на отрезке $(0 \leqslant x \leqslant x_0)$. Остается продолжить его на отрезок $(x_0 \leqslant x \leqslant 1)$. Для этого разобьем интеграл в уравнении (21) на сумму двух интегралов по отрезкам $(0, x_0)$ и (x_0, x) и запишем это уравнение в виде

$$u(x) = F_1(x) - \int_{x_0}^x \frac{\Gamma'_x(x, y)}{\Gamma(x, x)} u(y)\, dy, \quad (x_0 \leqslant x \leqslant 1), \tag{35}$$

где $F_1(x) = F(x) - \displaystyle\int_0^{x_0} \frac{\Gamma'_x(x, y)}{\Gamma(x, x)} u(y)\, dy$ — известная функция. (36)

В области $(x_0 \leqslant x \leqslant 1,\ x_0 \leqslant y \leqslant x)$ ядро уравнения (35) непрерывно. Согласно классической теории, уравнение (35) имеет единственное непрерывное решение $u(x)$ на отрезке $(x_0 \leqslant x \leqslant 1)$. В точке стыка $x = x_0$ оно принимает значение

$$u(x_0) = F_1(x_0) = F(x_0) - \int_0^{x_0} \frac{\Gamma'_x(x_0, y)}{\Gamma(x_0, x_0)} u(y)\, dy, \tag{37}$$

совпадающее со значением в этой точке решения уравнения (21). Таким образом, стыкованная функция $u(x)$ определена и непрерывна на всем отрезке $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. Она является единственным решением уравнения (21), удовлетворяющим условию:

$$|u(x)| \leqslant C_2 \max_{y \leqslant x} |F(y)|, \quad (C_2 = \text{const}). \tag{38}$$

Эта функция является также единственным решением уравнений (14) и (12).

4. При построении решения $u(x)$ численными методами расчетная схема значительно упрощается, если применять их не к уравнению (14), а к исходному уравнению (12). Необходимо только предварительно убедиться, что приближенное решение, полученное численным методом, сходится к точному решению. Для уравнений с особенностями, какие имеет уравнение (12), это не вытекает из классической теории.

Приведем доказательство сходимости для случая, когда интеграл (12) вычисляется с помощью простейшей квадратурной формулы прямоугольников:

$$\int_0^{x_i} \Gamma(x_i, y)\, u(y)\, dy \approx \Delta x (\gamma_{i1} u_1 + \gamma_{i2} u_2 + \ldots + \gamma_{ii} u_i). \tag{39}$$

При этом вместо интегрального уравнения (12) получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
&\Delta x \cdot \gamma_{11} u_1 = f_1 \\
&\Delta x \cdot (\gamma_{21} u_1 + \gamma_{22} u_2) = f_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\Delta x \cdot (\gamma_{i1} u_1 + \gamma_{i2} u_2 + \ldots + \gamma_{ii} u_i) = f_i \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\Delta x \cdot (\gamma_{n1} u_1 + \gamma_{n2} u_2 + \ldots + \gamma_{nn} u_n) = f_n.
\end{aligned} \tag{40}$$

Здесь n — число частей, на которые разбит отрезок $[0,1]$,

$$\Delta x = \frac{1}{n}, \quad x_i = \frac{i}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{41}$$

$$\gamma_{ij} = \Gamma(x_i, x_j), \quad u_i = u(x_i), \quad f_i = f(x_i). \tag{42}$$

Так как $\gamma_{ii} = \Gamma(x_i, x_i) \neq 0$ то система (40) имеет единственное решение $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$. Для оценки разностей $v_i = u(x_i) - \bar{u}_i$ преобразуем систему (40) к другому виду путем вычитания:

$$\gamma_{ii} u_i + \Delta x (\gamma'_{i1} u_1 + \gamma'_{i2} u_2 + \cdots + \gamma'_{i\, i-1} u_{i-1}) = f'_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{43}$$

или
$$u_i = F_i - \frac{\Delta x}{\gamma_{ii}} (\gamma'_{i1} u_1 + \gamma'_{i2} u_2 + \cdots + \gamma'_{i\, i-1} u_{i-1}), \tag{44}$$

где
$$\gamma'_{ij} = \frac{\gamma_{ij} - \gamma_{i-1\, j}}{\Delta x}, \quad f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}, \quad F_i = \frac{f'_i}{\gamma_{ii}}. \tag{45}$$

