

Х. С. ХАЗАНОВ

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С КРУГЛЫМ УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ НА БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

R, h — радиус срединной поверхности и толщина оболочки; R_0, h_1 — радиус и толщина включения; ξ, η — декартовы координаты точек срединной поверхности оболочки; $\rho = \frac{r}{R_0}$, Θ — полярные на развертке цилиндра координаты (рис. 1); $\bar{h}_1 = \frac{h_1}{h}$ — относительная толщина включения; $\alpha = \frac{R_0}{R}$, $\lambda = \frac{R}{h}$, $\lambda_1 = \frac{R}{h_1}$ — без-

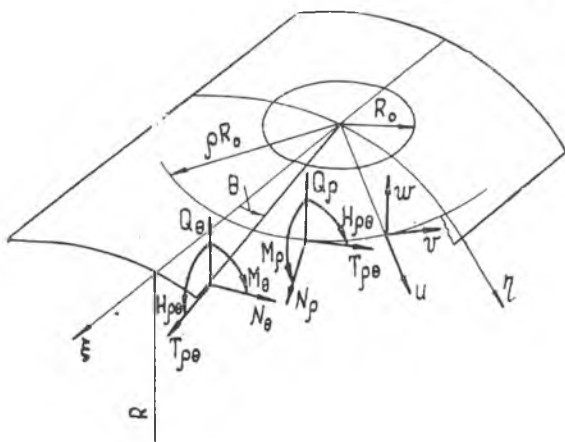


Рис. 1

размерные параметры; u, v, w — компоненты перемещения оболочки; $M_\rho, N_\rho, T_{\rho\theta}$ — изгибающий момент, нормальная и касательная силы в сечениях оболочки для дополнительного состояния; Q_ρ^* — обобщенная перерезывающая сила в смысле Кирхгофа; $\sigma_\rho^c, \sigma_\theta^c, \tau_{\rho\theta}^c$ — нормальные и касательные напряжения в срединной поверхности оболочки; $\sigma_\rho^H, \sigma_\theta^H, \tau_{\rho\theta}^K$ — изгибные напряжения и напряжения кручения; E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки и включения.

Примечания 1. Перемещения и усилия для включения обозначаются дополнительным индексом I внизу.

2. Перемещения и усилия в основном состоянии обозначаются дополнительным индексом 0 вверху.

3. Изгибные напряжения и напряжения кручения у наружной или внутренней поверхностей оболочки снабжаются соответственно дополнительными индексами II или III.

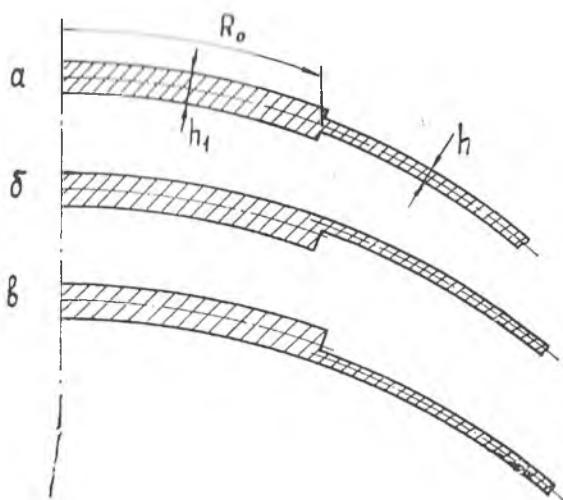


Рис. 2.

В авиаконструкциях часто встречаются элементы в виде круговой цилиндрической оболочки с круглым вырезом, закрытым крышкой. Если крышка достаточно толстая, то в расчетной схеме ее можно рассматривать как жесткое включение в оболочке, в противном случае — как упругое включение (упругую шайбу). Крышку вместе с окантовкой выреза, если таковая имеется, можно приближенно представить искривленной пластинкой постоянной толщины.

Таким образом приходим к расчетной схеме, представляющей собой цилиндрическую оболочку, в круглый вырез которой впаяна упругая шайба в виде элемента более толстой оболочки. Строгое решение подобной контактной задачи вызывает большие затруднения. Поэтому будем приближенно считать, что силы, моменты и перемещения в шайбе вблизи линии ее спая с оболочкой определяются по таким же формулам, как и вдали от нее. Полагаем, что разрыв в оболочке имеет «средние» размеры, что позволяет использовать для решения задачи теорию пологой оболочки.

Исследуются три варианта расположения упругого включения относительно оболочки—когда у них совпадают срединные (схема а на рис. 2), наружные (схема б) или внутренние поверхности. Рассматривается осевое растяжение оболочки (задача 1) и нагруженные системы внутренним давлением (задача 2).

Напряженное состояние как оболочки, так и упругого включения условно разбивается на основное и дополнительное. В основном состоянии оба элемента нагружены равными усилиями, соответствующими их значениям в оболочке без выреза при рассматриваемой внешней нагрузке. В дополнительном состоянии к оболочке

и включению приложены силы взаимодействия таким образом, чтобы суммарные усилия обеспечивали удовлетворение условий совместности перемещений по линии спая.

