

И. С. АХМЕДЬЯНОВ

## К РАСЧЕТУ ТОРООБРАЗНОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ НАГРУЖЕНИИ

### Принятые обозначения:

- $\theta$  — угол между осью вращения торообразной оболочки и нормалью к ее срединной поверхности;  
 $R$  — радиус кривизны меридиана оболочки;  
 $r_0$  — расстояние центра кривизны меридиана до оси вращения оболочки;  
 $\delta$  — толщина оболочки;  
 $\phi$  — угол поворота нормали к срединной поверхности;  
 $E$  — модуль упругости материала оболочки;  
 $\mu$  — коэффициент Пуассона;  
 $N_1, N_2$  — нормальные усилия;  
 $Q$  — поперечная сила;  
 $M_1, M_2$  — изгибающие моменты (положительны при растяжении наружной поверхности оболочки).

$$k = \frac{r_0}{R}, \lambda^2 = 12(1 - \mu^2) \frac{R^2}{\delta^3} - \mu^2, D = \frac{E\delta^3}{12(1 - \mu^2)}$$

В статье излагается метод расчета торообразных оболочек, нагруженных равномерным внутренним давлением и осевой силой. Метод основан на применении степенных рядов для получения решений основного разрешающего уравнения осесимметричного изгиба торообразной оболочки. В работе общий интеграл этого уравнения представлен через степенные ряды, записанные в форме, удобной для вычислений на электронных вычислительных машинах. Получены расчетные формулы для определения внутренних усилий и моментов.

Уравнения осесимметричного изгиба торообразной оболочки можно получить, исходя из общих уравнений моментной теории оболочек вращения при осесимметричном нагружении [1]. Эти

уравнения применительно к торообразной оболочке можно свести к одному разрешающему уравнению второго порядка.

$$L(\sigma) + i\lambda\sigma = F(\Theta) \quad (1)$$

относительно комплексной функции

$$\sigma = V + i \frac{D}{R} (\mu - i\lambda) \vartheta. \quad (2)$$

Здесь

$$V = RQ \frac{k + \sin \Theta}{\sin \Theta} \quad (3)$$

и

$$L = \frac{k + \sin \Theta}{\sin \Theta} \frac{d^2}{d\Theta^2} + \operatorname{ctg} \Theta \frac{d}{d\Theta} - \frac{\cos \Theta \operatorname{ctg} \Theta}{k + \sin \Theta}.$$

Если оболочка нагружена равномерно распределенным давлением  $p$  и осевой силой  $P$ , то правая часть уравнения (1) будет иметь вид [1]:

$$F(\Theta) = \frac{k p R^2}{2} \frac{\operatorname{ctg} \Theta}{k + \sin \Theta} - \frac{k P}{2\pi} \frac{(2k + 3 \sin \Theta) \cos \Theta}{(k + \sin \Theta) \sin^4 \Theta}. \quad (4)$$

Если  $\sigma = \sigma(\Theta)$  — решение уравнения (1), удовлетворяющее заданным граничным условиям, то внутренние усилия и моменты в оболочке могут быть найдены по следующим формулам:

$$N_1 = \frac{pR}{2} \left[ 1 + \frac{k}{k + \sin \Theta} - \frac{(2k + \sin \Theta_0) \sin \Theta_0}{(k + \sin \Theta) \sin \Theta} \right] + \frac{P}{2\pi R(k + \sin \Theta) \sin \Theta} + \frac{\cos \Theta}{k + \sin \Theta} \frac{V}{R}, \quad (5)$$

$$N_2 = \frac{pR}{2} \left[ 1 + \frac{(2k + \sin \Theta_0) \sin \Theta_0}{\sin^2 \Theta} \right] - \frac{P}{2\pi R \sin^2 \Theta} + \frac{1}{R} \frac{dV}{d\Theta}, \quad (6)$$

$$M_1 = D(x_1 + i\mu x_2), \quad M_2 = D(x_2 + i\mu x_1), \quad (7)$$

$$x_1 = \frac{1}{R} \frac{d\vartheta}{d\Theta}, \quad x_2 = \frac{\cos \Theta}{k + \sin \Theta} \frac{\vartheta}{R}. \quad (8)$$

Обратимся к интегрированию уравнения (1), в котором правая часть определяется выражением (4). Следуя В. И. Феодосьеву [2], введем новую искомую функцию  $\tau$ , связанную с  $\sigma$  зависимостью

$$\sigma = \frac{\tau}{k + \sin \Theta} - \frac{kP}{2\pi} \frac{\operatorname{ctg} \Theta}{k + \sin \Theta}. \quad (9)$$

