

Х. С. Хазанов

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАГРУЖЕННОЙ МОМЕНТОМ ЧЕРЕЗ ЖЕСТКУЮ КРУГЛУЮ ШАЙБУ И ПОДКРЕПЛЕННОЙ КОЛЬЦЕВОЙ НАКЛАДКОЙ

Принятые обозначения

R, h — радиус срединной поверхности и толщина оболочки;

h_n — толщина накладки;

$h_1 = h + h_n$ — толщина кольца;

$\bar{h} = \frac{h_1}{h}$ — относительная толщина кольца;

R_0 — радиус шайбы и внутренний радиус накладки;

R_1 — наружный радиус накладки,

ξ, η — безразмерные декартовы координаты точек срединной поверхности оболочки и кольца, отнесенные к радиусу шайбы R_0 (начало координат в центре шайбы);

$\rho = \frac{r}{R}, \theta$ — полярные на развертке цилиндра координаты (фиг. 1);

u, v, w — компоненты перемещения точек срединной поверхности оболочки;

$M_\rho, M_\theta, H_{\rho\theta}, N_\rho, N_\theta, T_{\rho\theta}$ — изгибающие и крутящие моменты, нормальные и касательные силы в сечениях оболочки;

$\sigma_\rho^c, \sigma_\theta^c, \tau_{\rho\theta}^c$ — нормальные и касательные напряжения в срединной поверхности оболочки;

$\sigma_\rho^H, \sigma_\theta^H, \tau_{\rho\theta}^H$ — изгибные напряжения и напряжения кручения на наружной поверхности оболочки;

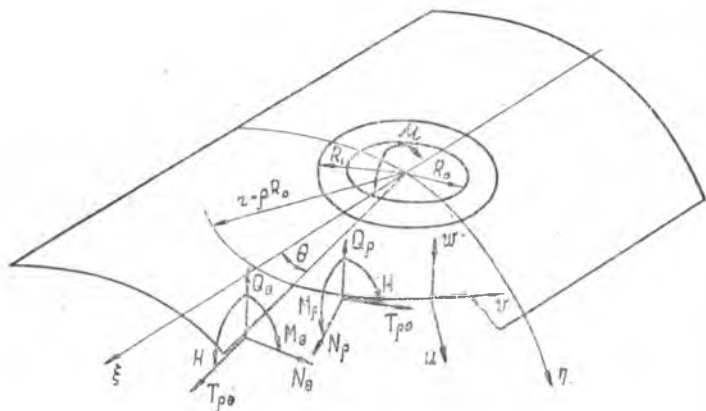
E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки и накладки.

Примечание: перемещения и усилия для кольца обозначаются дополнительным индексом 1 внизу.

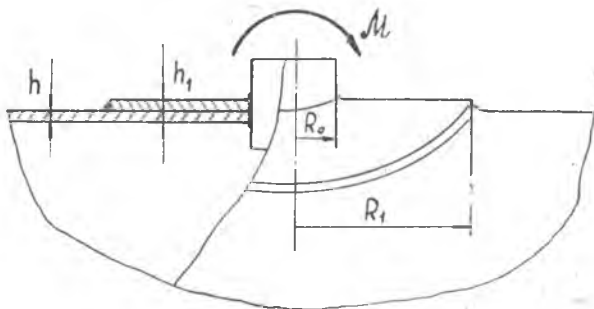
В [2] рассмотрена задача, когда к круглой жесткой шайбе на боковой поверхности цилиндрической оболочки приложен момент M , вектор которого перпендикулярен плоскости, проходящей через ось оболочки и центр шайбы. Предполагается, что момент уравновешивается усилиями на торцах оболочки. Вычисления показали, что при этом в оболочке по линии спая с шайбой возникают значительные изгибные напряжения. Их величина может быть существенно снижена, если оболочку вблизи шайбы усилить накладкой.

В настоящей статье рассматривается подобная задача в случае круглой кольцевой накладки (фиг. 2) постоянной толщины.

Предполагаем, что накладка спаяна с оболочкой по всей поверхности их контакта. Это приводит к расчетной схеме, где между оболочкой и жесткой шайбой имеется искривленная кольцевая пластина (будем в дальнейшем называть ее для краткости коль-



Фиг. 1.



Фиг. 2.

цом) толщиной $h_1 = h + h_{II}$. Полагаем, что у оболочки и кольца совпадают либо срединная, либо наружная или внутренняя поверхности (фиг. 3). Это соответствует симметричному, внутреннему или наружному подкреплению оболочки.

