

Л.М.Савельев, Х.С.Хазанов

К РАСЧЕТУ ПОЛОГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
НА СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

В работах [1, 2] рассматривается поведение решения произвольной пологой оболочки вблизи точки приложения сосредоточенной силы или момента. Для цилиндрической оболочки соответствующие формулы получены ранее В.Д.Даревским [3, 4]. Поведение напряжений и перемещений около точки действия силы или момента можно легко получить, располагая полным набором решений однородной системы уравнений, включающим в себя решения с отличными от нуля главным вектором и главным моментом внутренних сил, действующих по произвольному контуру, охватывающему начало координат. Такие решения удается построить [5] для пологой цилиндрической оболочки; в настоящей работе они используются для вывода асимптотических формул.

Пусть ξ и η - декартовы, а r и θ - полярные координаты в срединной поверхности цилиндрической оболочки; угол θ отсчитывается от оси ξ , направленной вдоль образующей. Как показано в [5], решениями разрешающего уравнения теории пологой цилиндрической оболочки [6] являются функции*

$$F(x, \theta) = \sum_{\nu} \sum_n \delta_{\nu} i^{\nu} [a_n H_n^{(\nu)}(x) + b_n J_n(x)] [J_{n-\nu}(x) + \\ + J_{n+\nu}(x)] \frac{\cos \nu \theta}{\sin \nu \theta} + \sum_{\nu} \sum_n i^{\nu-1} [c_n H_n^{(\nu)}(x) + \\ + d_n J_n(x)] [J_{n-\nu}(x) + J_{n+\nu}(x)] \frac{\cos \nu \theta}{\sin \nu \theta}, \quad (I)$$

* В формулах (I) и (5) исправлены опечатки, вкравшиеся в формулы (9) и (37) работы [5].

$$F(x, \theta) = A_0 \sum_{\nu}' \sum_n \delta_{\nu} i^{\nu} n \bar{D}_{n\nu}(x) \cos \nu \theta, \quad (2)$$

$$F(x, \theta) = A_1 \sum_{\nu}'' \sum_n i^{\nu-1} \bar{D}_{n\nu}(x) \sin \nu \theta, \quad (3)$$

$$F(x, \theta) = i B_0 [\theta + 2 \sum_{\nu}' \sum_n i^{\nu} D_{n\nu}^*(x) \sin \nu \theta], \quad (4)$$

$$F(x, \theta) = B_1 \sqrt{2i} [x \theta \sin \theta - 2 \sum_{\nu}'' \sum_n i^{\nu-1} n D_{n\nu}^*(x) \cos \nu \theta + \\ + \frac{\mathcal{H}(1+\mu)}{2} H_0(x) \sum_{\nu}' i^{\nu} J_{\nu}(x) \cos \nu \theta], \quad (5)$$

$$F(x, \theta) = B_2 \sqrt{2i} [x \theta \cos \theta + 2 \sum_{\nu}'' \sum_n i^{\nu-1} (n^2 - \\ - \frac{1+\mu}{2}) \bar{D}_{n\nu}(x) \sin \nu \theta], \quad (6)$$

где

$$F = w + i\varphi, \quad \bar{D}_{n\nu}(x) = P_n(x) [J_{n-\nu}(x) + J_{n+\nu}(x)]$$

$$D_{n\nu}^*(x) = P_n(x) [J_{n-\nu}(x) - J_{n+\nu}(x)], \quad P_n(x) = \left. \frac{\partial J_{\mu}(x)}{\partial \mu} \right|_{\mu=n}$$

$$x = \omega \rho \sqrt{2i}, \quad \omega = \frac{1}{2} \sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \frac{R_0}{\sqrt{Rh}}, \quad \rho = \frac{r}{R_0}$$

$$\delta_{\nu} = \frac{1}{2} \text{ при } \nu=0, \quad \delta_{\nu} = 1 \text{ при } \nu \neq 0.$$

Здесь w - нормальное перемещение, φ - функция напряжений; a_n , b_n , c_n , d_n , A_0 , A_1 , B_0 , B_1 и B_2 - произвольные постоянные; $H_n^{(\mu)}(x)$ и $J_n(x)$ - первая функция Ганкеля и функция Бесселя, R_0 - характерный линейный размер. Знаки \sum' , \sum'' и \sum означают суммирование соответственно по четным, нечетным или по всем значениям индекса от 0 до ∞ .

