КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА
*Труды, выпуск XXXIX, 1968 г.*
Вопросы прочности элементов авиационных конструкций

**Б. А. ЛАВРОВ, В. А. МЕХЕДА**

# НАКОПЛЕНИЕ УСТАЛОСТНЫХ ПОВРЕЖДЕНИЙ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ НАГРУЗКАХ

Разрушение конструкций при действии случайных нагрузок связано с постепенным накоплением усталостных повреждений. К настоящему времени предложено довольно много различных теорий и гипотез о характере накопления усталостных повреждений. Детальный обзор этих теорий приводится в работах В. В. Болотина [1] и С. В. Серенсена [5]. Многочисленность теорий свидетельствует о важности и сложности проблемы. Так, имея хорошо проверенную опытным путем теорию, можно судить о долговечности конструкций при различных видах нагружения. Следует отметить, что в некоторых работах [8, 9] были сделаны попытки применения теорий накопления повреждений к ускоренным испытаниям на усталость. Это может быть оправдано лишь в случае экспериментального подтверждения этих теорий. В предлагаемой статье приводятся результаты опытной проверки применимости некоторых теорий накопления усталостных повреждений к оценке долговечности образцов при случайных нагрузках. Экспериментальные данные взяты из работы [7].

## Применение линейной теории к оценке долговечности образцов

Линейный закон накопления повреждений записывается в виде

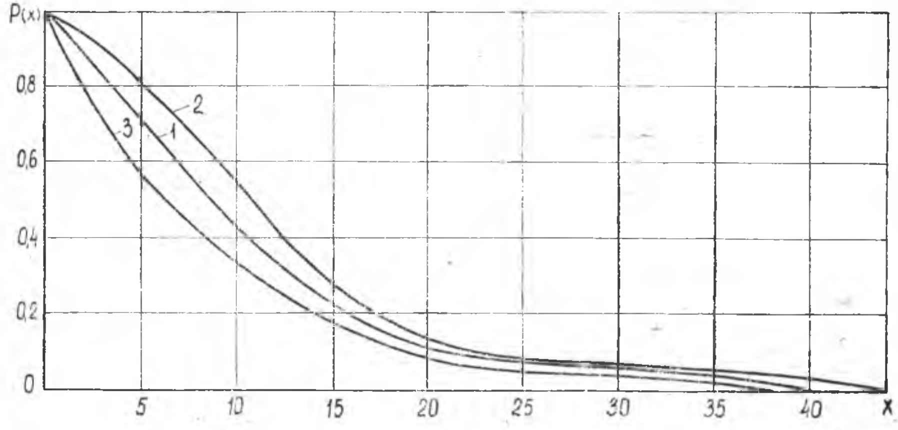
$$\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{N_i} = 1, \tag{1}$$

где $n_i$ — число циклов $i$-той амплитуды напряжения, а $N_i$ число циклов до разрушения при действии только $i$-той амплитуды напряжения.

Для применения линейной теории к оценке долговечности образцов при случайном нагружении преобразуем формулу (1) к виду

$$N_{\text{т}} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{p_i}{N_i}} \, . \tag{2}$$

Здесь $N_{\text{т}}$—теоретическая долговечность, а $p_i$—относительная длительность данной амплитуды, которая определяется по соответствующей функции распределения. Значения $N_i$ берутся по кривой усталости при гармоническом нагружении. Нами эти величины были взяты из работы [7]. Для определения $p_i$ диапазон изменения случайной переменной разбивается на $\kappa$ интервалов (в нашем случае $\kappa = 16$) и затем по функции распределения находятся значения $p_i$ в каждом интервале. На фиг. 1 приведены функции




*Фиг. 1.*

распределения максимальных пик между точками пересечения нулевого уровня кривой нагружения, построенные по результатам статистической обработки записей процессов, для трёх форм спектральной плотности [7].

Сравнение теоретических значений долговечности с экспериментальными будет дано ниже.

### Применение нелинейных теорий накопления усталостных повреждений к оценке долговечности образцов

А. Фрейденталь [16], рассматривая проблему накопления повреждений с физической, вероятностной и статистической точек зрения, получил формулу

$$N_{\text{т}}^{\alpha} = \frac{1}{\sum\limits_{i} \Omega_i \frac{p_i}{N_i}} \, , \tag{3}$$

где $\alpha$ — показатель степени, характеризующий нелинейность накопления повреждения, а $\Omega_i$ — эмпирический «фактор взаимодействия» между амплитудами напряжений при случайном нагружении.