Система (44) является алгебраическим аналогом интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода (21). Применяя к ней метод последовательных приближений в два этапа, как это сделано выше для уравнения (21), получим оценку:

$$|\bar{u}_i| \leqslant C_3 \max |F_j|; \quad (C_3 = \text{const}). \tag{46}$$

Разности $v_i = u(x_i) - \bar{u}_i$ удовлетворяют той же системе (44), только с другими свободными членами:

$$F_i = \frac{\Delta'_i}{\gamma_{ii}}, \quad \Delta'_i = \frac{\Delta_i - \Delta_{i-1}}{\Delta x}, \tag{47}$$

$$\Delta_i = \int_0^{x_i} \Gamma(x_i, y)\, u(y)\, dy - \Delta x\, [\gamma_{i1}u_1 + \gamma_{i2}u_2 + \cdots + \gamma_{ii}u_i] =$$

$$= \sum_{j=1}^{i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \Gamma(x_i, y)\, u(y) - \Gamma(x_i, x_j)\, u(x_j)]\, dy. \tag{48}$$

Δ_i есть абсолютные погрешности при вычислении интеграла по формуле (39). Из (47), (48) найдем:

$$\Delta'_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\Gamma(x_i, y)\, u(y) - \Gamma(x_i, x_i)\, u(x_i)]\, dy +$$

$$+ \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=1}^{i-1} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \{[\Gamma(x_i, y) - \Gamma(x_{i-1}, y)]\, u(y) - [\Gamma(x_i, x_j) -$$

$$- \Gamma(x_{i-1}, x_j)]\, u(x_j)\}\, dy. \tag{49}$$

Для оценки Δ'_i представим

$$\Gamma(x, y) = \frac{2y}{x} + R(x, y), \tag{50}$$

где
$$R(x, y) = -1 + \frac{16}{\pi^3} \frac{x}{\beta} \sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{k^3} \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} \frac{\beta}{x} \cos k\pi \frac{y}{x}. \tag{51}$$

Из неравенства (20) следует, что функции $\Gamma(x, y)$, $R'_x(x, y)$ ограничены в области $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x)$, а при $x > 0$ обе они непрерывны. Так как решение $u(y)$ тоже непрерывно на отрезке $(0 \leqslant y \leqslant 1)$, причем $u(0) = 0$, то произведения $\Gamma(x, y)\, u(y)$; $R'_x(x, y)\, u(y)$ будут непрерывны во всей замкнутой области $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x)$.

Положим

$$\omega_1(\Delta x) = \max |u(y) - u(x_i)|;$$
$$x_{i-1} \leqslant y \leqslant x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_2(\Delta x) &= \max |\Gamma(x_i, y)\, u(y) - \Gamma(x_i, x_i)\, u(x_i)| \\ & x_{i-1} \leqslant y \leqslant x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

$$\omega_3(\Delta x) = \max |R'_x(\xi_i, y)\, u(y) - R'_x(\eta_i, x_j)\, u(x_j)|$$
$$x_{i-1} \leqslant \xi_i,\ \eta_i \leqslant x_i;\ x_{j-1} \leqslant y \leqslant x_j;\ i = 1, 2, \ldots, n,\ j \leqslant i.$$

При $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности соответствующих функций

$$\omega_1(\Delta x), \quad \omega_2(\Delta x), \quad \omega_3(\Delta x) \to 0. \tag{53}$$

Из (49) и (52) легко получается следующая оценка:

$$|\Delta_i'| \leqslant \omega_1(\Delta x) + \omega_2(\Delta x) + \omega_3(\Delta x) + C_2 F_0 \Delta x. \tag{54}$$

Для разностей $v_i = u(x_i) - \overline{u}_i$ имеют место неравенства (46), в которых следует положить $F_j = \dfrac{\Delta_j'}{\gamma_{ii}}$, т. е.

$$|u(x_i) - \overline{u}_i| \leqslant \frac{C_3}{\gamma_{ii}} [\omega_1(\Delta x) + \omega_2(\Delta x) + \omega_3(\Delta x) + C_2 F_0 \Delta x]; \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{55}$$

Правая часть (55) может быть сделана меньше любого наперед заданного числа при достаточно малом шаге $\Delta x = \dfrac{1}{n}$. Это значит, что приближенное решение $\overline{u}_i$ сходится к точному $u(x_i)$ при $n \to \infty$

5. При реализации численного метода имеет смысл записать уравнение (12) в другом виде:

$$\int_0^x K(x, y)\, u(y)\, dy = g(x), \quad u(0) = 0, \tag{56}$$

где

$$K(x, y) = \frac{\Gamma(x, y)}{x^2 \Gamma_1(x)}; \quad g(x) = \frac{2Gh}{3\pi D^2} w[h(1-x)]. \tag{57}$$

Во многих случаях, встречающихся на практике, функция $g(x)$ постоянна на большей части отрезка $[0,1]$.