Тогда уравнение (1) упростится и запишется следующим образом:

$$(k + \sin \Theta) \tau'' - \tau' \cos \Theta + (1 + i\lambda) \tau \sin \Theta = \left[ \frac{k p R^2}{2} + (1 + i\lambda) \frac{k P}{2\pi} \right] \cos \Theta. \quad (10)$$

Перейдем далее в полученном уравнении к новому аргументу  $\alpha$  (фиг. 1)

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \Theta.$$

Уравнение (10) при этом преобразуется к виду

$$\begin{aligned} (k + \cos \alpha) \frac{d^2 \tau}{d\alpha^2} + \sin \alpha \frac{d\tau}{d\alpha} + (1 + i\lambda) \tau \cos \alpha = \\ = \left[ \frac{kPR^2}{2} + (1 + i\lambda) \frac{kP}{2\pi} \right] \sin \alpha. \end{aligned} \quad (11)$$

Наконец, подстановка

$$x = \sin \frac{\alpha}{2}$$

переводит уравнение (11) в следующее:

$$\begin{aligned} (k + 1 - 2x^2)(1 - x^2) \frac{d^2 \tau}{dx^2} + (3 - k - 2x^2)x \frac{d\tau}{dx} + 4(1 + i\lambda)(1 - 2x^2)\tau = \\ = 8 \left[ \frac{kPR^2}{2} + (1 + i\lambda) \frac{kP}{2\pi} \right] x \sqrt{1 - x^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Общее решение полученного уравнения запишется в виде:

$$\tau = \tau_0 + \tau^*.$$

Здесь  $\tau^*$  — частное решение,  $\tau_0$  — общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\begin{aligned} (k + 1 - 2x^2)(1 - x^2) \frac{d^2 \tau_0}{dx^2} + (3 - k - 2x^2)x \frac{d\tau_0}{dx} + 4(1 + i\lambda)(1 - 2x^2)\tau_0 = \\ = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Решение уравнения (13) будем искать в форме степенного ряда

$$\tau_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (14)$$

Подставляя ряд (14) в уравнение (13), получаем рекуррентное соотношение между коэффициентами ряда

$$a_{n+2} = \frac{(k+3)n^2 - 6n - 4(1+i\lambda)}{(k+1)(n+2)(n+1)} a_n - \frac{2n^2 - 12n + 8 - 8i\lambda}{(k+1)(n+2)(n+1)} a_{n-2}. \quad (15)$$

Из этой формулы видно, что четные и нечетные коэффициенты ряда вычисляются независимо друг от друга, причем коэффициенты  $a_0$  и  $a_1$  могут быть произвольными. Полагая  $a_0=0$  и  $a_1=1$ , получаем первое частное решение  $\tau_1$  уравнения (13)

$$\tau_1 = x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + \dots \quad (16)$$

Второе его частное решение  $\tau_2$  найдем, полагая  $a_0 = 1$  и  $a_1 = 0$ ,

$$\tau_2 = 1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \dots \quad (17)$$

Обозначив

$$a_n = \alpha_n + i\beta_n, \quad (18)$$

из (16) — (17), находим

$$\tau_1 = y_1 + iz_1, \quad \tau_2 = y_2 + iz_2; \quad (19)$$

где

$$y_1 = x + \alpha_3 x^3 + \alpha_5 x^5 + \alpha_7 x^7 + \dots; \quad (20)$$

$$z_1 = \beta_3 x^3 + \beta_5 x^5 + \beta_7 x^7 + \dots; \quad (21)$$

$$y_2 = 1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_4 x^4 + \alpha_6 x^6 + \dots; \quad (22)$$

$$z_2 = \beta_2 x^2 + \beta_4 x^4 + \beta_6 x^6 + \dots. \quad (23)$$

Для вычисления коэффициентов  $\alpha_n$  и  $\beta_n$ , как четных, так и нечетных, из формул (18) и (15) получаем:

$$\begin{aligned} \alpha_{n+2} = & \frac{(k+3)n^2 - 6n - 4}{(k+1)(n+2)(n+1)} \alpha_n - \frac{2n^2 - 12n + 8}{(k+1)(n+2)(n+1)} \alpha_{n-2} + \\ & + \frac{4\lambda}{(k+1)(n+2)(n+1)} (\beta_n - 2\beta_{n-2}), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \beta_{n+2} = & \frac{(k+3)n^2 - 6n - 4}{(k+1)(n+2)(n+1)} \beta_n - \frac{2n^2 - 12n + 8}{(k+1)(n+2)(n+1)} \beta_{n-2} - \\ & - \frac{4\lambda}{(k+1)(n+2)(n+1)} (\alpha_n - 2\alpha_{n-2}). \end{aligned} \quad (25)$$

