

Х. С. ХАЗАНОВ

К РАСЧЕТУ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С КРУГЛЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

Принятые обозначения:

X, Y — декартовы координаты точек срединной поверхности оболочки (начало координат — в центре отверстия),

r, θ — полярные на развертке цилиндра координаты (фиг. 1),

R, δ — радиус срединной поверхности и толщина оболочки,

R_1 — радиус отверстия на развертке цилиндра,

$\lambda = \frac{R}{\delta}, \kappa = \frac{R_1}{R}$ — безразмерные параметры оболочки,

$\xi = \frac{X}{R_1}, \eta = \frac{Y}{R_1}, \rho = \frac{r}{R_1}$ — безразмерные координаты,

w — нормальное к поверхности оболочки перемещение,

u, v — компоненты перемещения точек срединной поверхности оболочки в полярных координатах,

$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \gamma_{r\theta}$ — компоненты деформации срединной поверхности оболочки,

$M_r, M_\theta, N_r, N_\theta, T$ — изгибающие моменты, нормальные и касательные усилия,

Q_r^* — обобщенная перерезывающая сила в смысле Кирхгофа,

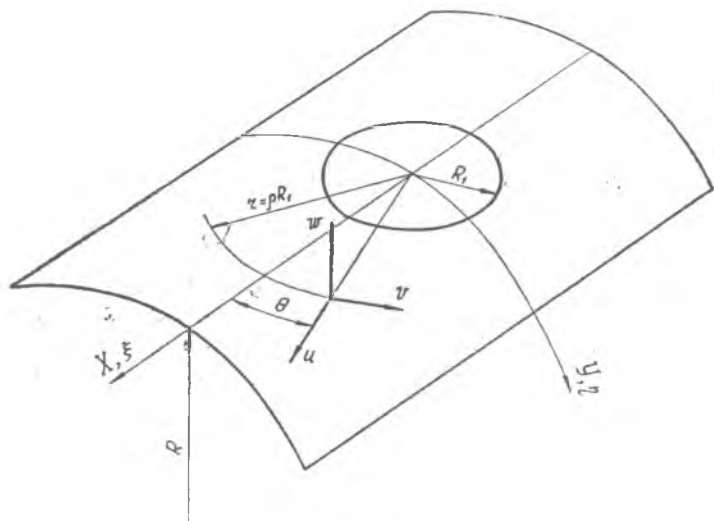
m_r, q_r, n_r, t — компоненты внешней нагрузки, приложенной по краю отверстия (соответственно погонные изгибающие моменты, поперечные, нормальные и касательные силы),

φ — функция напряжений,

E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки,

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$ — оператор Лапласа.

Расчет цилиндрических оболочек, имеющих отверстия, представляет большой практический интерес, так как подобные элементы встречаются в целом ряде конструкций. Весьма детальный литературный обзор по этому вопросу приведен в [2] и [5]. Большинство работ касается расчета оболочек с малыми отверстиями, где, следуя А. И. Лурье [1], задача решается разложением в ряд по степеням малого параметра. Из последних исследований, посвященных расчету оболочек с немалыми круглыми отверстиями, отметим работу [4], где получено решение для цилиндрической оболочки в полярной системе координат в виде двойного ряда Фурье,



Фиг. 1.

а также работы [6] и [7], в которых ряд практически важных задач доведен до численных результатов (напряженное состояние оболочки с отверстием при растяжении и кручении, при действии внутреннего давления).

Однако методы, использованные в [6] и [7] вряд ли приемлемы для определения перемещений, а, следовательно, и для решения контактных задач, когда перемещения в срединной поверхности оболочки используются при записи граничных условий. Методика же, изложенная в настоящей статье, может быть использована как для расчета оболочек с немалыми круглыми отверстиями при различных случаях нагружения, так и для решения контактных задач (оболочки с окантованным отверстием, с жесткой шайбой, с приваренной трубкой и т. д.).

Напряженное состояние оболочки с отверстием можно условно разбить на основное, подсчитанное при заданной внешней нагрузке для оболочки без отверстия, и дополнительное, где по краю отвер-

ствия приложены соответствующие усилия, главный вектор и главный момент которых равны нулю.

