

В.Я. Логунов

МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ ЭЛЕМЕНТА КРИВОГО БРУСА

Среди задач, которые приходится решать конструкторам при проектировании авиационных конструкций, значительное место занимают задачи, связанные с расчетом оболочек вращения, сопряженных с конструктивными элементами типа шпангоутов. При этом нередко в целях снижения веса шпангоуты имеют не постоянное, а переменное сечение. Однако получение аналитических решений для шпангоутов переменного сечения сопряжено с большими трудностями; окончательные формулы имеют громоздкий вид и малопригодны для расчетов. Более удобным оказывается решение, основанное на использовании метода конечных элементов, который позволяет достаточно просто решать многие задачи по расчету не только отдельно взятых конструктивных элементов подобного типа, но и произвольных, включающих в себя указанные элементы конструкций. Шпангоут в этом случае можно представить набором конечных элементов, в пределах каждого из которых площадь поперечного сечения постоянна. Здесь следует отметить, что для нагрузок, действующих в плоскости кривого бруса, матрица жесткости получена в работе [1]. В статье [2] дан вывод матрицы жесткости элемента кривого бруса с нерастяжимой осью от сил и моментов, действующих из его плоскости, основанный на применении теоремы Кастилиано. Указывается, что в этом случае матрица жесткости, "по-видимому, не существует в явной замкнутой форме". В настоящей статье рассматривается получение матрицы жесткости элемента кривого бруса с учетом растяжимости осевой линии при пространственном нагружении в явном виде. На рис. 1 указаны положительные направления и обозначения перемещений U_x , U_y , U_z точек осевой линии, углов поворотов θ_x , θ_y , θ_z сечения; а также усилий и моментов, возникающих в поперечном сечении круго-

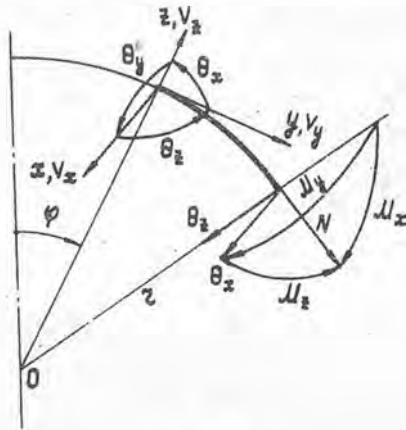


Рис. 1

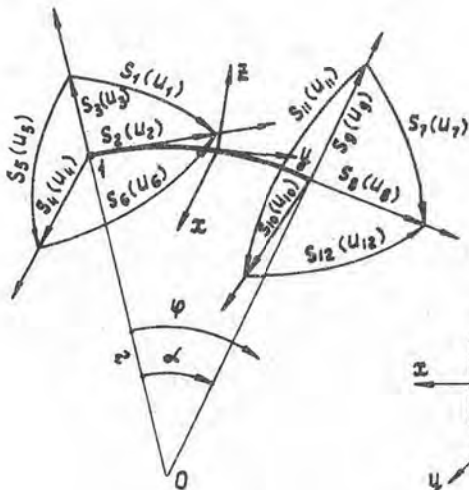


Рис. 2

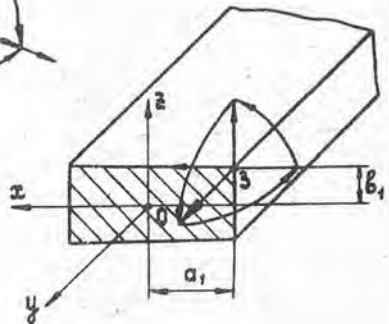


Рис. 3

вого кольца радиуса r . Через x, y, z обозначена подвижная прямоугольная система координат, а через φ — угловая координата точки осевой линии.

Формирование матрицы жесткости базируется на использовании решений однородных дифференциальных уравнений равновесия тонкого кругового кольца относительно перемещений точек осевой линии U_x, U_y, U_z , которые в соответствии с [3] можно записать в форме

$$U_x = A_7 \sin \varphi + A_8 \cos \varphi + A_9 \varphi \cos \varphi + A_{10} \varphi \sin \varphi + A_{11} \varphi + A_{12} \quad (1)$$

$$U_y = A_1 \sin \varphi + A_2 \cos \varphi + A_3 \varphi \cos \varphi + A_4 \varphi \sin \varphi + A_5 \varphi + A_6 \quad (2)$$

$$U_z = -A_1 \cos \varphi + A_2 \sin \varphi + A_3 \left(\varphi \sin \varphi - \frac{1-\nu}{1+\nu} \cos \varphi \right) - A_4 \left(\varphi \cos \varphi + \frac{1-\nu}{1+\nu} \sin \varphi \right) - A_5, \quad (3)$$

где $\nu = \frac{B_x}{r^2 \cdot B}$, A_1, A_2, \dots, A_{12} — постоянные интегрирования, которые подлежат определению из граничных условий.

Располагая решениями (1) — (3) и пользуясь известными соотношениями теории тонкого кругового кольца для случая, когда оси x, z — главные центральные оси инерции поперечного сечения [3], [4], можно получить выражения для усилий и углов поворота сечения; эти выражения будут также содержать 12 постоянных интегрирования A_i .

Перейдем к рассмотрению конечного элемента, который показан на рис. 2. На данном рисунке через $u_1 - u_{12}$ обозначены узловые перемещения точек осевой линии концов элемента в местной системе координат, положительные направления осей которой совпадают с положительными направлениями подвижной координатной системы x, y, z . Там же через $S_1 - S_{12}$ обозначены узловые силы, действующие в сечениях на концах элемента и отнесенные к точкам его осевой линии. Положительные направления узловых сил и узловых перемещений (линейных и угловых) указаны на рисунке стрелками; α — угол охвата дуги.