Значения $\alpha$ и $\Omega_i$ определялись по экспериментальным данным [7] методом наименьших квадратов и приведены в таблице 1.

*Таблица 1*

| Материал | Форма спектра | $\alpha$ | $\Omega_i$ |
|---|---|---|---|
| Д16АТ | 1 | 0,7451 | $2{,}58 \cdot 10^{-2}$ |
| | 2 | 0,8201 | $1{,}525 \cdot 10^{-1}$ |
| | 3 | 3,2654 | $2{,}265 \cdot 10^{-2}$ |
| 30ХГСА | 1 | 0,5306 | $2{,}84 \cdot 10^{-3}$ |

Из таблицы 1 видно, что $\alpha$ и $\Omega_i$ зависят от спектра случайной нагрузки и определение их значений без эксперимента невозможно. Поэтому предложенная Фрейденталем зависимость (3) по существу является аппроксимацией уже имеющихся экспериментальных данных и для теоретического расчета долговечности при случайном нагружении вряд ли приемлема.

Г. Кортен и Т. Доллан [4], считая, что повреждение характеризуется числом образующихся зародышей трещин и скоростью распространения последних, предложили степенной закон накопления повреждений в виде

$$D = m \cdot r \cdot N^a, \tag{4}$$

где $m$ — число зародышей повреждения, являющееся функцией уровня напряжения; $r$ — коэффициент скорости распространения повреждения, являющийся также функцией уровня напряжения; $a$ — показатель степени, характеризующий распространение повреждения. Для определения долговечности при программном или случайном нагружениях ими получено следующее выражение:

$$N_т = \frac{N_1}{\alpha_1 + \alpha_2\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^d + \alpha_3\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right)^d + \cdots + \alpha_i\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_1}\right)^d}, \tag{5}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_i$ — процентная доля числа циклов напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots \sigma_i$; $d$ — показатель степени, определяемый из эксперимента, $N_1$ — число циклов до разрушения при действии напряжений с максимальной амплитудой $\sigma_1$.

Для определения показателя степени $d$ в уравнении (5) необходимо провести испытания при одноступенчатом режиме нагружения. При таком нагружении долговечность определяется по формуле

$$N = \frac{N_1}{\alpha + R^{\frac{1}{a}}(1-\alpha)}. \quad (6)$$

Здесь $N_1$ — число циклов до разрушения при действии амплитуды высокого напряжения $\sigma_1$; $\alpha$ — процентная доля напряжения $\sigma_1$; $R$ — коэффициент распространения повреждений, зависящий от напряжения.

По результатам испытаний определяются величины $N$, а из формулы (6) — значения $R^{\frac{1}{a}}$. Коэффициент распространения повреждений $R$ связан с напряжением $\sigma_1$ и $\sigma_2$ зависимостью

$$R^{\frac{1}{a}} = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^d. \quad (7)$$

Из этого условия находятся значения $d$.

Нами были проведены испытания плоских образцов с концентратором в виде отверстия при одноступенчатом нагружении и для 30ХГСА среднее значение $d$ получилось равным 2,3, а для Д16АТ — 2,94. Результаты расчета теоретической долговечности при случайных нагрузках по формуле (5) для этих значений $d$ представлены на фиг. 4—7. Для образцов из 30ХГСА вычислялась также долговечность при максимальном значении $d = 4{,}274$.

Р. Гэттс [2,3] предложил для повреждающего действия случайной нагрузки дифференциальное уравнение

$$\frac{d\sigma_{\text{оп}}}{dn} = -k(\sigma - \sigma_{\text{оп}})^2, \quad (8)$$

где $\sigma_{\text{оп}}$ — предел выносливости при данном числе циклов (имеется в виду, что по мере накопления усталостных повреждений величина предела выносливости снижается); $\sigma$ — амплитуда напряжения рассматриваемого цикла; $\kappa$ — некоторая постоянная.