Со стороны оболочки на кольцо усилия передаются не по всей его толщине. Строгое решение подобной контактной задачи представляет значительные трудности. Поэтому приближенно считаем, что усилия и перемещения кольца определяются по линии спая с оболочкой по таким же формулам, как и вдали от нее.

Оболочку рассматриваем как пологую, для которой однородное дифференциальное уравнение относительно комплексной функции $V = \omega + i\Phi$ [1] имеет в безразмерных координатах вид

$$\nabla^2 \nabla^2 F + 8i\omega^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = 0, \quad (1)$$

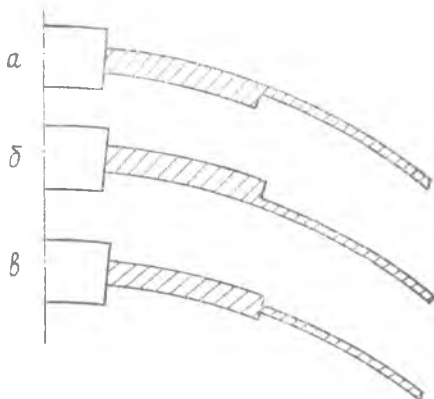
где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad \omega = \frac{1}{2} \sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \frac{R_0}{\sqrt{Rh}} \quad (2)$$

Кольцо рассматриваем также, как элемент пологой оболочки. Для него следует в (1) вместо ω подставить

$$\omega_1 = \omega \sqrt{\frac{h}{h_1}} \quad (3)$$

Для достаточно длинной оболочки, при симметричном относительно ξ и обратно симметричном относительно η напряженном состоянии, решение уравнения (1) в полярных на развертке цилиндра координатах приводится к виду [3]



Фиг. 3.

$$\omega(\rho, \theta) = \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} \omega_{\nu}(x) \cos \nu\theta, \quad \Phi(\rho, \theta) = \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} \Phi_{\nu}(x) \cos \theta, \quad (4)$$

$$\omega_{\nu}(x) = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \alpha_{n\nu}^*(x) - B_n \beta_{n\nu}^*(x)],$$

$$\Phi_{\nu}(x) = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \beta_{n\nu}^*(x) + B_n \alpha_{n\nu}^*(x)], \quad (5)$$

где $x = \omega\rho$, A_n и B_n — постоянные интегрирования.

В выражениях (4) и (5) удержаны лишь решения, убывающие при больших значениях ρ . Для кольца же, помимо убывающих, следует учесть и возрастающие решения [4]. В итоге имеем

$$\omega_1(\rho, \theta) = ax_1 \cos \theta + \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} \omega_{1\nu}(x_1) \cos \nu\theta$$

$$\Phi_1(\rho, \theta) = \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} \Phi_{1\nu}(x_1) \cos \nu\theta, \quad (6)$$

$$\omega_{1\nu}(x_1) = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \alpha_{n\nu}(x_1) - b_n \beta_{n\nu}(x_1) + c_n \sigma_{n\nu}(x_1) - d_n \tau_{n\nu}(x_1)],$$

$$\Phi_{1\nu}(x_1) = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \beta_{n\nu}(x_1) + b_n \alpha_{n\nu}(x_1) + c_n \tau_{n\nu}(x_1) + d_n \sigma_{n\nu}(x_1)], \quad (7)$$

где $x_1 = \omega_1 \rho_1$; a_n, b_n, c_n, d_n, a — постоянные.

Функции, входящие в (5) и (7), определяются через $ber_k(x\sqrt{2})$, $bei_k(x\sqrt{2})$, $ker_k(x\sqrt{2})$ и $kei_k(x\sqrt{2})$, как показано в [2, 5]. Первое слагаемое в выражении (6) для $\omega_1(\rho, \theta)$ вытекает из очевидного решения уравнения (1) и характеризует жесткое вращение кольца относительно оболочки.