Для исследования дополнительного напряженного состояния использовано комплексное дифференциальное уравнение пологой цилиндрической оболочки [1] в безразмерных координатах ξ, η

$$\nabla^2 \nabla^2 F + 8i\omega^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = 0, \quad (1)$$

где

$$F(\xi, \eta) = \omega(\xi, \eta) + i\tau(\xi, \eta) \\ \omega^2 = \frac{\sqrt{3(1-\mu^2)}}{4} x^2 \lambda. \quad (2)$$

Положив

$$\xi = \rho \cos \Theta \quad \eta = \rho \sin \Theta \quad (3)$$

и следуя основным идеям работ [1] и [4], можно комплексную функцию F для достаточно длинной оболочки представить в виде

$$F(\rho, \Theta) = F_1(\rho, \Theta) + F_2(\rho, \Theta) + F_3(\rho, \Theta) + F_4(\rho, \Theta), \quad (4)$$

где

$$F_1(\rho, \Theta) = \sum_{\nu=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} i^{\nu-1} a_n^0 L_{n\nu}^*(z) \cos \nu \Theta \\ F_2(\rho, \Theta) = \sum_{\nu=0, 2, 4, \dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} i^{\nu} k_{\nu} c_n^0 \bar{L}_{n\nu}(z) \cos \nu \Theta \\ (k_{\nu} = \frac{1}{2} \text{ при } \nu = 0, k_{\nu} = 1 \text{ при } \nu \neq 0) \\ F_3(\rho, \Theta) = \sum_{\nu, 1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} i^{\nu-1} a_n^0 \bar{L}_{n\nu}(z) \sin \nu \Theta \\ F_4(\rho, \Theta) = \sum_{\nu=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} i^{\nu} c_n^0 L_{n\nu}^*(z) \sin \nu \Theta, \quad (5)$$

a_n^0, c_n^0 — комплексные постоянные,

$$z = x \sqrt{2i} \quad x = \omega \rho. \quad (6)$$

В равенствах (5) приняты обозначения

$$\bar{L}_{n\nu}(z) = H_n^{(1)}(z) [J_{n-\nu}(z) + J_{n+\nu}(z)] \\ \dot{L}_{n\nu}(z) = H_n^{(1)}(z) [J_{n-\nu}(z) - J_{n+\nu}(z)]. \quad (7)$$

Здесь $H_n^{(1)}(z), J_{n-\nu}(z)$ — первые функции Ганкеля и функции Бесселя с целыми индексами.

Каждая из функций (5) соответствует определенному частному виду нагружения оболочки:

F_1 — симметричному относительно ξ и обратносимметричному относительно η ,

F_2 — симметричному относительно ξ и η ,

F_3 — обратносимметричному относительно ξ и симметричному относительно η ,

F_4 — обратносимметричному относительно ξ и η .

Положив в (5)

$$a_n^0 = a_n + ib_n \quad c_n^0 = c_n + id_n$$

$$\bar{L}_{nv}(z) = \bar{\alpha}_{nv}(x) + i\bar{\beta}_{nv}(x) \quad L_{nv}^*(z) = \alpha_{nv}^*(x) + i\beta_{nv}^*(x), \quad (8)$$

имеем

$$\omega_1(\rho, \Theta) = \sum_{\nu=1, 3, 5 \dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} [a_n \alpha_{n\nu}^*(x) - b_n \beta_{n\nu}^*(x)] \cos \nu\Theta$$

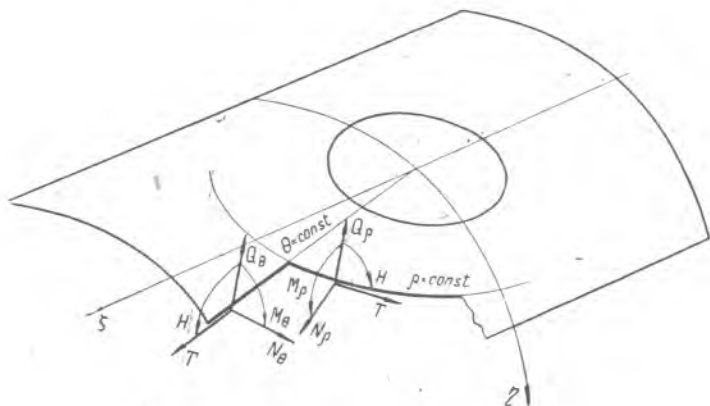
$$\omega_2(\rho, \Theta) = \sum_{\nu=0, 2, 4 \dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_\nu (-1)^{\frac{\nu}{2}} [c_n \bar{\alpha}_{n\nu}(x) - d_n \bar{\beta}_{n\nu}(x)] \cos \nu\Theta$$

$$\omega_3(\rho, \Theta) = \sum_{\nu=1, 3, 5}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} [a_n \bar{\alpha}_{n\nu}(x) - b_n \bar{\beta}_{n\nu}(x)] \sin \nu\Theta$$

$$\omega_4(\rho, \Theta) = \sum_{\nu=2, 4, 6 \dots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu}{2}} [c_n \alpha_{n\nu}^*(x) - d_n \beta_{n\nu}^*(x)] \sin \nu\Theta \quad (9)$$

$$\varphi_1(\rho_1, \Theta) = \sum_{\nu=1, 3, 5 \dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} [a_n \beta_{n\nu}^*(x) + b_n \alpha_{n\nu}^*(x)] \cos \nu\Theta \text{ и т. д.}$$