Для вычисления нечетных коэффициентов  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  в формулах (24) — (25) следует положить:

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \alpha_{-1} = \beta_{-1} = 0.$$

Четные коэффициенты  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  получим, приняв

$$\alpha_0 = 1, \quad \beta_0 = 0, \quad \alpha_{-2} = \beta_{-2} = 0.$$

Нетрудно показать, что ряды (20) — (23) и их производные сходятся при  $-1 < x < 1$ .

Вронский системы решений  $\tau_1$  и  $\tau_2$  уравнения (13) имеет вид:

$$\tau_1 \frac{d\tau_2}{dx} - \tau_2 \frac{d\tau_1}{dx} = - \frac{k+1-2x^2}{(k+1)\sqrt{1-x^2}}. \quad (26)$$

Подставляя сюда вместо  $\tau_1$  и  $\tau_2$  их выражения из (19) и разделяя затем действительные и мнимые части, получаем формулы контроля правильности вычисления степенных рядов и их производных:

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} - z_1 \frac{dz_2}{dx} + z_2 \frac{dz_1}{dx} = - \frac{k+1-2x^2}{(k+1)\sqrt{1-x^2}}, \quad (27)$$

$$y_1 \frac{dz_2}{dx} + z_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dz_1}{dx} - z_2 \frac{dy_1}{dx} = 0. \quad (28)$$

Частное решение  $\tau^*$  неоднородного уравнения (12) будем искать также в форме степенного ряда

$$\tau^* = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n, \quad (29)$$

предварительно разложив правую часть этого уравнения в ряд

$$8 \left[ \frac{k p R^2}{2} + (1 + i\lambda) \frac{k P}{2\pi} \right] x \sqrt{1-x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n. \quad (30)$$

Здесь  $c_n$  — коэффициент разложения, который удобно представить в виде суммы

$$c_n = c'_n + c''_n. \quad (31)$$

Для коэффициентов  $c'_n$  и  $c''_n$  будем иметь

$$c'_n = (1 + i\lambda) \frac{4kP}{\pi} B_n, \quad c''_n = 4kpR^2 B_n, \quad (32)$$

где  $B_n$  — коэффициенты разложения

$$x \sqrt{1-x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n x^n,$$

определяемые соотношением

$$B_{n+2} = \frac{n-2}{n+1} B_n,$$

в котором  $n$  принимает лишь нечетные значения и  $B_1 = 1$ .

В соответствии с (30) — (32) частное решение  $\tau^*$  уравнения (12) можно записать в виде суммы

$$\tau^* = \frac{P}{2\pi} (y + iz) + \frac{pR^2}{2} (Y + iZ). \quad (33)$$

Представляя функцию  $y + iz$  в виде

$$y + iz = \sum_{n=1}^{\infty} b'_n x^n \quad (34)$$

и полагая

$$b'_n = \gamma'_n + i\delta'_n, \quad (35)$$

где  $\gamma'_n$  и  $\delta'_n$  — действительные коэффициенты, получаем из (12):

$$\begin{aligned} \gamma'_{n+2} = & \frac{(k+3)n^2 - 6n - 4}{(k+1)(n+2)(n+1)} \gamma'_n - \frac{2n^2 - 12n + 8}{(k+1)(n+2)(n+1)} \gamma'_{n-2} + \\ & + \frac{4\lambda}{(k+1)(n+2)(n+1)} (\delta'_n - 2\delta'_{n-2}) + \frac{\mu'_n}{(k+1)(n+2)(n+1)}, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \delta'_{n+2} = & \frac{(k+3)n^2 - 6n - 4}{(k+1)(n+2)(n+1)} \delta'_n - \frac{2n^2 - 12n + 8}{(k+1)(n+2)(n+1)} \delta'_{n-2} - \\ & - \frac{4\lambda}{(k+1)(n+2)(n+1)} (\gamma'_n - 2\gamma'_{n-2}) + \frac{\nu'_n}{(k+1)(n+2)(n+1)}, \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь

$$\mu_n = 8kB_n, \quad \nu_n = 8k\lambda B_n.$$

Из (34) и (35) следует, что

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma'_n x^n, \quad z = \sum_{n=1}^{\infty} \delta'_n x^n. \quad (38)$$