Уравнение (8) описывает снижение предела выносливости за один цикл. Это уравнение при гармоническом нагружении приводится к безразмерному виду

$$GL = \frac{1}{\gamma - 1} - \frac{1}{\gamma(1-C)}, \quad (9)$$

который дает математическое описание кривой усталости. Здесь $G = \kappa\sigma_{-1} N^*$, $\sigma_{-1}$ — предел выносливости; $\gamma = \frac{\sigma_{\text{оп}}}{\sigma_{-1}}$, $L = \frac{N}{N^*}$; $N^*$ — долговечность, определяемая по экспериментальным данным при напряжении $\sigma^*$. Для использования уравнения (9) необходимо знать временное сопротивление $\sigma_{\text{в}}$, предел усталости $\sigma_{-1}$, постоянные $\kappa$ и $C$.

Для определения $\sigma_{\text{в}}$ нами были испытаны на разрывной машине специальные образцы из Д16АТ с концентратом в виде отверстия. Всего было испытано 52 образца. При этом среднее значение $\sigma_в$ оказалось равным $42{,}5 \frac{дан}{мм^2}$. Временное сопротивление образцов из 30ХГСА определялось по замеру твердости в шести точках каждого образца, причем среднее значение получилось равным $117{,}6 \frac{дан}{мм^2}$. Величина предела выносливости для 30ХГСА $\sigma_{-1} = 20 \frac{дан}{мм^2}$ взята из наших экспериментов [7], а для Д16АТ принималась равной $2 \frac{дан}{мм^2}$*. Зная $C = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_в}$ и задаваясь по данным испытаний при гармоническом нагружении величинами $\sigma^*$ и $N^*$, можно по формуле (9) определить постоянную $\kappa$. Результаты расчета приведены в таблице 2.

*Таблица 2*

| Материал | $\sigma_{-1}$ $\left[\frac{дан}{мм^2}\right]$ | $\sigma^*$ $\left[\frac{дан}{мм^2}\right]$ | $N^* 10^{-5}$ циклов | $\gamma^* = \frac{\sigma^*}{\sigma_{-1}}$ | $C = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_в}$ | $\kappa \cdot 10^8$ $\left[\frac{мм^2}{дан\text{-}цикл}\right]$ | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Д16АТ | 2 | 13,7 | 2,742 | 6,85 | 0,0471 | 3,25 | 0,0178 |
| 30ХГСА | 20 | 50 | 1,593 | 2,5 | 0,17 | 5,81 | 0,185 |

Математическое ожидание снижения предела выносливости за один цикл случайной нагрузки описывается выражением

$$\frac{d\sigma_{оп}}{dn} = -k \int_{\sigma_{min}}^{\sigma_{max}} p(\sigma)(\sigma - \sigma_{оп})^2\, d\sigma, \qquad (10)$$

где $p(\sigma)$ — функция плотности вероятности, которая определялась по записи случайного процесса. При интегрировании учитываются только те значения напряжения, для которых $\sigma > \sigma_{оп}$.

Разделяя переменные в уравнении (10) и интегрируя, получим

$$N = -\frac{1}{k} \int_{\sigma_{-1}}^{C\sigma_{max}} \frac{d\sigma_{оп}}{\int_{\sigma_{min}}^{\sigma_{max}} p(\sigma)(\sigma - \sigma_{оп})^2\, d\sigma}. \qquad (11)$$

Значения параметров $C$ и $\kappa$ берем из таблицы 2.