Постоянные a_n, b_n, c_n, d_n определяются из граничных условий рассматриваемой задачи.



Фиг. 2.

На основании соотношений теории пологих цилиндрических оболочек [1], [3] и равенств (9) для каждого из решений (5) получены выражения погонных усилий, положительные направления которых показаны на фиг. 2.

Для решения $F_1(\rho, \Theta)$:

$$M_{1\rho}(\rho, \Theta) = -\frac{\chi^2 ER}{64\omega^3 \lambda} \sum_{\nu=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} [a_n \overset{*}{f}_{1, n\nu}(x) - b_n \overset{*}{f}_{2, n\nu}(x)] \cos \nu \Theta$$

$$Q_{1\rho}(\rho, \Theta) = -\frac{\chi E}{64\omega \lambda} \sum_{\nu=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} [a_n \overset{*}{f}_{3, n\nu}(x) - b_n \overset{*}{f}_{4, n\nu}(x)] \cos \nu \Theta$$

$$N_{1\rho}(\rho, \Theta) = -\frac{E}{8\lambda \chi} \sum_{\nu=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} [a_n \overset{*}{f}_{6, n\nu}(x) + b_n \overset{*}{f}_{5, n\nu}(x)] \cos \nu \Theta$$

$$T_1(\rho, \Theta) = -\frac{E}{8\lambda \chi} \sum_{\nu=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} [a_n \overset{*}{f}_{8, n\nu}(x) + b_n \overset{*}{f}_{7, n\nu}(x)] \nu \sin \nu \Theta$$

$$M_{1\Theta}(\rho, \Theta) = -\frac{\chi^2 ER}{64\omega^2 \lambda} \sum_{\nu=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} [a_n \overset{*}{f}_{9, n\nu}(x) - b_n \overset{*}{f}_{10, n\nu}(x)] \cos \nu \Theta$$

$$N_{1\Theta}(\rho, \Theta) = -\frac{E}{8\lambda} \sum_{\nu=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} [a_n \overset{*}{f}_{12, n\nu}(x) + b_n \overset{*}{f}_{11, n\nu}(x)] \cos \nu \Theta. \quad (10)$$

Для решения $F_2(\rho_0, \Theta)$:

$$M_{2\rho}(\rho_1, \Theta) = -\frac{\chi^2 ER}{64\omega^2 \lambda} \sum_{\nu=0, 2, 4, \dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_\nu (-1)^{\frac{\nu}{2}} [c_n \bar{f}_{1, n\nu}(x) - d_n \bar{f}_{2, n\nu}(x)] \cos \nu \Theta$$

$$\overset{*}{Q}_{2\rho}(\rho, \Theta) = -\frac{\chi E}{64\omega \lambda} \sum_{\nu=0, 2, 4, \dots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} k_\nu (-1)^{\frac{\nu}{2}} [c_n \bar{f}_{3, n\nu}(x) - d_n \bar{f}_{4, n\nu}(x)] \cos \nu \Theta$$

$$N_{2\rho}(\rho, \Theta) = -\frac{E}{8\lambda \chi} \sum_{\nu=0, 2, 4, \dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_\nu (-1)^{\frac{\nu}{2}} [c_n \bar{f}_{6, n\nu}(x) + d_n \bar{f}_{5, n\nu}(x)] \cos \nu \Theta$$

$$T_2(\rho, \Theta) = -\frac{E}{8\lambda \chi} \sum_{\nu=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu}{2}} [c_n \bar{f}_{8, n\nu}(x) + d_n \bar{f}_{7, n\nu}(x)] \nu \sin \nu \Theta$$

$$M_{2\Theta}(\rho, \Theta) = -\frac{\chi^2 ER}{64\omega^2 \lambda} \sum_{\nu=0, 2, 4, \dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_\nu (-1)^{\frac{\nu}{2}} [c_n \bar{f}_{9, n\nu}(x) - d_n \bar{f}_{10, n\nu}(x)] \cos \nu \Theta$$

$$N_{2\Theta}(\rho, \Theta) = -\frac{E}{8\lambda} \sum_{\nu=0, 2, 4, \dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{\nu} (-1)^{\frac{\nu}{2}} [c_n \bar{f}_{12, n\nu}(x) + \\ + d_n \bar{f}_{11, n\nu}(x)] \cos \nu\Theta. \quad (11)$$