Если (1) - (3) подчинить условию однозначности перемещений (остальные функции построены так, что это условие выполняется автоматически), то можно получить формулы [5].

$$\sum_n c_n = (1+i) \frac{4\omega^3 R^3}{ER_0^3 h} M_\eta, \quad A_0 = -i \frac{16\omega^2 R^2}{\pi ER_0^2 h} P_\xi$$

$$A_1 = -(1-i) \frac{16\omega^3 R^2}{\pi ER_0^2 h} M_\xi, \quad B_0 = \frac{4\omega^2 R}{\pi ER_0^2 h} M_\xi \quad (7)$$

$$B_1 = \frac{2\omega R}{\pi ER_0 h} P_\xi, \quad B_2 = -\frac{2\omega R}{\pi ER_0 h} P_\eta,$$

связывающие произвольные постоянные с компонентами главного вектора P и главного момента M внешних сил (рис. 1). Знаки в

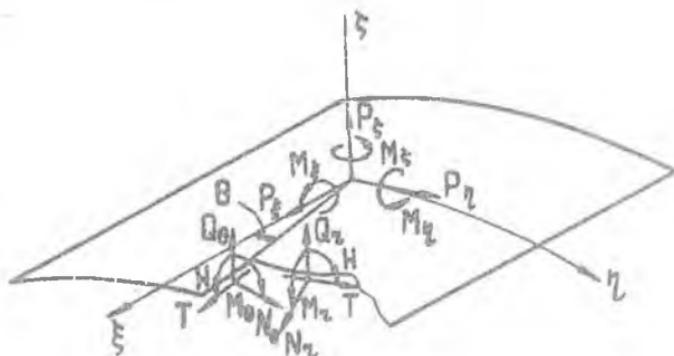


Рис. 1.

(7) противоположны знакам в соответствующих формулах работы [5], поскольку в последней через P и M обозначены главный вектор и главный момент внутренних усилий; постоянные C_n в первой из формул (7) относятся к разложению по $\cos n\theta$ в (1).

Совокупность функций (1) - (6) позволяет рассмотреть задачу о нагружении оболочки произвольной сосредоточенной силой или моментом. Задача сводится к определению постоянных в выражении (1). Поскольку члены с множителями b_n и d_n регулярны в начале координат, постоянные b_n и d_n должны определяться из условий на наружном контуре либо - в случае бесконечной оболочки - из условий "на бесконечности". Постоянные же a_n и c_n определяют характер особенности решения в начале координат и могут быть найдены путем того или иного предельного перехода. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Пусть, например, на цилиндрическую оболочку действует нормальная сосредоточенная сила P_{ξ} . В силу симметрии в (1) необходимо оставить лишь разложение по $\cos \nu \theta$ для $\nu = 0, 2, \dots$ и объединить его на основании (7) с (2).

Опуская члены с множителями b_n , получаем функцию

$$F = A_0 \sum_{\nu} \delta_{\nu} i^{\nu} n \bar{D}_{n\nu}(x) \cos \nu \theta + \\ + \sum_{\nu} \delta_{\nu} i^{\nu} a_n H_n^{(1)}(x) [J_{n-\nu}(x) + J_{n+\nu}(x)] \cos \nu \theta, \quad (8)$$

асимптотически определяющую напряженное состояние пологой цилиндрической оболочки около точки приложения нормальной силы.

Для определения a_n примем, что на поверхности оболочки имеется малое круглое отверстие радиуса R_0 с центром в начале координат; равнодействующая усилий, распределенных по краю отверстия, равна P_{ξ} . Решение, соответствующее действию сосредоточенной силы, можно получить из решения данной задачи, устремляя размер отверстия R_0 к нулю при неизменной величине P_{ξ} .