Через функцию напряжений Φ определяются по формулам плоской задачи теории упругости с точностью до постоянного множителя усилия в срединной поверхности оболочки, а через ω по формулам теории изгиба пластин — моменты и перерезывающие силы [3]. Усилия в сечениях кольца можно представить рядами

$$M_{1\rho}(\rho, \theta) = -\frac{\chi^2 ER}{64\omega_1^2 \lambda_1} \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} M_{1\rho,\nu}(x_1) \cos \nu\theta,$$

$$Q_{1\rho}^*(\rho, \theta) = -\frac{\chi E}{64\omega_1 \lambda_1} \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} Q_{1\rho,\nu}(x_1) \cos \nu\theta,$$

$$N_{1\rho}(\rho, \theta) = -\frac{E}{8\lambda_1 x_1} \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} N_{1\rho,\nu}(x_1) \cos \nu\theta,$$

$$T_{1\rho\theta}(\rho, \theta) = -\frac{E}{8\lambda_1 x_1} \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} T_{1\nu}(x_1) \sin \nu\theta \text{ и т. д.} \quad (8)$$

Интегрирование геометрических соотношений полой оболочки приводит к следующим рядам для перемещений в срединной поверхности кольца:

$$u_1(\rho, \theta) = b \cos \theta + \frac{\chi x_1}{8\omega_1} [-ax_1 (\cos \theta - \cos 3\theta) + \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} u_{1\nu}(x_1) \cos \nu\theta],$$

$$v_1(\rho, \theta) = -b \sin \theta + \frac{\chi x_1}{8\omega_1} [-ax_1 (5 \sin \theta + \sin 3\theta) + \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} v_{1\nu}(x_1) \sin \nu\theta]. \quad (9)$$

Здесь константа b характеризует жесткое смещение кольца относительно оболочки в направлении образующей.

Коэффициенты рядов (8) и (9) содержат члены как убывающие, так и возрастающие при больших ρ . Их структура ясна из работ [3, 4]. Аналогичные ряды для оболочки содержат [3], в соответствии с (5), лишь убывающие функции. Кроме того, в формулах типа (9) следует для оболочки положить равными нулю константы a и b .

Если вырезать из оболочки зону сечением $\rho = \text{const}$, то условия ее равновесия [2] дают связь между моментом M и постоянными интегрирования

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_n + B_n) = -\frac{8\omega^3 \lambda}{\alpha E R_0^2} M. \quad (10)$$

Аналогичное соотношение для кольца имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = -\frac{8\omega_1^3 \lambda_1}{\alpha E R_0^2} M, \quad (11)$$

т. е. усилия, определяемые через возрастающую при больших ρ часть решения (7), удовлетворяют тождественно, при любых c_n и d_n , всем уравнениям равновесия зоны.

Условия однозначности перемещений дают для оболочки [3]

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_n - B_n) = 0 \quad (12)$$

и для кольца

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) = 0, \quad (13)$$

т. е. возрастающая часть решения (7) также тождественно удовлетворяет условию однозначности перемещений.

При записи граничных условий по линии спая кольца с оболочкой ($\rho = \frac{R_1}{R_0} = \rho_1$) в случае несимметричного подкрепления (фиг. 3а и 3б) следует усилия $N_{1\rho}$ и $T_{1\rho\theta}$, действующие в срединной поверхности кольца, перенести на уровень срединной поверхности оболочки (фиг. 4). В итоге, со стороны кольца на оболочку будут действовать момент

$$\bar{M}_{1\rho} = M_{1\rho} - \delta \frac{h_1 - h}{2} N_{1\rho} \quad (14)$$

и обобщенная перерезывающая сила

$$\bar{Q}_{1\rho}^* = Q_{1\rho}^* - \delta \frac{h_1 - h}{2} \frac{\partial T_{1\rho\theta}}{r \partial \theta}. \quad (15)$$

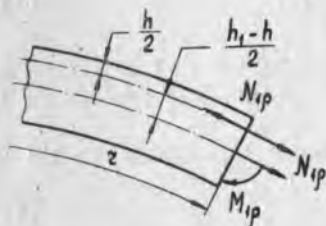
Значению $\delta = 1$ соответствует внутреннее подкрепление оболочки (фиг. 3а), $\delta = -1$ — наружное подкрепление (фиг. 3б), а для симметричного (фиг. 3в) подкрепления $\delta = 0$. Окончательные выражения для $\bar{M}_{1\rho}$ и $\bar{Q}_{1\rho}^*$ могут быть записаны в виде (8), где в формулах для $M_{1\rho}$ и $Q_{1\rho}^*$ следует заменить $M_{1\rho, \nu}(x_1)$ и $Q_{1\rho, \nu}(x_1)$ соответственно на

$$\begin{aligned} \bar{M}_{1\rho, \nu}(x_1) &= M_{1\rho, \nu}(x_1) - \delta \frac{\epsilon}{x_1} N_{1\rho, \nu}(x_1), \\ \bar{Q}_{1\rho, \nu}(x_1) &= Q_{1\rho, \nu}(x_1) - \delta \frac{\epsilon \nu}{x_1^2} T_{1\nu}(x_1), \end{aligned} \quad (16)$$