Для решения $F_3(\rho, \Theta)$:

$$M_{3\rho}(\rho, \Theta) = -\frac{x^2 ER}{64 \omega^2 \lambda} \sum_{\nu=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} [a_n \bar{f}_{1, n\nu}(x) - \\ - b_n \bar{f}_{2, n\nu}(x)] \sin \nu\Theta \\ \bar{Q}_{3\rho}(\rho, \Theta) = -\frac{x E}{64 \omega \lambda} \sum_{\nu=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} [a_n \bar{f}_{3, n\nu}(x) - \\ - b_n \bar{f}_{4, n\nu}(x)] \sin \nu\Theta \\ N_{3\rho}(\rho, \Theta) = -\frac{E}{8\lambda x} \sum_{\nu=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} [a_n \bar{f}_{6, n\nu}(x) + \\ + b_n \bar{f}_{5, n\nu}(x)] \sin \nu\Theta \\ T_3(\rho, \Theta) = \frac{E}{8\lambda x} \sum_{\nu=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} [a_n \bar{f}_{8, n\nu}(x) + \\ + b_n \bar{f}_{7, n\nu}(x)] \nu \cos \nu\Theta \\ M_{3\Theta}(\rho, \Theta) = -\frac{x^2 ER}{64 \omega^2 \lambda} \sum_{\nu=1, 3, 5}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} [a_n \bar{f}_{9, n\nu}(x) - \\ - b_n \bar{f}_{10, n\nu}(x)] \sin \nu\Theta \\ N_{3\Theta}(\rho, \Theta) = -\frac{E}{8\lambda} \sum_{\nu=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} [a_n \bar{f}_{12, n\nu}(x) + \\ + b_n \bar{f}_{11, n\nu}(x)] \sin \nu\Theta. \quad (12)$$

Для решения $F_4(\rho, \Theta)$:

$$M_{4\rho}(\rho, \Theta) = -\frac{x^2 ER}{64 \omega^2 \lambda} \sum_{\nu=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu}{2}} [c_n \bar{f}_{1, n\nu}^*(x) - \\ - d_n \bar{f}_{2, n\nu}^*(x)] \sin \nu\Theta \\ \bar{Q}_{4\rho}(\rho, \Theta) = -\frac{x E}{64 \omega \lambda} \sum_{\nu=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu}{2}} [c_n \bar{f}_{3, n\nu}^*(x) - \\ - d_n \bar{f}_{4, n\nu}^*(x)] \sin \nu\Theta$$

$$\begin{aligned}
N_{4\sigma}(\rho, \Theta) &= -\frac{E}{8\lambda x} \sum_{\nu=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu}{2}} [c_n \overset{*}{f}_{6, n\nu}(x) + \\
&\quad + d_n \overset{*}{f}_{5, n\nu}(x)] \sin \nu\Theta \\
T_4(\rho, \Theta) &= -\frac{E}{8\lambda x} \sum_{\nu=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu}{2}} [c_n \overset{*}{f}_{8, n\nu}(x) + \\
&\quad + d_n \overset{*}{f}_{7, n\nu}(x)] \nu \cos \nu\Theta \\
M_{4\Theta}(\rho, \Theta) &= -\frac{x^2 ER}{64\omega^2 l} \sum_{\nu=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu}{2}} [c_n \overset{*}{f}_{9, n\nu}(x) - \\
&\quad - d_n \overset{*}{f}_{10, n\nu}(x)] \sin \nu\Theta \\
N_{4\Theta}(\rho, \Theta) &= -\frac{E}{8\lambda} \sum_{\nu=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu}{2}} [c_n \overset{*}{f}_{12, n\nu}(x) + \\
&\quad + d_n \overset{*}{f}_{11, n\nu}(x)] \sin \nu\Theta.
\end{aligned} \tag{13}$$