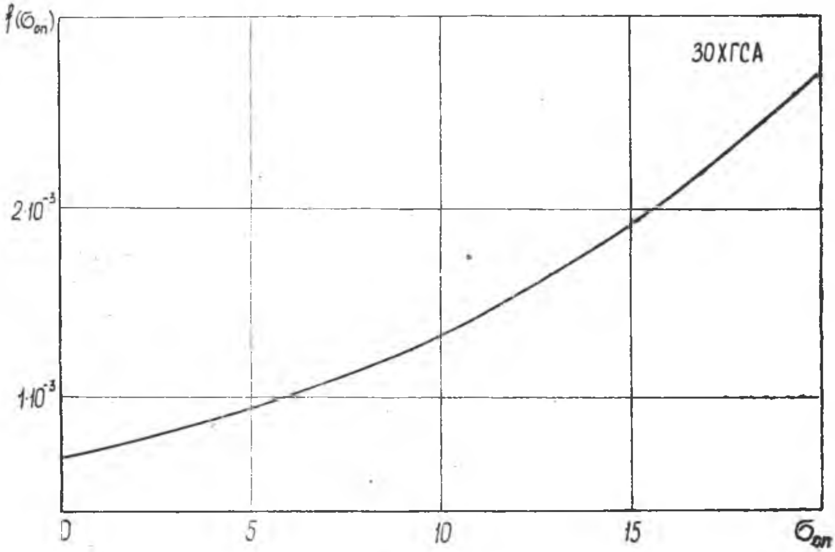
---

* Для материалов, не имеющих физического предела выносливости, Гэттс рекомендует выполнить расчет для различных значений $\sigma_{-1}$ и выбрать наиболее подходящий. Нами были проведены расчеты для $\sigma_{-1} = 10$; и $2 \frac{дан}{мм^2}$. Лучшие результаты получены для $\sigma_{-1} = 2 \frac{дан}{мм^2}$.

Для практического определения долговечности с учетом снижения предела выносливости следует сначала построить зависимость значений функции

$$f(\sigma)_{\text{оп}} = \frac{1}{\int\limits_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} p(\sigma)\,(\sigma - \sigma_{\text{оп}})^2\, d\sigma} \tag{12}$$

от предела выносливости. При интегрировании нижний предел принимается не ниже $\sigma_{\text{оп}}$. Как пример на фиг. 2 показана зави-

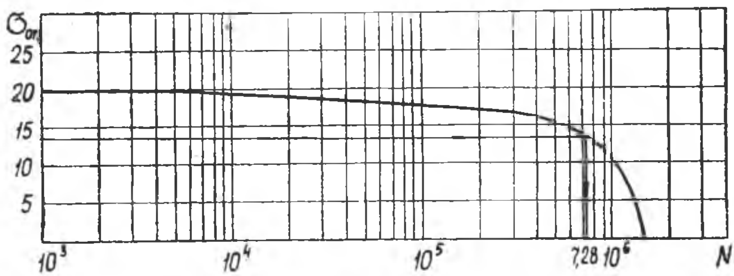



*Фиг. 2.*

симость (12) для образцов из 30ХГСА при $\sigma_{\max} = 80\ \frac{дан}{мм^2}$. Разрушение происходит, когда предел прочности снизится до величины $\sigma_{\max}$, причем считается, что предел выносливости пропорционален пределу прочности. Так как нагрузка имеет случайный характер, то следует ожидать, что разрушение произойдет после $N + m$ циклов, где $m$ — число циклов, соответствующее 50%-ной вероятности появления $\sigma_{\max}$. В наших экспериментах вероятность появления $\sigma_{\max}$ была относительно высока и $m \ll N$, вследствие чего им можно пренебречь.

Результаты численного интегрирования функции (12) показаны на фиг. 3. Верхний предел интегрирования С $\sigma_{\max} = 13\frac{дан}{мм^2}$. Этому пределу соответствует долговечность $N = 7{,}28 \cdot 10^5$ циклам.

На фиг. 4—7 нанесены расчетные значения долговечности, полученные по различным теориям накопления усталостных повреждений, и экспериментальные результаты [7] (кривая *1* — экспе-




*Фиг. 3.*

риментальная, кривые *2—5* — теоретические: *2* — по Кортену и Доллану, *3* — линейный закон, *4* — по Фрейденталю, *5* — по Гэттсу). При построении кривых за максимальное напряжение $\sigma$ случайного нагружения принималось напряжение, равное трем среднеквадратичным отклонениям, а за число циклов до разрушения $N$ — половина числа нулевых ординат на кривой нагружения. Количество условных циклов в секунду для первой, второй и третьей форм спектральной плотности равнялось соответственно 12,75; 11,75 и 7,95.

Из рассмотрения фиг. 4 — 7 видно, что линейный закон и теория Кортена и Доллана дают значительные отклонения от экспериментальных результатов. В зависимости от характера нагружения и материала эти отклонения могут быть как в сторону завышения, так и в сторону занижения долговечности.