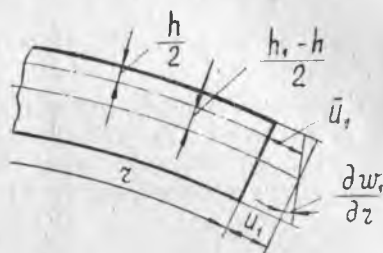
$$\text{де } \epsilon = \frac{h-1}{h} \sqrt{3(1-\mu^2)}.$$

Перемещения точек кольца, расположенных на уровне срединной поверхности оболочки (фиг. 5), равны

$$\begin{aligned}\bar{u}_1 &= u_1 - \delta \frac{h_1 - h}{2} \frac{\partial w_1}{\partial r}, \\ \bar{v}_1 &= v_1 - \delta \frac{h_1 - h}{2} \frac{\partial w_1}{r \partial \theta}.\end{aligned}\quad (17)$$



Фиг. 4.



Фиг. 5.

В конечном счете выражения для \bar{u}_1 и \bar{v}_1 имеют вид (9), где вместо $u_{1\nu}(x_1)$ и $v_{1\nu}(x_1)$ следует соответственно записать

$$\begin{aligned}\bar{u}_{1\nu}(x_1) &= u_{1\nu}(x_1) - \delta \frac{\nu}{x_1} \left[\frac{dw_{1\nu}(x_1)}{dx_1} + \gamma_\nu a \right], \\ \bar{v}_{1\nu}(x_1) &= v_{1\nu}(x_1) + \delta \frac{\nu v}{x_1^2} [w_{1\nu}(x_1) + \gamma_\nu a x_1],\end{aligned}\quad (18)$$

($\gamma_\nu = 1$ при $\nu = 1$, $\gamma_\nu = 0$ при $\nu \neq 1$).

Граничные условия по линии спая кольца с жесткой шайбой при $\rho=1$ имеют вид

$$\begin{aligned}w_1 &= \psi R_0 \cos \theta, \quad \frac{\partial w_1}{\partial r} = \psi \cos \theta, \\ u_1 &= c \cos \theta - \frac{\nu R_0}{8} \psi (\cos \theta - \cos 3\theta), \\ v_1 &= -c \sin \theta - \frac{\nu R_0}{8} \psi (5 \sin \theta + \sin 3\theta).\end{aligned}\quad (19)$$

Здесь c — жесткое смещение шайбы относительно кольца в направлении образующей, ψ — угол поворота шайбы. Правые части последних двух равенств (19) обеспечивают недеформируемость средней линии внутреннего контура кольца при повороте шайбы.

По линии спая кольца с оболочкой при $\rho = \frac{R_1}{R_0} = \rho_1$ имеем

$$\begin{aligned}w_1 &= w, \quad \frac{\partial w_1}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \bar{u}_1 = u, \quad \bar{v}_1 = v, \\ \bar{M}_{1\rho} &= M_\rho, \quad \bar{Q}_{1\rho}^* = Q_\rho^*, \quad N_{1\rho} = N_\rho, \quad T_{1\rho\theta} = T_{\rho\theta}.\end{aligned}\quad (20)$$

Для определения постоянных интегрирования к системе уравнений, вытекающей из граничных условий, добавляются условия однозначности перемещений (12) и (13), а также одно из уравнений равновесия — (10) или (11). Если добавить одновременно (10) и (11), то, учитывая (20), система будет содержать линейно зависимые уравнения.

В практических расчетах, переходя от бесконечных рядов к усеченным, ограничиваем суммирование по ν значением $\nu_{\max} = m$, где m — число, зависящее от степени сходимости решения. В рядах для оболочки принимаем $n_{\max} = m$, а для кольца, учитывая выводы работы [5], вместо (7) запишем

$$\omega_{1\nu}(x_1) = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \left[\sum_{n=0}^m (a_n^* x_{n\nu} - b_n^* \vartheta_{n\nu}) + \sum_{n=0}^{m-1} (c_n^* \sigma_{n\nu} - d_n^* \tau_{n\nu}) \right]. \quad (21)$$

Аналогичную структуру имеет и выражение для $\Phi_1(x_1)$, а также все определяемые через них величины. Это приводит к замкнутой системе линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования, содержащей $6m+8$ неизвестных. При этом учтено, что коэффициенты первых гармоник в выражениях для нормальных и касательных сил в срединной поверхности равны между собой.