Используя разложения [7] функций $H_n^{(1)}(x)$, $J_n(x)$ и $P_n(x)$, запишем разложение функции (8) в окрестности начала координат:

$$F = A_0 \left(\frac{x^2}{4} \ln x - \frac{x^2}{4} + \dots \right) + a_0 \left[\frac{2i}{\pi} \ln \frac{\gamma x}{2} + 1 - \frac{ix^2}{4\pi} \ln \frac{\gamma x}{2} + \right. \\ \left. + \frac{ix^2}{2\pi} - \frac{x^2}{2} - \left(\frac{ix^2}{2\pi} \ln \frac{\gamma x}{2} + \frac{x^2}{8} \right) \cos 2\theta + \dots \right] + a_1 \left[-\frac{i}{\pi} + \right. \\ \left. + \frac{ix^2}{2\pi} \ln \frac{\gamma x}{2} - \frac{ix^2}{4\pi} + \frac{x^2}{4} + \left(-\frac{i}{\pi} + \frac{ix^2}{2\pi} \ln \frac{\gamma x}{2} - \frac{ix^2}{2\pi} + \frac{x^2}{4} \right) \cos 2\theta + \right. \\ \left. + \frac{ix^2}{24\pi} \cos 4\theta + \dots \right] + a_2 \left[-\frac{i}{2\pi} (1 + \cos 4\theta) + \right. \\ \left. + \left(\frac{4i}{\pi x^2} - \frac{i}{\pi} \right) \cos 2\theta + \dots \right] + a_3 \left[-\frac{i}{3\pi} (1 + \cos 6\theta) + \right. \\ \left. + \frac{8i}{\pi x^2} (\cos 2\theta + \cos 4\theta) + \dots \right] + \dots, \quad (9)$$

где γ - постоянная Эйлера.

На контуре отверстия аргумент x принимает значение $\omega\sqrt{2i}$; поэтому комплексные постоянные a_n будут функциями малаго параметра ω . Полагая

$$a_0 = a_{00} - a_{02} \omega^2 + \dots, \quad a_1 = a_{10} + a_{12} \omega^2 + \dots$$

$$a_2 = a_{22} \omega^2 + a_{24} \omega^4 + \dots, \quad a_3 = a_{32} \omega^2 + a_{34} \omega^4 + \dots, \quad (10)$$

найдем разложение функции F по степеням ω :

$$F = F^{(0)} + \omega^2 F^{(2)} + \dots, \quad (11)$$

где, в частности,

$$F^{(0)} = \left(\frac{2i}{\pi} \ln \frac{\gamma \omega \rho \sqrt{2i}}{2} + 1 \right) a_{00} - \frac{i}{\pi} a_{10} + \left[-\frac{i}{\pi} a_{10} + \frac{2}{\pi \rho^2} (a_{22} + 2a_{32}) \right] \cos 2\theta + \dots$$

Если положить $a_{mn} = \alpha_{mn} + i\beta_{mn}$, отделить в (II) действительные и мнимые части, воспользоваться формулами [6] для усилий и моментов и подставить последние в граничные условия, то, приравнявая в этих условиях слева и справа члены с множителями $\omega^0, \omega^2, \dots$, можно получить уравнения относительно α_{mn} и β_{mn} . Существенным является лишь нахождение действительной и мнимой частей постоянных a_{00} и a_{10} , поскольку в силу (9) при $\omega \rightarrow 0$ к этим пределам стремятся a_0 и a_1 , в то время как все остальные коэффициенты стремятся к нулю. Заметим, что разложение (II) используется лишь при записи граничных условий; поведение функции F при $R_0 \rightarrow 0$ можно получить из (9) и (10), если учесть, что x не зависит от R_0 .

Значения a_{00} и a_{10} зависят от характера нагрузок, действующих по краю отверстия. Если считать, что сила P_z создается равномерно распределенными по краю поперечными силами, то $a_{00} = a_{10} = 0$. Существуют и другие возможности создания силы P_z , как это следует из формулы [5]:

$$P_z = -\pi R_0 \left[Q_0 - \frac{R_0}{2R} (N_0 - N_2 + T_2) \right].$$

Здесь Q_0, N_0, N_2 и T_2 — коэффициенты разложения обобщенной перерезывающей силы Q_r^* и усилий N_r и T (рис. I) в ряды вида

$$Q_r^* = \sum_j \delta_j Q_j \cos j\theta,$$

краю отверстия. При задании N_0 , N_2 или T_2 постоянные A_{00} и A_{10} оказываются отличными от нуля, но мы ограничимся рассмотрением случая $N_0 = N_2 = T = 0$ (можно показать, что в других случаях решение будет иметь более высокую особенность в начале координат). При этом все постоянные A_n в пределе обращаются в нуль, и поведение решения около точки действия нормальной силы определяется выражением (2).