Для исследования дополнительного состояния используется дифференциальное уравнение полой цилиндрической оболочки относительно комплексной функции $F = \omega + i\varphi$ [1]. Решение этого уравнения в полярных на развертке цилиндра координатах приведено в [2]. Применительно к напряженному состоянию, симметричному относительно ξ и η , оно имеет вид

$$\omega(\rho, \theta) = \sum_{\nu=0,2,4,\dots}^{\infty} I_{\nu} \omega_{\nu}(x) \cos \nu\theta; \quad \varphi(\rho, \theta) = \sum_{\nu=0,2,4,\dots}^{\infty} I_{\nu} \varphi_{\nu}(x) \cos \nu\theta, \quad (1)$$

где $\omega_{\nu}(x) = (-1)^{\frac{\nu}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \bar{\alpha}_{n\nu}(x) - B_n \bar{\beta}_{n\nu}(x)];$

$$\varphi_{\nu}(x) = (-1)^{\frac{\nu}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \bar{\beta}_{n\nu}(x) + B_n \bar{\alpha}_{n\nu}(x)]; \quad (2)$$

$$I_{\nu} = \frac{1}{2} \text{ при } \nu = 0; \quad I_{\nu} = 1 \text{ при } \nu \neq 0.$$

Функции $\bar{\alpha}_{n\nu}(x)$ и $\bar{\beta}_{n\nu}(x)$ определяются, как показано в [5], через линейные комбинации произведений $\ker_{\mathcal{Q}}(x\sqrt{2})$ и $\text{kei}_{\mathcal{Q}}(x\sqrt{2})$ на $\text{ber}_{\mathcal{Q}}(x\sqrt{2})$ и $\text{bei}_{\mathcal{Q}}(x\sqrt{2})$ с соответствующими индексами. Здесь

$$x = \omega\rho, \quad \omega = \frac{1}{2} \sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \frac{R_0}{\sqrt{Rh}}. \quad (3)$$

Через A_n и B_n обозначены постоянные интегрирования. Оболочка полагается достаточно длинной, вследствие чего в (2) удержаны лишь убывающие при больших ρ функции.

Для упругого включения следует, в отличие от оболочки, удерживать лишь возрастающую при больших ρ часть решения дифференциального уравнения, так как при $\rho=0$ убывающие функции либо сами стремятся к бесконечности, либо стремятся к бесконечности определяемые с их помощью усилия. В итоге, на основании [3, 4], имеем

$$\omega_1(\rho, \theta) = c + \sum_{\nu=0,2,4,\dots}^{\infty} I_{\nu} \omega_{1\nu}(x_1) \cos \nu\theta; \quad \varphi_1(\rho, \theta) = \sum_{\nu=0,2,4,\dots}^{\infty} I_{\nu} \varphi_{1\nu}(x_1) \cos \nu\theta, \quad (4)$$

где $\omega_{1\nu}(x_1) = (-1)^{\frac{\nu}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} [c_n \bar{\sigma}_{n\nu}(x_1) - d_n \bar{\tau}_{n\nu}(x_1)];$

$$\varphi_{1\nu}(x_1) = (-1)^{\frac{\nu}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} [c_n \bar{\tau}_{n\nu}(x_1) + d_n \bar{\sigma}_{n\nu}(x_1)]; \quad (5)$$

$$x_1 = \omega_1 \rho, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{h}{h_1}}. \quad (6)$$

Константа c в (4) характеризует жесткое смещение включения относительно оболочки по нормали к срединной поверхности в начале координат. Расчетные формулы для функций $\bar{\sigma}_{\rho\nu}(x_1)$ и $\bar{\tau}_{\rho\nu}(x_1)$ приведены в работе [4]. В (6) учтено, что оболочка и включение изготовлены из одного материала.

Ряды для усилий и перемещений u и v , вытекающие из решения (1), приведены в [2]. В работе [3] даны выражения для усилий и перемещений применительно к круглому кольцу, вырезанному из цилиндрической оболочки. Опустив в них убывающие при больших ρ члены, можно получить соответствующие зависимости для упругого включения.

Решения (1) и (4) удовлетворяют тождественно, при произвольных значениях постоянных интегрирования, условиям однозначности перемещений и уравнениям равновесия круговой зоны.

Граничные условия задачи при $\rho = 1$ ($x = \omega$, $x_1 = \omega_1$) имеют вид

$$\begin{aligned} M_{1\rho} - \delta \frac{h_1 - h}{2} (N_{1\rho} + N_{\rho}^0) &= M_{\rho}; \quad N_{1\rho} = N_{\rho}; \\ Q_{1\rho}^* - \delta \frac{h_1 - h}{2R_0} \frac{\partial}{\partial \theta} (T_{1\rho\theta} + T_{\rho\theta}^0) &= Q_{\rho}^*; \quad T_{1\rho\theta} = T_{\rho\theta}; \\ w_1 + w_1^0 &= w + w^0; \quad u_1 + u_1^0 - \delta \frac{h_1 - h}{2R_0} \frac{\partial w_1}{\partial \rho} = u + u^0; \\ \frac{\partial w_1}{\partial \theta} &= \frac{\partial w}{\partial \theta}; \quad v_1 + v_1^0 - \delta \frac{h_1 - h}{2R_0} \frac{\partial w_1}{\partial \theta} = v + v^0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\delta = 0$ для симметричного, $\delta = 1$ для внутреннего и $\delta = -1$ для наружного включений.