Задача была запрограммирована и просчитана на ЭВМ «Урал-2»*. Коэффициент Пуассона μ принимался равным 0,3. Вычисления проводились для трех значений ω (0,25; 0,5 и 1) и трех значений h (2,25; 4 и 6,25) при изменении ширины накладки в широком диапазоне. Расчеты выполнялись с удержанием в рядах (4) и (6) различного числа членов. Точность до третьей значащей цифры включительно в окончательных результатах обеспечивалась, как правило, при 3–5 членах ряда ($m=5\div 9$) в зависимости от значений параметров задачи. Ниже приводятся некоторые результаты вычислений.

Напряженное состояние кольца и оболочки оценивалось с использованием теории прочности энергии формоизменения по формуле

$$\sigma_3 = \sqrt{(\sigma_\rho^c \pm \sigma_\rho^u)^2 + (\sigma_\theta^c \pm \sigma_\theta^u)^2 - (\sigma_\rho^c \pm \sigma_\rho^u)(\sigma_\theta^c \pm \sigma_\theta^u) + 3(\tau_{\rho\theta}^c \pm \tau_{\rho\theta}^u)^2}. \quad (22)$$

Верхние знаки в (22) соответствуют наружной поверхности кольца и оболочки, а нижние — внутренней.

На приведенных ниже графиках по оси абсцисс отложено либо

$$\omega(\rho_1 - 1) = 0,6427 \frac{R_1 - R_0}{\sqrt{Rh}}, \quad (23)$$

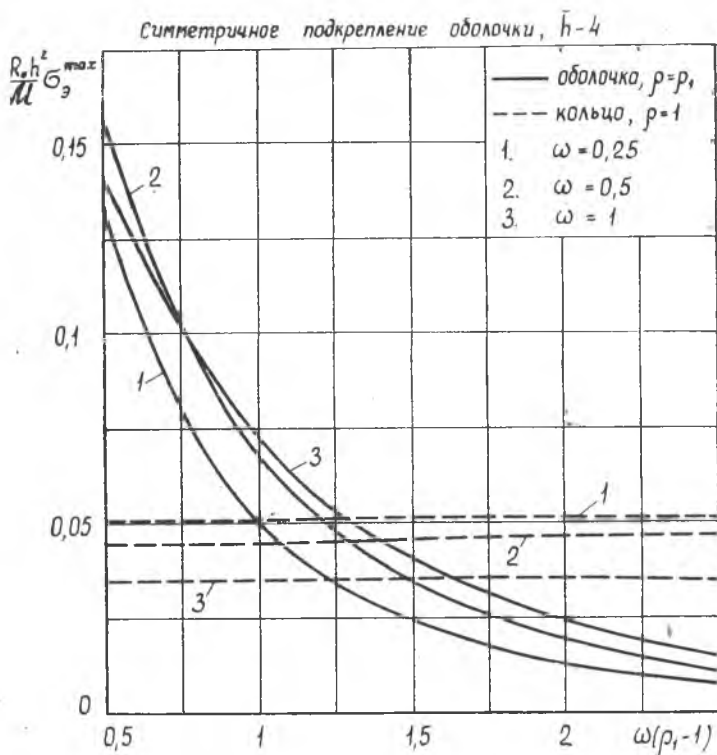
либо

$$\omega\rho_1 = 0,6427 \frac{R_1}{\sqrt{Rh}}. \quad (24)$$

* Программирование и вычисление на ЭВМ выполнены инженером Г. В. Кановой.

При постоянных R и h величина (23) характеризует ширину накладки, а величина (24) — ее наружный радиус.