Аналогично исследуется поведение решения вблизи начала координат при действии сосредоточенных сил P_ξ и P_η , а также сосредоточенных моментов. Если считать, что силы P_ξ и P_η и момент M_ξ создаются тангенциальными, а моменты M_ξ и M_η - поперечными усилиями, приложенными к краю отверстия, то во всех случаях (кроме случая сосредоточенного момента M_η) постоянные A_n и C_n оказываются равными нулю. При действии же момента M_η равны нулю все постоянные, за исключением C_0 ; решение при этом можно записать в замкнутом виде:

$$F = 2C_0 \sum_{j=1}^{\infty} i^{j-1} H_0^{(1)}(x) J_j(x) \cos j\theta = \\ = C_0 H_0^{(1)}(x) \sin(\omega \xi \sqrt{2i}). \quad (12)$$

Заметим, что для бесконечной оболочки решение (12) пригодено во всей области, а не только около начала координат, поскольку оно убывает при больших ρ . В других случаях построение решений с подходящим поведением на бесконечности оказывается затруднительным.

В заключение приведем асимптотические формулы, соответствующие главным членам разложений полученных решений.

В случае действия силы P_ξ эти формулы имеют вид:

$$u \sim -P_\xi \frac{(3-\mu)(1+\mu)}{4\pi E h} \cos\theta \ln \frac{r}{r_0}, \quad N_r \sim -P_\xi \frac{3+\mu}{4\pi r} \cos\theta \\ N_\theta \sim P_\xi \frac{1-\mu}{4\pi r} \cos\theta, \quad T \sim P_\xi \frac{1-\mu}{4\pi r} \sin\theta; \quad (13)$$

в случае действия силы P_η -

$$M_r \sim M_\theta \sim -P_\eta \frac{1+\mu}{4\pi} \ln \frac{r}{r_0}; \quad (14)$$

в случае действия момента M_{ξ} -

$$M_{\eta} \sim M_{\theta} \sim M_{\xi} \frac{1+\mu}{4\pi r} \sin \theta, \quad H \sim M_{\xi} \frac{1-\mu}{4\pi r} \cos \theta; \quad (15)$$

в случае действия момента M_{ξ} -

$$U \sim M_{\xi} \frac{1+\mu}{2\pi E h r}, \quad T \sim -M_{\xi} \frac{1}{2\pi r^2}. \quad (16)$$

В этих формулах U и U - тангенциальные перемещения точек срединной поверхности в полярных координатах, r_k - произвольная величина, имеющая размерность единицы длины, формулы для P_{η} и M_{η} получаются из (13) и (16) заменой $\sin \theta$ на $\cos \theta$ и сменой знака у T и H . Полученные формулы отличаются от выражений, приведенных В.М.Даревским [8], множителями, зависящими от угловой координаты θ , и наличием множителя π в знаменателе первой формулы (13). В [8] отсутствуют также соотношения типа (16). Отличие в поведении решений вдоль θ объясняется, по-видимому, различием подходов к выводу этих соотношений.

Л и т е р а т у р а

1. Чернышев Г.Н. ПММ, т.27, вып. I., 1963.
2. Новожилов В.В., Черных К.Ф. В сб. "Исследования по упругости и пластичности", № 2, Л., Ленинградский университет, 1963.
3. Даревский В.М. ПММ, т.15, вып. 5, 1951.
4. Даревский В.М. ПММ, т.16, вып. 2, 1952.
5. Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Труды КуАИ, вып. 48, Куйбышев, 1971.
6. Лурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, М. - Л., 1947.
7. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций, ч.1, ИД, 1949.
8. Даревский В.М. В сб. Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. М., "Наука", 1966.