Для оболочки, в случае ее нагружения по торцам растягивающими силами N , имеем

$$\begin{aligned} N_{\rho}^0 &= \frac{N}{2} (1 + \cos 2\theta); \quad T_{\rho\theta}^0 = -\frac{N}{2} \sin 2\theta; \\ w^0 &= -\mu \frac{\lambda N}{E}; \quad u^0 = \frac{\nu \lambda N}{2E} (1 + \cos 2\theta); \quad v^0 = -\frac{\nu \lambda N}{2E} \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (8)$$

а при нагружении цилиндрического сосуда внутренним давлением получим

$$\begin{aligned} N_{\rho}^0 &= p \frac{R}{4} (3 - \cos 2\theta); \quad T_{\rho\theta}^0 = p \frac{R}{4} \sin 2\theta; \\ w^0 &= \frac{(2 - \mu) \lambda p R}{2E}; \quad u^0 = \frac{(1 - 2\mu) \nu \lambda p R}{4E} (1 + \cos 2\theta); \end{aligned}$$

Задача 1а

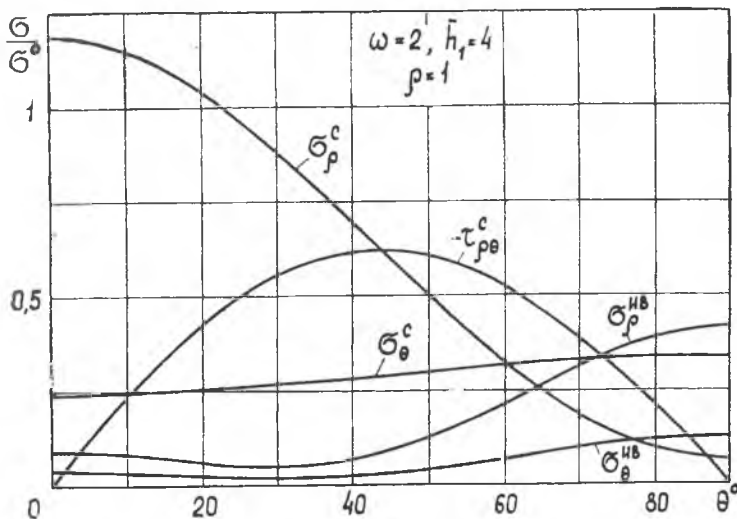


Рис. 3.

$$v^0 = - \frac{(1-2\mu) \lambda \rho R}{4E} \sin 2\theta. \quad (9)$$

Перемещения точек срединной поверхности включения u^0_1 , v^0_1 и w^0_1 по линии спая с оболочкой определяются по соответствующим формулам (8) и (9), в которых следует λ заменить на λ_1 .

После подстановки в (7) рядов для усилий и перемещений относительно постоянных A_n , B_n , c_n , d_n и e получается бесконечная система линейных алгебраических уравнений. Если в (1), (2), (4) и (5) ограничить суммирование до $n_{\max} = n_{\max} = \kappa$, то с учетом линейной зависимости, имеющей место между некоторыми уравнениями [2, 3], приходим к замкнутой системе уравнений.

Задача была запрограммирована и просчитана на ЭВМ «Урал-2» при значении коэффициента Пуассона $\mu=0,3$. Ниже приводятся некоторые результаты вычислений, где напряжения в оболочке по линии спая с упругим включением отнесены к характерным напряжениям σ^0 для оболочки без выреза при тех же нагрузках. При осевом растяжении принято $\sigma = \frac{N}{h}$, а при нагружении внутренним давлением —

$$\sigma^0 = p \frac{R}{h}.$$

Характер изменения напряжений в оболочке вдоль контура спая с симметричным включением в случае осевого растяжения

Задача 1а

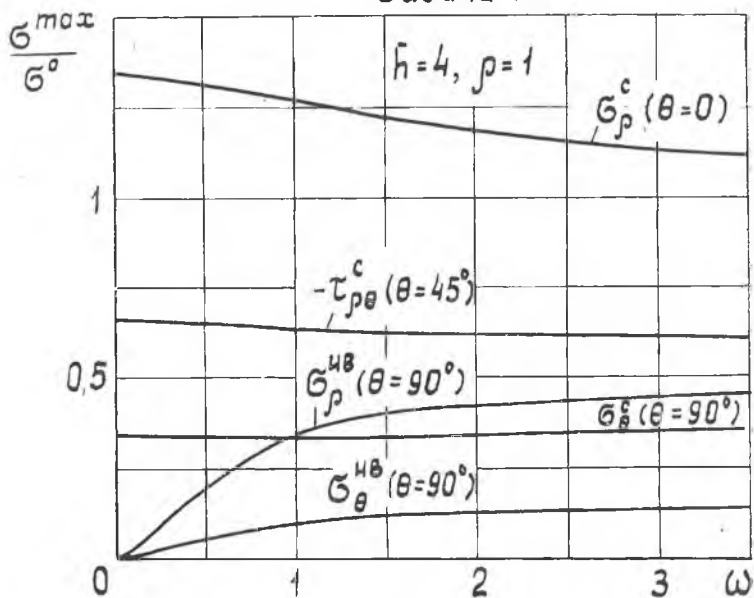


Рис. 4.