Приравняем перемещения U_x, U_y, U_z , определяемые соотношениями (1) — (3), а также соответствующие им выражения для углов поворота $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ к узловым их значениям в сечениях $\varphi=0$ и $\varphi=\alpha$. Это приведет к системе 12 уравнений относительно постоянных интегрирования вида

$$u = RA, \quad (4)$$

где

$u = \{u_1, u_2, \dots, u_{12}\}$, $A = \{A_1, A_2, \dots, A_{12}\}$ - матрицы-столбцы.

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \\ R_3 & 0 \\ 0 & R_4 \end{bmatrix} \quad - \text{квадратная матрица.}$$

Подматрицы $R_1 \div R_4$ имеют вид

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{z(1+v)} & 0 & \frac{1}{z} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -\frac{1-v}{1+v} & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{z} & 0 & -\frac{2z}{z(z+1)} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{z} & 0 & -\frac{1}{z} & 0 & -\frac{1}{z} & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{2 \sin \alpha}{z(1+v)} & \frac{2 \cos \alpha}{z(1+v)} & \frac{\alpha}{z} & \frac{1}{z} \\ \sin \alpha & \cos \alpha & \alpha \cdot \cos \alpha & \alpha \cdot \sin \alpha & \alpha & 1 \\ -\cos \alpha & \sin \alpha & -\frac{1-v}{1+v} \cos \alpha + \alpha \sin \alpha & -\frac{1-v}{1+v} \sin \alpha + \alpha \cos \alpha & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_4 = \begin{bmatrix} \sin \alpha \cos \alpha & \alpha \cos \alpha & \alpha \sin \alpha & \alpha & 1 \\ \frac{\sin \alpha}{r} & \frac{\cos \alpha}{r} & \frac{2\alpha \sin \alpha}{r(\alpha+1)} + \frac{\alpha \cos \alpha}{r} & -\frac{2\alpha \cos \alpha}{r(\alpha+1)} + \frac{\alpha \sin \alpha}{r} & 0 & 0 \\ -\frac{\cos \alpha}{r} & \frac{\sin \alpha}{r} & -\frac{\cos \alpha}{r} + \frac{\alpha \sin \alpha}{r} & -\frac{\sin \alpha}{r} - \frac{\alpha \cos \alpha}{r} & -\frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix}$$

Аналогичным образом, приравнявая выражения для усилий к их узловым значениям в сечениях $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$, получим следующую зависимость:

$$S = TA, \quad (5)$$

где

$$S = \{S_1, S_2, \dots, S_{12}\} \quad - \text{ матрица-столбец;}$$

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \\ T_3 & 0 \\ 0 & T_4 \end{bmatrix} \quad - \text{ квадратная матрица}$$

Подматрицы $T_1 \div T_4$ записываются следующим образом:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{B \cdot B_x}{r^2} & 0 & -\frac{B_x}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{B \cdot B_x}{r^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{B \cdot B_x}{r^3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{B_z}{\alpha r^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha B_z}{r^2} & 0 & \frac{B_z}{\alpha r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha B_z}{r^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\beta B_x \cos \alpha}{r^2} & -\frac{\beta B_x \sin \alpha}{r^2} & \frac{\beta x}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta B_x \cos \alpha}{r^3} & \frac{\beta B_x \sin \alpha}{r^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta B_x \sin \alpha}{r^3} & -\frac{\beta B_x \cos \alpha}{r^3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{B_z}{\alpha r^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a B_z \cos \alpha}{r^2} & \frac{a B_z \sin \alpha}{r^2} & -\frac{B_z}{\alpha r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a B_z \sin \alpha}{r^2} & -\frac{a B_z \cos \alpha}{r^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

В матрицах R и T введены обозначения:

$$\alpha = \frac{B_z}{C}, \quad a = \frac{2}{1 + \alpha}, \quad \beta = \frac{1}{1 + \nu};$$

$$B = EF, \quad B_x = EJ_x, \quad B_z = EJ_z, \quad C = GJ_{кр}.$$

жесткости сечения кривого бруса на растяжение, изгиб и кручение. Выразив из (4) постоянные интегрирования через узловые перемещения и подставив их в (5), будем иметь

$$S = TR^{-1}u = Ku, \quad (6)$$

где $K = TR^{-1}$ - матрица жесткости элемента кривого бруса при пространственном нагружении.

Если узел находится не на осевой линии элемента, а, например, в точке 3 (рис.3), то можно показать, что матрица жесткости в этом случае будет определяться выражением

$$\bar{K} = F^T K F, \quad (7)$$

где

$$F = \left[\begin{array}{c|c} F_1 & 0 \\ \hline 0 & F_2 \end{array} \right], \quad F_1 = F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Л и т е р а т у р а

1. Martin H.C. *Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1966.
2. Lee H.P. *Generalized Stiffness Matrix of a Curved-Beam Element*, *AJAA, Journal*, N10, 1969.
3. Ахмедьянов И.С. Расчет кругового кольца на произвольную пространственную нагрузку. В сб. "Вопросы прочности элементов авиационных конструкций", Труды КуАИ, вып. 48, 1971.
4. Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К., Макушин В.И., Малинин Н.Н., Феодосьев В.И. *Расчеты на прочность в машиностроении*. т.Ш, Машгиз, 1959.