В этих выражениях  $n$  имеет нечетные значения, причем

$$\gamma'_1 = \gamma'_{-1} = 0, \quad \delta'_1 = \delta'_{-1} = 0, \quad \mu'_1 = 8k, \quad \nu'_1 = 8k\lambda.$$

Представим далее функцию  $Y + iZ$  в виде другого степенного ряда

$$Y + iZ = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^* x^n, \quad (39)$$

в котором

$$b_n^* = \gamma_n^* + i\delta_n^*. \quad (40)$$

Тогда

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^* x^n, \quad Z = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^* x^n. \quad (41)$$

Формулы для вычисления коэффициентов  $\gamma_n^*$  и  $\delta_n^*$  можно получить из формул (36) и (37), заменив коэффициенты  $\gamma'_n$ ,  $\delta'_n$ ,  $\mu'_n$ ,  $\nu'_n$  на  $\gamma_n^*$ ,  $\delta_n^*$ ,  $\mu_n^*$ ,  $\nu_n^*$  и положив

$$\mu_n^* = \mu_n, \quad \nu_n^* = 0.$$

Полученные результаты позволяют записать общее решение уравнения (1):

$$\sigma = c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2 + \sigma^*. \quad (42)$$

Здесь

$$\sigma_1 = \frac{\tau_1}{k + \sin \theta}, \quad \sigma_2 = \frac{\tau_2}{k + \sin \theta}, \quad (43)$$

$$\sigma^* = V^* + \frac{D}{R} (\mu - i\lambda) \vartheta^* = \frac{\tau^*}{k + \sin \theta} - \frac{kP}{2\pi} \frac{\operatorname{ctg} \theta}{k + \sin \theta}, \quad (44)$$

$c_1$ ,  $c_2$  — постоянные интегрирования. Полагая

$$c_1 = -i \frac{\lambda D}{R} (A_1 - iB_1), \quad c_2 = -i \frac{\lambda D}{R} (A_2 - iB_2), \quad (45)$$

где  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$  и  $B_2$  — действительные постоянные, из (42) и (43), (44), (45), находим

$$V = -\frac{D}{R} (C_1 u_1 + D_1 v_1 + C_2 u_2 + D_2 v_2) + V^*, \quad (46)$$

$$\vartheta = A_1 u_1 + B_1 v_1 + A_2 u_2 + B_2 v_2 + \vartheta^*, \quad (47)$$

причем

$$u_1 = \frac{y_1}{k + \sin \theta}, \quad v_1 = \frac{z_1}{k + \sin \theta}, \quad (48)$$

$$u_2 = \frac{y_2}{k + \sin \theta}, \quad v_2 = \frac{z_2}{k + \sin \theta}, \quad (49)$$

$$V^* = \frac{1}{k + \sin \theta} \left[ \frac{P}{2\pi} \left( y + \frac{\mu}{\lambda} z - k \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{pR^2}{2} \left( Y + \frac{\mu}{\lambda} Z \right) \right], \quad (50)$$

$$\vartheta^* = - \frac{1}{k + \sin \theta} \left( \frac{PR}{2\pi\lambda D} z + \frac{pR^3}{2\lambda D} Z \right), \quad (51)$$

$$C_1 = \mu A_1 + \lambda B_1, \quad D_1 = \mu B_1 - \lambda A_1, \quad C_2 = \mu A_2 + \lambda B_2, \quad D_2 = \mu B_2 - \lambda A_2.$$

Внесем теперь полученные соотношения в формулы (5)–(6). В результате придем к следующим выражениям для вычисления усилий  $N_1$  и  $N_2$ :

$$N_1 = - \frac{D}{R^2} (C_1 u_1 + D_1 v_1 + C_2 u_2 + D_2 v_2) \frac{\cos \theta}{k + \sin \theta} + \frac{P}{2\pi R} F_1(\theta) + \frac{pR}{2} G_1(\theta), \quad (52)$$

$$N_2 = - \frac{D}{R^2} \left( C_1 \frac{du_1}{d\theta} + D_1 \frac{dv_1}{d\theta} + C_2 \frac{du_2}{d\theta} + D_2 \frac{dv_2}{d\theta} \right) + \frac{P}{2\pi R} F_2(\theta) + \frac{pR}{2} G_2(\theta). \quad (53)$$