Пусть

$$g(x) = g_0 = \text{const} \ \text{при} \ 0 \leqslant x \leqslant x_0. \tag{58}$$

Тогда на отрезке $(0 \leqslant x \leqslant x_0)$ решением уравнения (56) будет:

$$u(x) = 6 g_0 x. \tag{59}$$

Это вытекает из легко проверяемого тождества:

$$\int_0^x K(x, y)\, y\, dy \equiv \frac{1}{6}. \tag{60}$$

Введем новую неизвестную функцию:

$$v(x) = u(x) - 6 g_0 x. \tag{61}$$

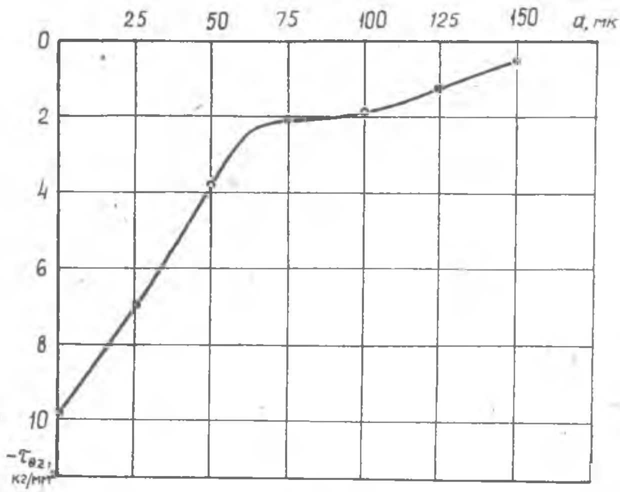
При $0 \leqslant x \leqslant x_0$ она тождественно равна 0, а при $x_0 \leqslant x \leqslant 1$ удовлетворяет уравнению:

$$\int_{x_0}^x K(x, y)\, v(y)\, dy = g(x) - g_0. \tag{62}$$

Вычислив интеграл (62) по формуле трапеций, дающей более высокую точность по сравнению с формулой прямоугольников, получим вместо (62) линейную алгебраическую систему:

$$\begin{aligned}
&\frac{\Delta x}{2} K_1^1 v_1 = g_1 - g_0 \\
&\frac{\Delta x}{2} (2K_2^1 v_1 + K_2^2 v_2) = g_2 - g_0 \\
&\frac{\Delta x}{2} (2K_3^1 v_1 + 2K_3^2 v_2 + K_3^3 v_3) = g_3 - g_0 \qquad (63) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{\Delta x}{2} (2K_n^1 v_1 + 2K_n^2 v_2 + \cdots + 2K_n^{n-1} v_{n-1} + K_n^n v_n) = g_n - g_0,
\end{aligned}$$

где $\quad K_i^j = K(x_i, x_j),\ v_i = v(x_i),\ g_i = g(x_i),\ x_i = x_0 + i\Delta x. \qquad (64)$



Фиг. 1.

Определив из уравнений (63) последовательно $V_1, V_2, \ldots, V_n$, и учитывая (61) и (13), найдем:

$$u(x) = 6g_0 x + v(x) = \begin{cases} 6g_0 x, & 0 \leqslant x \leqslant x_0 \\ u_i = 6g_0 x_i + v_i, & x_0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \qquad (65)$$

$$\varphi(x) = u(x) - 3g_0 x_0^2 - \frac{\Delta x}{2}(u_0 + 2u_1 + \cdots + 2u_{n-1} + u_n). \qquad (66)$$

Это — приближенные решения задач (12) и (9)—(10).

В качестве примера был произведен расчет остаточных напряжений для случая, когда функция $g(x)$ задана следующей таблицей:

x	$0 \leqslant x < x_0 = 0,94$	$x_1 = 0,95$	$x_2 = 0,96$	$x_3 = 0,97$	$x_4 = 0,98$	$x_5 = 0,99$	$x_6 = 1$
$g_0(x)$	$g = w_0 \dfrac{2Gh}{3\pi D^2}$	$1,55\ g_0$	$3,20\ g_0$	$5,50\ g_0$	$8,65\ g_0$	$13,40\ g_0$	20,00

Эта таблица составлена на основе экспериментальной зависимост $w(a)$, приведенной в работе [2], при $h = 2,5$ *мм;* $\beta = 4,8$ $w_0 = -0,008$ *мм.* Для этого случая постоянная $g_0 = -0,0108$ *кг/мм*. Результаты расчетов представлены на фиг. 1. Следует заметить что опытная функция $w(a)$, которой мы воспользовались, имеет не большую неточность, связанную, по-видимому, с возможными ошиб ками эксперимента. На основании физических соображений пр $x \leqslant x_0$ должно быть $g(x) > 0$. Эта неточность практически не сказы вается на результатах.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. И. Иванов. Определение остаточных напряжений в поверхностно слое цилиндра. Помещена в настоящем сборнике.

2. В. Н. Тимофеев. К вопросу о напряженном состоянии поверхностног слоя стали при точении. Журнал технической физики, том XXIV, вып. 7, 195