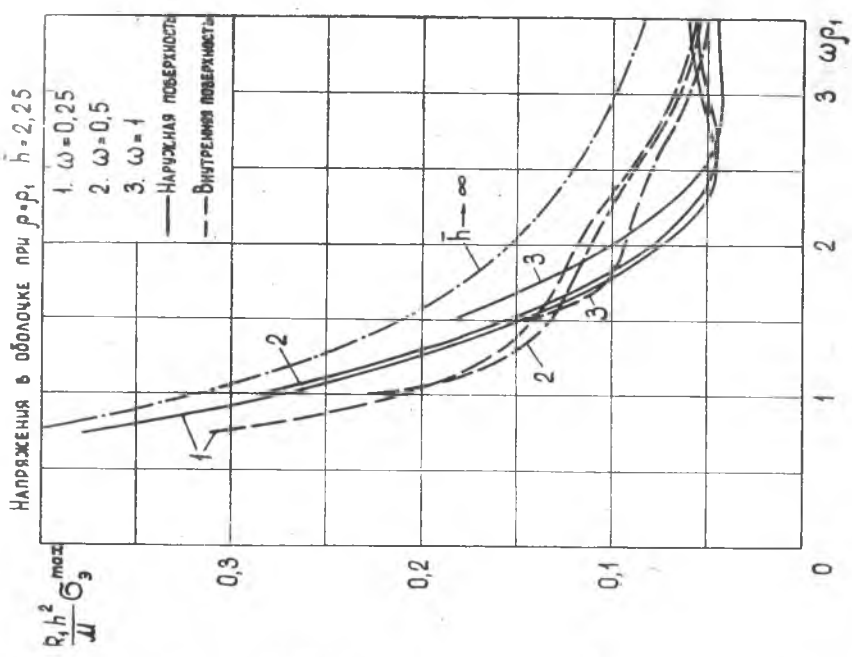
На фиг. 6 приведено изменение максимальных эквивалентных напряжений σ_3^{\max} в оболочке по линии спая с кольцом (сплошные линии) и в кольце по линии спая с жесткой шайбой (штриховые линии) в зависимости от ширины накладки для $\bar{h}=4$. Графики построены применительно к симметричному подкреплению оболочки



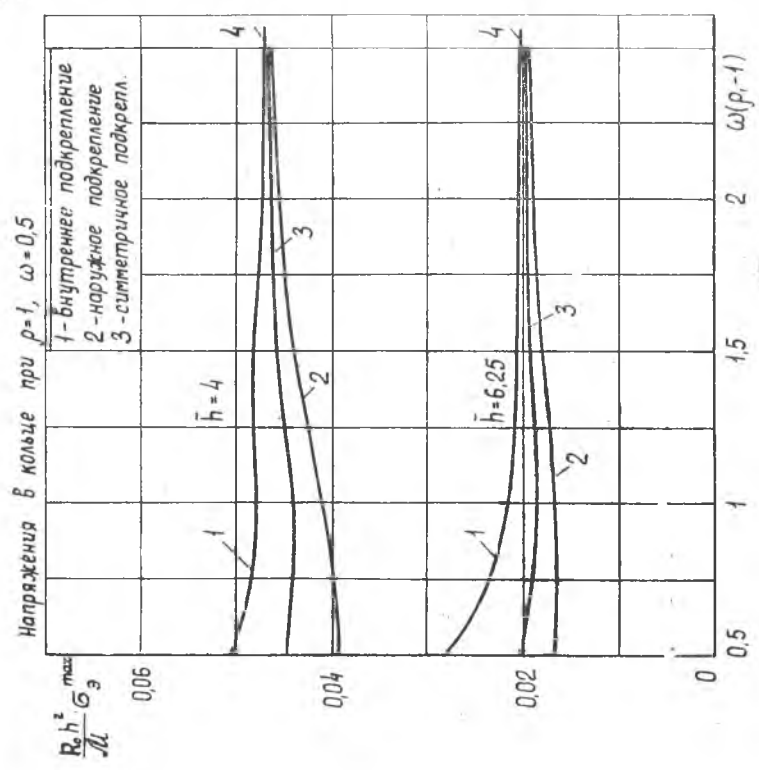
Фиг. 6

(фиг. 3в). Вычисления показали, что напряжения в оболочке для всех трех рассмотренных схем ее подкрепления оказываются практически одинаковыми. Напряжения же в кольце по линии спая с жесткой шайбой зависят от схемы подкрепления, как показано на фиг. 7. Внутреннее подкрепление по сравнению с симметричным приводит к росту (для просчитанных параметров — до 40%), а наружное — к снижению напряжений в кольце, причем эффект этот уменьшается по мере увеличения его ширины.

Цифрами 4 за пределами графика фиг. 7 отмечены значения напряжений в неподкрепленной оболочке толщиной h_1 с жесткой шайбой радиуса R_0 . Их уровень весьма близок ординатам точек