Здесь

$$F_1(\theta) = \frac{1}{(k + \sin \theta)^2} \left[ 1 + k \sin \theta + \left( y + \frac{\mu}{\lambda} z \right) \cos \theta \right], \quad (54)$$

$$G_1(\theta) = 1 + \frac{k}{k + \sin \theta} - \frac{(2k + \sin \theta_0) \sin \theta_0}{(k + \sin \theta) \sin \theta} + \left( Y + \frac{\mu}{\lambda} Z \right) \frac{\cos \theta}{k + \sin \theta}, \quad (55)$$

$$F_2(\theta) = - \frac{1}{(k + \sin \theta)^2} \left[ 1 + k \sin \theta + \left( y + \frac{\mu}{\lambda} z \right) \cos \theta \right] + \frac{1}{k + \sin \theta} \left( \frac{dy}{d\theta} + \frac{\mu}{\lambda} \frac{dz}{d\theta} \right), \quad (56)$$

$$G_2(\theta) = 1 + \frac{(2k + \sin \theta_0) \sin \theta_0}{\sin^2 \theta} - \left( Y + \frac{\mu}{\lambda} Z \right) \frac{\cos \theta}{(k + \sin \theta)^2} + \frac{1}{k + \sin \theta} \left( \frac{dY}{dz} + \frac{\mu}{\lambda} \frac{dZ}{d\theta} \right). \quad (57)$$

Моменты  $M_1$  и  $M_2$  будут выражаться формулами (7), в которых

$$\kappa_1 = \frac{1}{R} \left( A_1 \frac{du_1}{d\theta} + B_1 \frac{dv_1}{d\theta} + A_2 \frac{du_2}{d\theta} + B_2 \frac{dv_2}{d\theta} \right) + \frac{P}{2\pi\lambda D} H_1(\theta) + \frac{pR^2}{2\lambda D} I_1(\theta), \quad (58)$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{R} (A_1 u_1 + B_1 v_1 + A_2 u_2 + B_2 v_2) \frac{\cos \theta}{k + \sin \theta} + \frac{P}{2\pi\lambda D} H_2(\theta) + \frac{pR^2}{2\lambda D} I_2(\theta), \quad (59)$$

причем

$$H_1(\Theta) = \frac{z \cos \Theta}{(k + \sin \Theta)^2} - \frac{1}{k + \sin \Theta} \frac{dz}{d\Theta}, \quad (60)$$

$$I_1(\Theta) = \frac{Z \cos \Theta}{(k + \sin \Theta)^2} - \frac{1}{k + \sin \Theta} \frac{dZ}{d\Theta}, \quad (61)$$

$$H_2(\Theta) = -\frac{z \cos \Theta}{(k + \sin \Theta)^2}, \quad I_2(\Theta) = -\frac{Z \cos \Theta}{(k + \sin \Theta)^2}. \quad (62)$$

Изложенный выше способ интегрирования уравнения (1) целесообразно применять, если для рассматриваемой оболочки угол  $\alpha$  изменяется в пределах  $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$  или, соответственно  $0 \leq \Theta \leq \pi$ . Это объясняется тем, что степенные ряды (20)–(23), входящие в общее решение уравнения (1) при указанных значениях угла  $\alpha$  имеют хорошую сходимость и вычисляются без всяких затруднений. С дальнейшим ростом абсолютной величины угла  $\alpha$  (или, что одно и то же, аргумента  $x$ ), сходимость рядов (20)–(23) ухудшается и для вычисления их значений требуется суммировать очень большое количество членов ряда. Поэтому с целью сокращения трудоемкости вычисления рядов при расчете частей торообразной оболочки, имеющих отрицательную гауссову кривизну, следует перейти в уравнении (10) к другому аргументу  $\beta$ , связанному с углом  $\Theta$  зависимостью (фиг. 1)

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \Theta.$$

Тогда уравнение (10) преобразуется в следующее:

$$\begin{aligned} (-k + \cos \beta) \frac{d^2 \tau}{d\beta^2} + \sin \beta \frac{d\tau}{d\beta} + (1 + i\lambda) \tau \cos \beta = \\ = - \left[ \frac{k\rho R^2}{2} + (1 + i\lambda) \frac{k\rho}{2\pi} \right] \sin \beta. \end{aligned} \quad (63)$$