Задача 1а

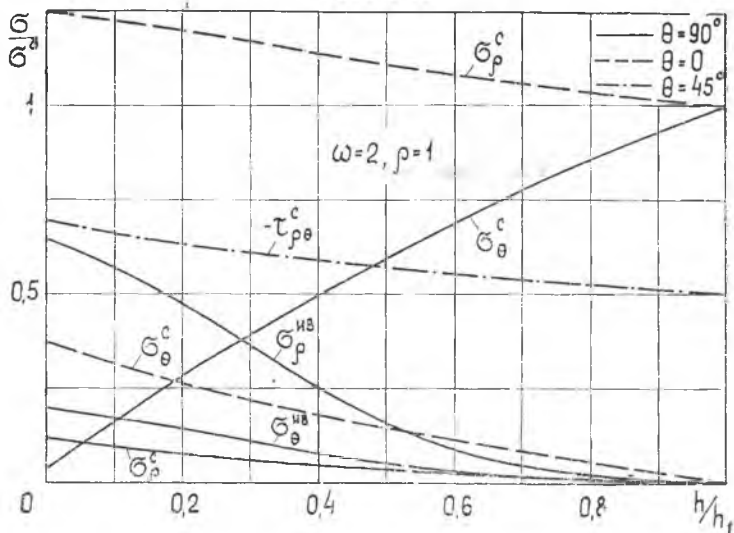


Рис. 5.

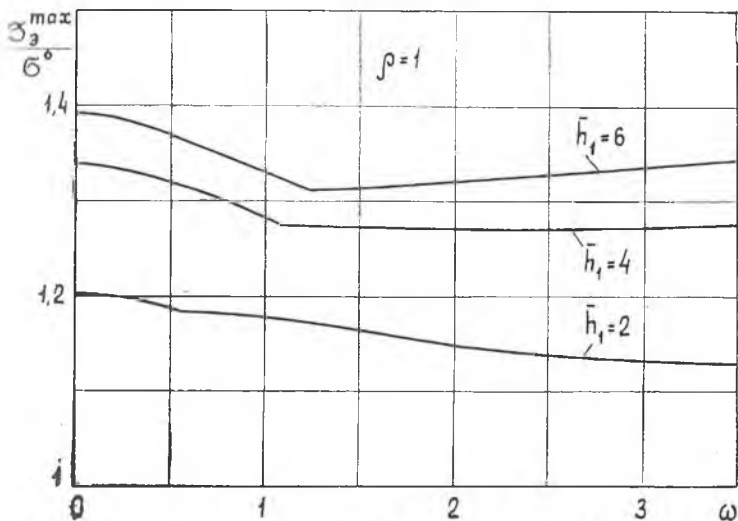


Рис. 6.

(задача 1а)* приведен для $\omega=2$ и $h=4$ на рис. 3. Напряжения σ_{ρ}^c достигают здесь максимума при $\Theta=0$, σ_{θ}^c , σ_{ρ}^{nb} и σ_{θ}^{nb} — при $\theta = \pi/2$, а $\tau_{\rho\theta}^c$ и $\tau_{\rho\theta}^{kn**}$ — при $\theta = \pi/4$. Зависимость максимальных напряжений от параметра ω для $h=4$ представлена на рис. 4, а на рис. 5 показано, как при $\omega=2$ изменяются напряжения в функции от $\bar{h}/h_1 = 1/\bar{h}$. По мере роста относительной толщины \bar{h} напряжения стремятся к их значениям для случая жесткого включения [5].

Ввиду того, что компоненты напряжения достигают наибольших значений в различных точках линии сая, то для более полного представления о напряженном состоянии оболочки были подсчитаны эквивалентные напряжения σ_3 по энергетической (энергии формоизменения) теории прочности. Для задачи 1а зависимость σ_3^{max} от параметра ω приведена на рис. 6. Кривые соответствуют $\bar{h}=2; 4; 6$. При относительно небольших значениях ω эквивалентные напряжения достигают наибольшей величины у наружной поверхности оболочки (до излома на кривых), а затем — у внутренней.

На рис. 7 и 8 приведены графики максимальных эквивалентных напряжений в оболочке в зависимости от $h/h_1 = 1/\bar{h}$ для задач 1б (внутренняя поверхность оболочки) и 1в (наружная поверхность). Подсчеты выполнены при $\omega=0,5; 1; 2$. Для сопоставления на графиче-

* В соответствии с рис. 2 будем к номеру задачи добавлять букву а для симметричного, букву б — для внутреннего и букву в — для наружного включения.