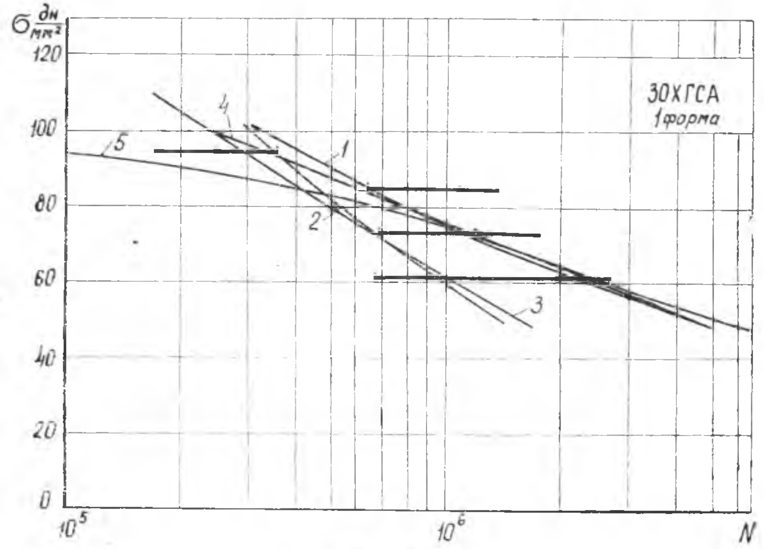
Теория Фрейденталя приводит к хорошему совпадению расчётных и опытных данных, но определение величин $\alpha$ и $\Omega_i$ без эксперимента при случайном нагружении невозможно.

Теория Гэттса даёт вполне удовлетворительную оценку средней долговечности.

## ВЫВОДЫ

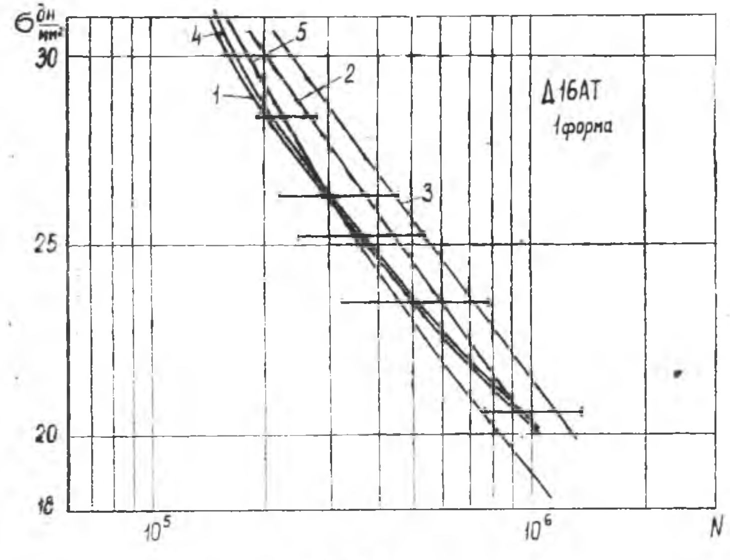
1. Линейный закон, теория Кортена и Доллана могут применяться лишь для грубой оценки долговечности при случайном нагружении.

2. Предложенная Фрейденталем зависимость (3) по существу является аппроксимацией уже имеющихся экспериментальных данных и по этой причине для теоретических расчётов долговечности не может быть применена.



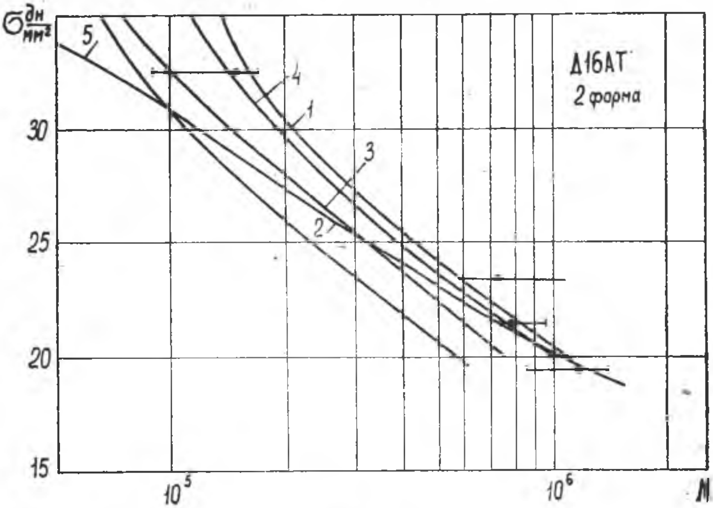
$\sigma \frac{дн}{мм^2}$
120
100
80
60
40
20
0
$10^5$
$10^6$
N
30ХГСА
1 форма
1
2
3
4
5


Фиг. 4.