Сопоставляя это уравнение с уравнением (11), замечаем, что оно отличается от последнего лишь знаком при коэффициенте  $k$  в левой и правой частях уравнения. Поэтому общее решение этого уравнения можно получить, перейдя к аргументу

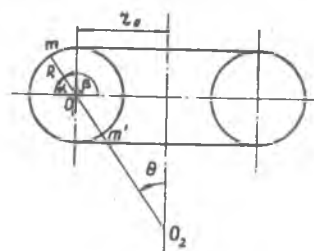
$$x = \sin \frac{\beta}{2}$$

и воспользовавшись формулами (20)–(23), (24)–(25), (36)–(37), (38), (41) для вычисления рядов  $y_1, z_1, y_2, z_2, y, z$  и  $Y, Z$ , изменив в них знак плюс при коэффициенте  $k$  на минус. Радиус сходимости вновь полученных рядов будет определяться равенством [3]

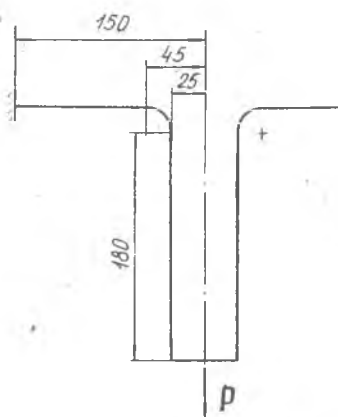
$$\rho = \sqrt{\frac{k-1}{2}}$$

Формулы (52)–(57), (7) и (58)–(62) для вычисления усилий

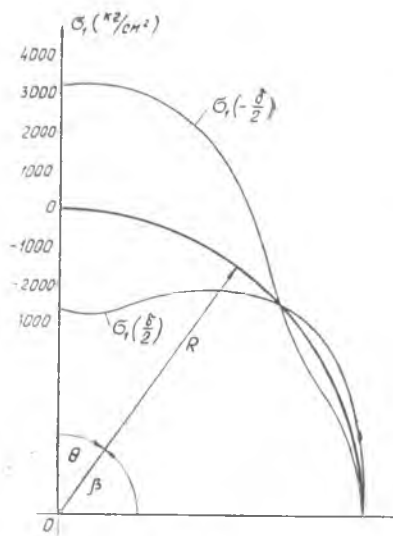




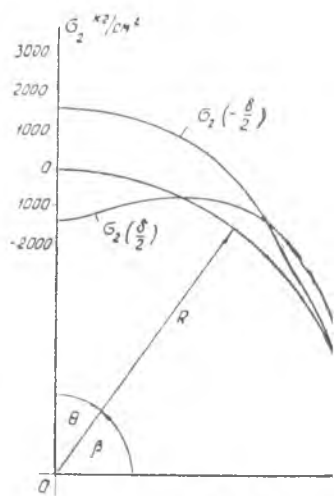
Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

и моментов сохраняют свой вид и для частей оболочки с отрицательной гауссовой кривизной.

В заключение приведем результаты расчета сочленения цилиндрического патрубка с круглой пластиной через торообразный переход на действие осевой силы  $P$ . Размеры сочленения показаны на фиг. 2. Основные параметры торообразной оболочки:  $k=2,25$ ,  $\lambda=44,0595$  (при  $\mu=0,3$ ). Модуль упругости материала оболочки  $E=2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>. Сила  $P=100$  кг. Усилия и моменты в торообразном переходе определялись по изложенному выше методу. На фиг. 3 и 4 приведены эпюры меридиональных ( $\sigma_1$ ) и окружных ( $\sigma_2$ ) напряжений на наружной ( $z=\frac{\delta}{2}$ ,  $z$  — расстояние от срединной поверхности оболочки, положительное от центра кривизны меридиана) и внутренней ( $z=-\frac{\delta}{2}$ ) поверхностях оболочки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, К. К. Лихарев, В. М. Макушин, Н. Н. Малинин, В. И. Феодосьев. Расчеты на прочность в машиностроении, т. 2, Машгиз, 1958.
2. В. И. Феодосьев. К расчету горфирванных коробок (сильфонов), «Инженерный сборник», т. IV, в. 1, 1947.
3. Э. Маделунг. Математический аппарат физики. Физматгиз, 1960.