** Ввиду того, что напряжения кручения относительно невелики, они на рис. 3 не показаны.

Задача 15

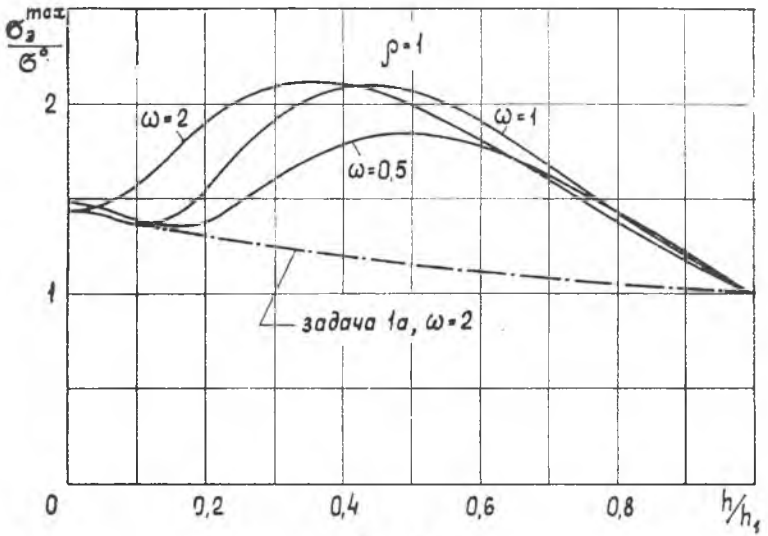


Рис. 7.

Задача 1б

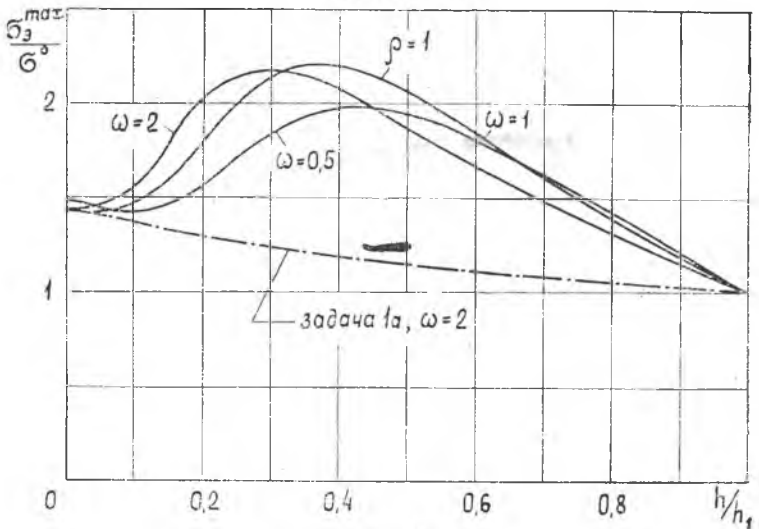


Рис. 8.

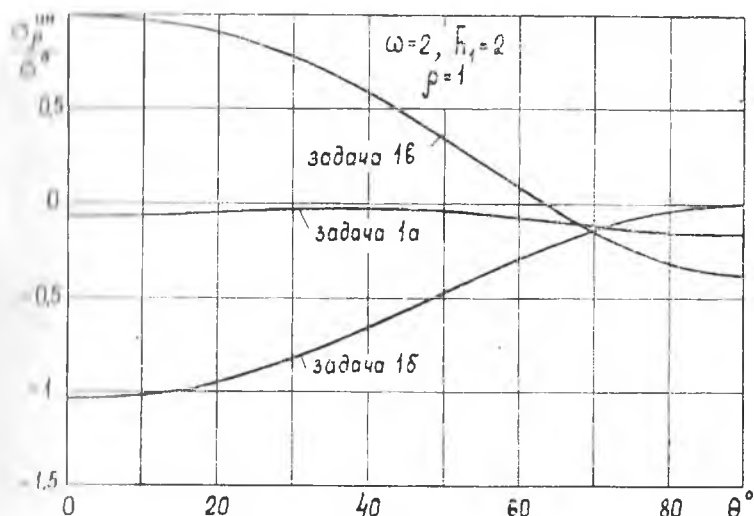


Рис. 9.

на нанесена кривая, соответствующая симметричному включению при $\omega=2$. Из графиков видно, что с точки зрения прочности оболочки самыми опасными являются односторонние включения относительно небольшой толщины (\bar{h} порядка 2—3). За счет подобных включений эквивалентные напряжения в оболочке могут возрасти в 2 раза и более, в то время как при симметричном включении $\sigma_{\rho}^{\text{max}}$ не превышает в этом случае $1,25 \sigma^0$.