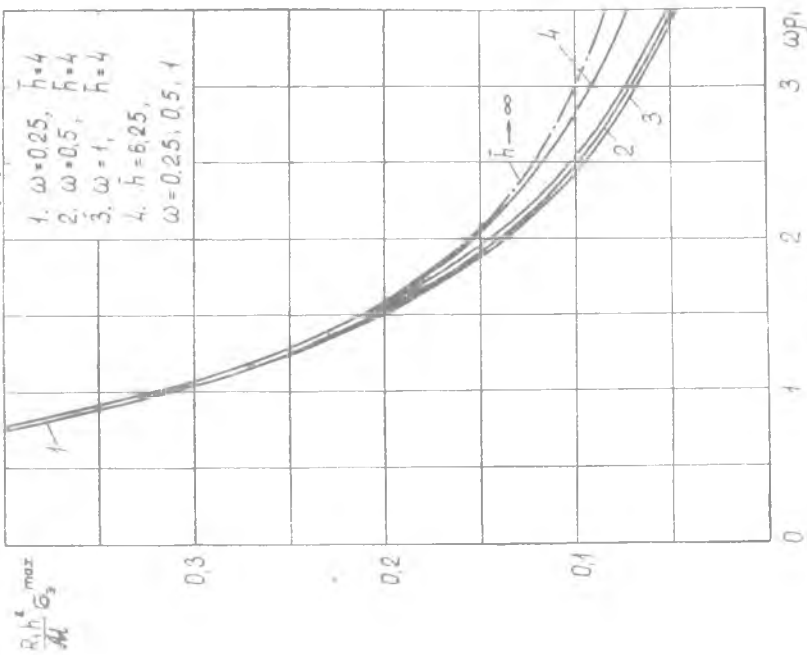


Фиг. 8.



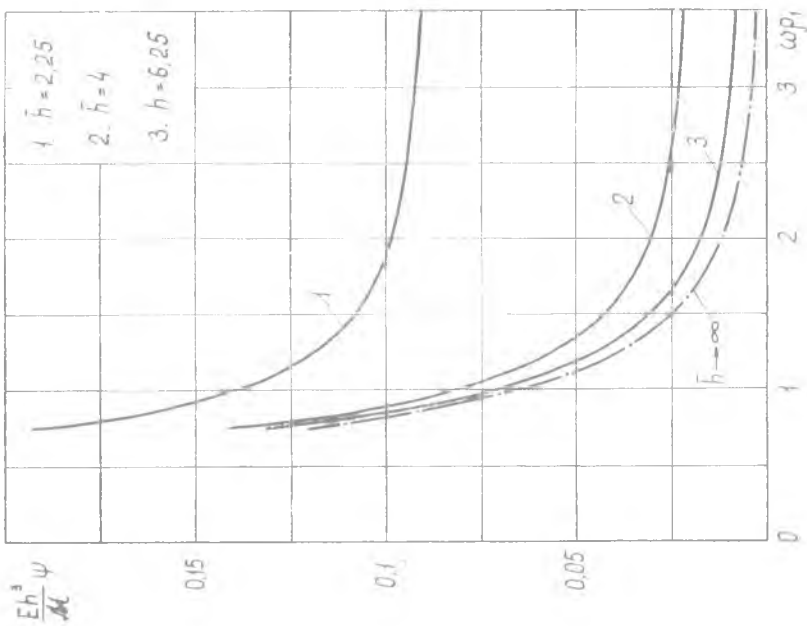
Фиг. 7.

Напряжения в оболочке при $\rho = r_1$



Фиг. 9

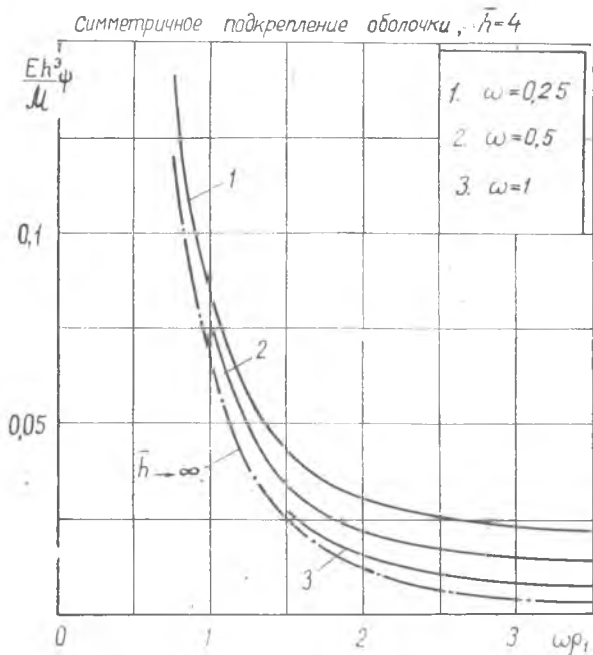
Симметричные подкрепленные оболочки, $\omega = 0.25$



Фиг. 10

кривых 1÷3, особенно при относительно широком подкреплении, т. е. в этом случае для оценки наибольших напряжений в кольце можно пользоваться графиками работы [2].