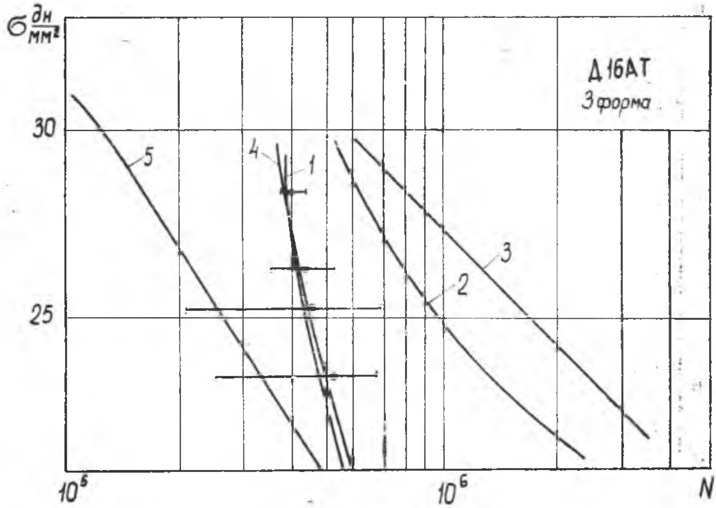
$\sigma \frac{дн}{мм^2}$
30
25
20
18
$10^5$
$10^6$
N
Д16АТ
1 форма
1
2
3
4
5


Фиг. 5.



$\sigma \frac{дн}{мм^2}$
Д16АТ
2 форма
30
25
20
15
$10^5$
$10^6$
N
1
2
3
4
5


*Фиг. 6.*



$\sigma \frac{дн}{мм^2}$
Д16АТ
3 форма
30
25
$10^5$
$10^6$
N
1
2
3
4
5


*Фиг. 7.*

3. Нелинейная теория Гэттса даёт вполне удовлетворительную оценку средней долговечности и может быть использована для теоретических расчётов долговечности при случайном нагружении.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. В. В. Болотин, И. И. Гольденблат, А. Ф. Смирнов. Современные проблемы строительной механики, Москва, 1964.
2. Р. Р. Гэттс. Применение понятия кумулятивного повреждения к проблеме усталости. Труды американского общества инженеров-механиков (русский перевод). Журнал «Техническая механика» т. 83, серия Д, № 4, ИЛ, 1961.
3. Р. Р. Гэттс. Кумулятивное усталостное повреждение при случайном нагружении. Труды американского общества инженеров-механиков (русский перевод), Журнал «Техническая механика», т. 84, серия Д, № 4, ИЛ, 1961.
4. Г. Г. Кортен, Т. Дж. Доллан. Суммирование усталостных повреждений, Сб. «Усталость металлов» под. ред. Г. В. Ужика, ИЛ, 1961.
5. С. В. Серенсен. Накопление усталостного повреждения при нестационарной напряженности. Сб. «Вопросы механической усталости», Москва, 1964.
6. А. М. Фрейденталь, Р. А. Геллер. Накопление усталостных повреждений. Сб. «Усталость самолетных конструкций» под ред. И. И. Эскина, Оборонгиз, 1961.
7. Х. С. Хазанов, Б. А. Лавров, В. И. Иванченко, М. А. Петровичев. Исследование влияния формы спектральной плотности стационарной случайной нагрузки на усталостную прочность образцов на сплава Д16АТ и стали 30ХГСА. Труды КуАИ, вып. 29, 1967.
8. R. R. Gatts. Cumulative fatigue damage with progressive loading. «The American Society of Mechanical Engineers», NWA—292, 1962.
9. I. I. Coleman, Methods of estimating fatique—curve parameters with a limited number of specimens. «Iournal of the Acoustical Society of Amarica,» v. 35, N 6, 1963, p. p. 817—820.