При одностороннем включении изменяются по сравнению с симметричным все компоненты напряжения в оболочке. Однако наиболее существенно характер включения отражается на величине изгибных напряжений σ_{ρ} . На рис. 9 показан на примере $\omega=2$ и $\bar{h}=2$ закон изменения $\sigma_{\rho}^{\text{max}}$ по контуру спая с симметричным, внутренним и наружным включениями. Из графиков видно, что в случае одностороннего упругого включения значения изгибных напряжений значительно выше, чем при симметричном. Не менее важным является и тот факт, что достигают они максимума либо при $\theta=0$ (т. е. там же, где и напряжения σ_{ρ}^0), либо в близких точках.

Зависимость максимальных изгибных напряжений от h/h_1 приведена для задач 1б и 1в на рис. 10. На характер этих кривых влияют в основном два противоречивых фактора. С ростом \bar{h} увеличивается, с одной стороны, момент от сил, лежащих в срединной поверхности включения, относительно средней линии сечения оболочки $\rho=1$. А это ведет к росту изгибных деформаций оболочки. С другой стороны, повышается изгибная жесткость включения, что препятствует повороту сечения оболочки по линии спая. Сначала преобладает первый фактор, и изгибные напряжения возрастают (до

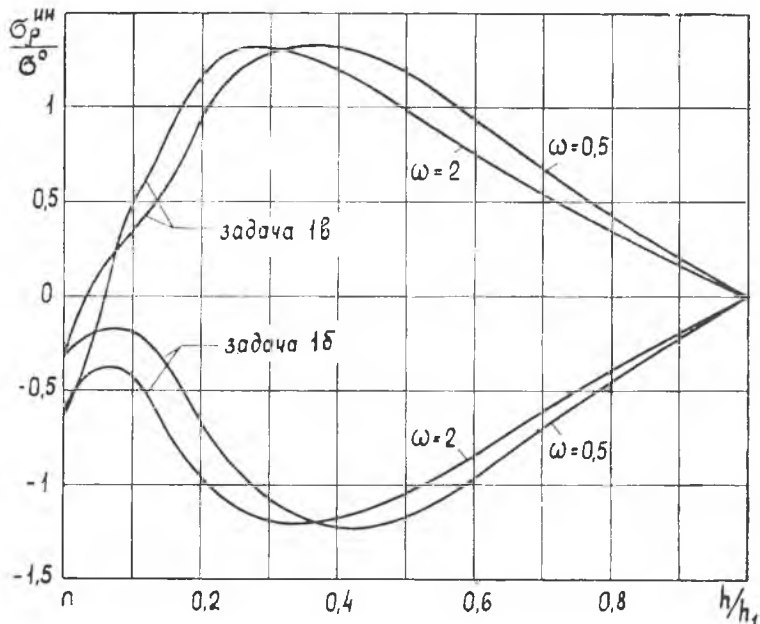


Рис. 10.

$h=2,5-3,5$), а затем уже начинает сильнее сказываться повышение изгибной жесткости включения, пропорциональной кубу его толщины. Обратим внимание на то, что чем больше ω (при фиксированных R и h это равносильно увеличению R_0), тем выше значение h , соответствующее максимуму кривых. Это и понятно, так как с ростом радиуса включения повышается его податливость.

Сопоставление графиков рис. 10 с кривыми рис. 7 и 8 показывает, что они имеют максимум при близких значениях \bar{h} . Таким образом, можно сделать вывод, что основную ответственность за столь существенный рост σ^{\max} , в случае одностороннего упругого включения, особенно при относительно небольших значениях h , несут изгибные напряжения σ_p .

Остановимся на результатах вычислений для случая нагружения системы внутренним давлением. Характер изменения напряжений в оболочке по контуру линии спая с симметричным включением (задача 2а) показан, в качестве примера, для $\omega=2$ и $\bar{h} \equiv 4$ на рис. 11. Напряжения σ_p^c , которые являются определяющими, достигают максимума при $\Theta=\pi/2$. Максимальное значение изгибных напряжений σ_p^{nb} ($\Theta=0$) составляет около 56% от наибольших мембранных напряжений, но при $\Theta=\pi/2$ они относительно невелики. В конечном счете получается, что σ_3^{\max} лишь немногим превышает здесь максимальное значение σ_p^c . Зависимость максимальных на-

Задача 2а

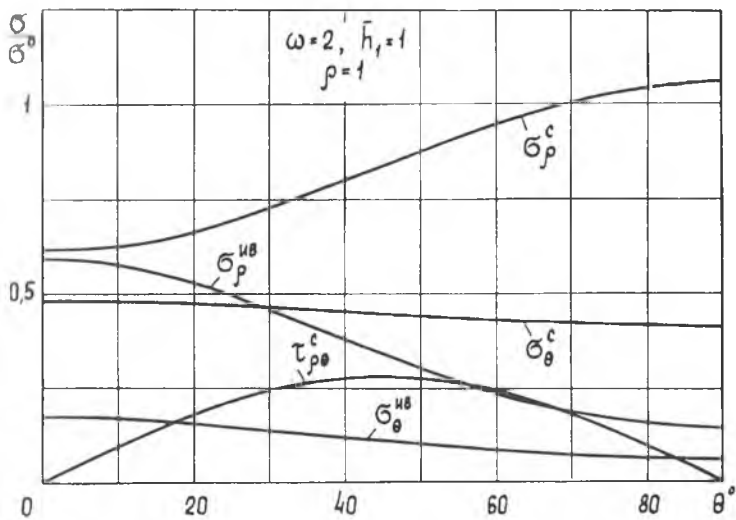


Рис. 11.