На фиг. 8 представлена зависимость σ_3^{\max} в оболочке от наружного радиуса накладки при небольшой ее толщине ($\bar{h}=2,25$). Из графиков видно, что на величине напряжений существенно сказывается значение параметра ω . При некоторых значениях ω_1 наибольшими оказываются напряжения на наружной поверхности оболочки (для положительных ξ —сплошные линии), при других же — на внутренней (штриховые линии).



В случае $\bar{h}=4$ и более максимальными для положительных ξ оказываются эквивалентные напряжения на наружной поверхности оболочки. При равных значениях наружного радиуса накладки они, как видно из фиг. 9, мало зависят от ω , а для $\bar{h}=6,25$ кривые, соответствующие различным значениям параметра ω (0,25; 0,5; 1), практически совпадают.

Штрихпунктирные линии на фиг. 8 и 9 характеризуют σ_3^{\max} в неподкрепленной оболочке толщиной h с жесткой шайбой радиуса R_1 ($\bar{h} \rightarrow \infty$). Сопоставление кривых, приведенных на этих графиках, показывает, что пренебрежение упругостью накладки может привести к существенной погрешности в значениях напряжений в оболочке, правда, в запас прочности. Так, при $\bar{h}=4$ и $\omega r_1=3,5$

она достигает 60% и падает по мере уменьшения наружного радиуса накладки. При $\bar{h}=6,25$ погрешность уже не превышает 15%.

На фиг. 10 представлена зависимость угла поворота шайбы ψ от наружного радиуса накладки при $\omega=0,25$ для различных значений \bar{h} (симметричное подкрепление оболочки), а на фиг. 11 — при $\bar{h}=4$ и различных ω . Штрихпунктирными линиями нанесены графики для неподкрепленной оболочки толщиной h с жесткой шайбой радиуса R_1 ($\bar{h} \rightarrow \infty$). Сопоставление кривых показывает что пренебрежение упругостью накладки при исследовании жесткости системы приводит к погрешности, которая относительно не велика при малой ширине накладки и уменьшается с ростом ее толщины и параметра ω . Так, при $\omega(\rho_1-1)=0,5$ ошибка в значении угла ψ составляет 25÷55%, для $\bar{h}=2,25$, 12÷14% для $\bar{h}=4$ и 6÷6,5% для $\bar{h}=6,25$. По мере увеличения ширины накладки ошибка быстро нарастает. При $\omega(\rho_1-1)=2,5$ и $\bar{h}=4$, например для углов ψ получаются заниженные в 3÷5 раз результаты.

По сравнению с симметричным подкреплением оболочки внутренняя накладка (фиг. 3а) дает некоторое увеличение углов ψ (не более, чем на 10%), а наружная (фиг. 3б) — уменьшение того же порядка.

Сопоставление результатов расчета с данными работы [2] показывает, что для $\bar{h}=4$ и $R_1=3R_0$, например, величина $\sigma_{\theta}^{ма}$ в оболочке снижается по сравнению с неподкрепленной оболочкой при $\omega=0,25$ в 5,7 раза, при $\omega=0,5$ — в 8 раз и при $\omega=1$ — в 13 раз. Для тех же параметров накладки угол поворота шайбы ψ уменьшается по сравнению с неподкрепленной оболочкой при $\omega=0,25$ в 4,7 раза, при $\omega=0,5$ — в 7,7 раза и при $\omega=1$ — в 8 раз. При фиксированных h и R_0 параметр ω зависит только от R . Таким образом, можно сделать вывод, что кривизна оболочки существенно влияет на эффект от ее подкрепления.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Лурье. Статика тонкостенных оболочек. Гостехиздат, М.—Л., 1947.
2. Х. С. Хазанов. Напряженное состояние круговой цилиндрической оболочки, нагруженной моментом через абсолютно жесткую круглую шайбу. Труды КуАИ, вып. 39, 1968.
3. Х. С. Хазанов. К расчету цилиндрических оболочек с круглыми отверстиями. Труды КуАИ, вып. 29, 1967.
4. Х. С. Хазанов. Напряженное состояние цилиндрической оболочки с подкрепленным отверстием. Труды КуАИ, вып. 39, 1968.
5. Х. С. Хазанов. К изгибу искривленных круглых пластин. Труды КуАИ, вып. 39, 1968.