Задача 2а

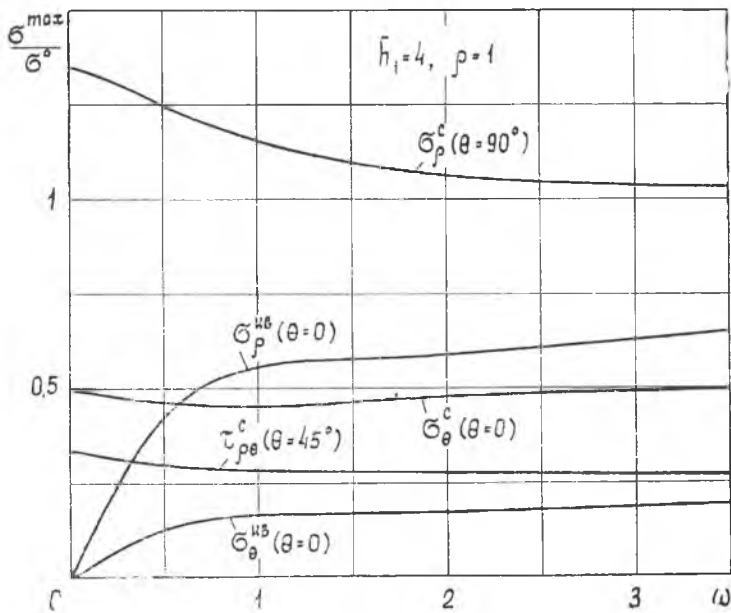


Рис. 12.

Задача 2а

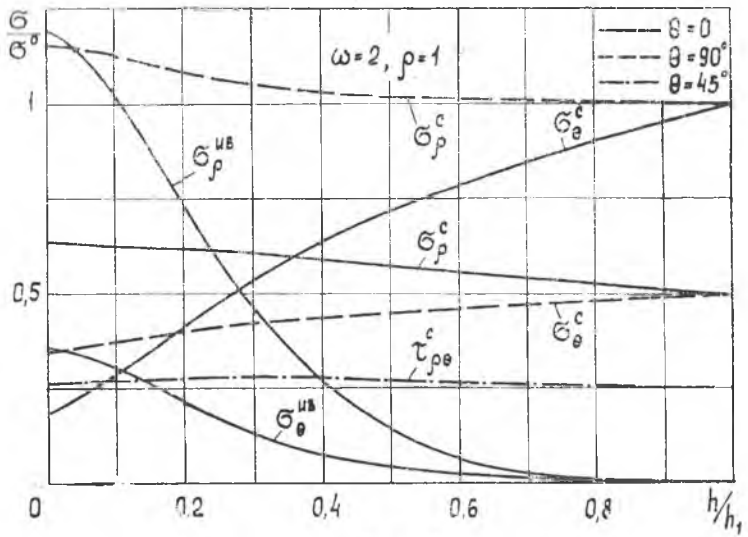


Рис. 13.

Задача 2а

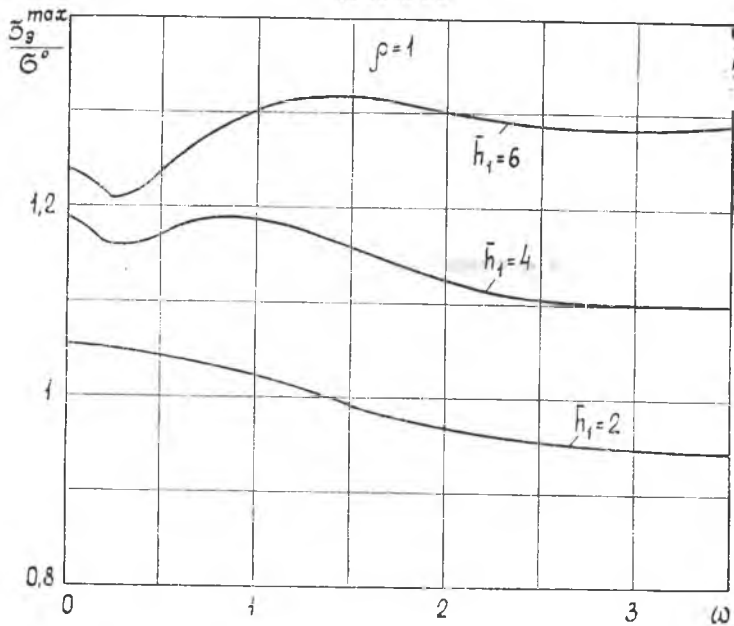


Рис. 14.

Задача 2б

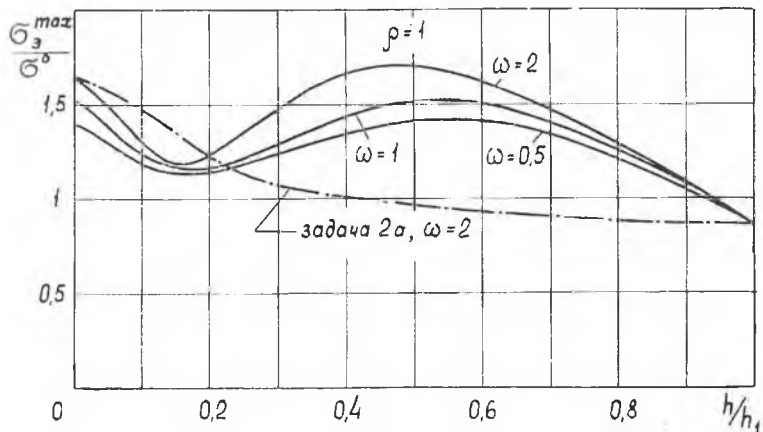


Рис. 15.

Задача 2в

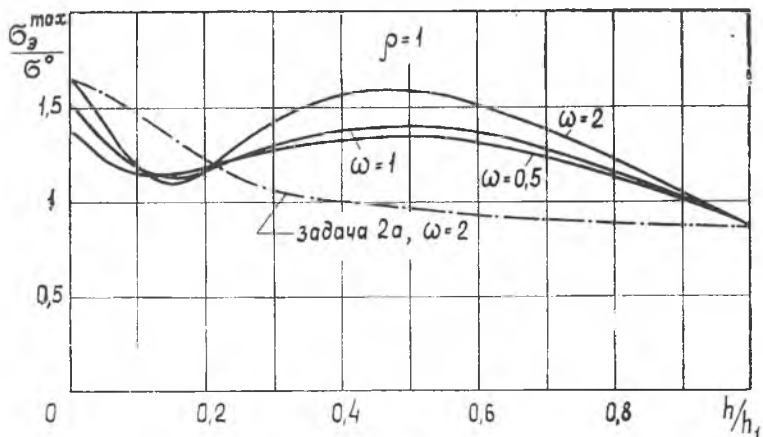


Рис. 16.

пряжений в оболочке от параметра ω при $\bar{h} = 4$ показана на рис. 12, а зависимость напряжений от h/h_1 при $\omega = 2$ — на рис. 13. Изменение толщины включения сказывается на величине всех компонентов напряжения, но наиболее чувствительны к этому напряжения σ_{θ}^0 и изгибные напряжения при $\Theta = 0$. С увеличением ω максимальные значения напряжений σ_0^c падают, зато растут изгибные напряжения, особенно заметно до $\omega \approx 1$.

На рис. 14 представлена зависимость σ_3^{max} от параметра ω для задачи 2а. При $\bar{h} = 2$ эквивалентные напряжения имеют наиболь-

ние значения у внутренней поверхности оболочки. То же наблюдается и при $\bar{h}=4$ и $h=6$, но за исключением участка $0 < \omega \leq \leq 0,2-0,25$ (до излома на кривых), где σ_3^{\max} соответствует наружной поверхности. Зависимость σ_3^{\max} от ω получается достаточно сложной, что отражает отмеченную выше противоречивость влияния параметра ω на отдельные компоненты напряжения. С ростом относительной толщины включения эквивалентные напряжения в оболочке возрастают, оставаясь все же ниже, чем для случая жесткого включения [5]. Аналогичное влияние наблюдается и в задаче 1а.

При одностороннем включении в оболочке растут, по сравнению с симметричным, изгибные напряжения σ_p , а их наибольшее значение смещается в точку максимума напряжений σ_p^c . Качественно толщина включения влияет здесь на величину изгибных напряжений так же, как и при осевом растяжении оболочки, в связи с чем соответствующие графики не приводятся. На рис. 15 и 16 представлена зависимость σ_3^{\max} от h/\bar{h} , для задач 2б (внутренняя поверхность оболочки) и 2в (наружная поверхность). Наибольших значений эквивалентные напряжения достигают при небольшом значении \bar{h} (порядка 1,8—2,2). В случае $\omega=2$ и $\bar{h}=2,2$, например, для внутреннего включения они на 70% выше, чем для симметричного.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье. А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, 1947.
2. Хазанов. Х. С. К расчету цилиндрических оболочек с круглыми отверстиями. Труды КуАИ, 29, 1967.
3. Хазанов. Х. С. Напряженное состояние цилиндрической оболочки с подкрепленным круглым отверстием. Труды КуАИ, вып. 39, 1968.
4. Хазанов. Х. С. К изгибу искривленных круглых пластин. Труды КуАИ вып. 39, 1968.
5. Хазанов. Х. С. К расчету цилиндрической оболочки с жесткой круглой шайбой на боковой поверхности. ИВУЗ, «Авиационная техника», № 1, 1970.