В равенствах (10) — (13) введены обозначения

$$\begin{aligned}
\overset{*}{f}_{1, n\nu}(x) &= \overset{**}{\alpha}_{n\nu}(x) - \frac{\mu}{x} \overset{*'}{\alpha}_{n\nu}(x) - \frac{\mu^2 \nu^2}{x^2} \overset{*}{\alpha}_{n\nu}(x) \\
\overset{*}{f}_{3, n\nu}(x) &= \overset{***}{\alpha}_{n\nu}(x) + \frac{1}{x} \overset{**}{\alpha}_{n\nu}(x) - \frac{1 + (2 - \mu) \nu^2}{x^2} \overset{*'}{\alpha}_{n\nu}(x) + \\
&\quad + \frac{(3 - \mu) \nu^2}{x^2} \overset{*}{\alpha}_{n\nu}(x) \\
\overset{*}{f}_{5, n\nu}(x) &= \overset{*'}{\alpha}_{n\nu}(x) - \frac{\nu^2}{x} \overset{**}{\alpha}_{n\nu}(x) \\
\overset{*}{f}_{7, n\nu}(x) &= \overset{*'}{\alpha}_{n\nu}(x) - \frac{1}{x} \overset{*}{\alpha}_{n\nu}(x) \\
\overset{*}{f}_{9, n\nu}(x) &= \mu \overset{*}{\alpha}_{n\nu}(x) + \frac{1}{x} \overset{*'}{\alpha}_{n\nu}(x) - \frac{\nu^2}{x^2} \overset{*}{\alpha}_{n\nu}(x) \\
\overset{*}{f}_{11, n\nu}(x) &= \overset{***}{\alpha}_{n\nu}(x).
\end{aligned} \tag{14}$$

Здесь и далее штрихами обозначены производные по x . В целях сокращения объема статьи выписаны выражения не для всех величин, входящих в (10) — (13). Функции $\overset{*}{f}_{2, n\nu}(x)$, $\overset{*}{f}_{4, n\nu}(x)$, ... определяются по (14), если в формулах для $\overset{*}{f}_{1, n\nu}(x)$, $\overset{*}{f}_{3, n\nu}(x)$... заменить $\overset{*}{\alpha}_{n\nu}(x)$ на $\overset{**}{\beta}_{n\nu}(x)$. Для получения $\bar{f}_{1, n\nu}(x)$, $\bar{f}_{2, n\nu}(x)$ и т. д. нужно в (14) подставить вместо $\overset{*}{\alpha}_{n\nu}(x)$ и $\overset{**}{\beta}_{n\nu}(x)$ соответствующие функции с черточками сверху.

При нахождении перемещений u и v в срединной поверхности использованы геометрические соотношения теории пологой

цилиндрической оболочки [1], [3], которые в безразмерных координатах имеют вид:

$$\begin{aligned}
 R_1 \varepsilon_\rho &= \frac{\partial u}{\partial \rho} + \kappa \omega \sin^2 \Theta \\
 R_1 \varepsilon_\Theta &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \Theta} + \frac{u}{\rho} + \kappa \omega \cos^2 \Theta \\
 R_1 \gamma_{\rho\Theta} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \Theta} + \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} + \kappa \omega \sin 2\Theta.
 \end{aligned} \quad (15)$$

Деформации срединной поверхности ε_ρ , ε_Θ и $\gamma_{\rho\Theta}$ определялись из закона Гука через N_ρ , N_Θ и T . После этого перемещения u и v , соответствующие решениям F_1 , F_2 , F_3 и F_4 , отыскивались в виде рядов:

$$\begin{aligned}
 u_1(\rho, \Theta) &= \sum_{\nu=1, 3, 5, \dots}^{\infty} u_{1\nu}(\rho) \cos \nu \Theta & v_1(\rho, \Theta) &= \sum_{\nu=1, 3, 5, \dots}^{\infty} v_{1\nu}(\rho) \sin \nu \Theta \\
 u_2(\rho, \Theta) &= \sum_{\nu=0, 2, 4, \dots}^{\infty} u_{2\nu}(\rho) \cos \nu \Theta & v_2(\rho, \Theta) &= \sum_{\nu=2, 4, 6, \dots}^{\infty} v_{2\nu}(\rho) \sin \nu \Theta \\
 u_3(\rho, \Theta) &= \sum_{\nu=1, 3, 5, \dots}^{\infty} u_{3\nu}(\rho) \sin \nu \Theta & v_3(\rho, \Theta) &= - \sum_{\nu=1, 3, 5, \dots}^{\infty} v_{3\nu}(\rho) \cos \nu \Theta \\
 u_4(\rho, \Theta) &= \sum_{\nu=2, 4, 6, \dots}^{\infty} u_{4\nu}(\rho) \sin \nu \Theta & v_4(\rho, \Theta) &= - \sum_{\nu=0, 2, 4, \dots}^{\infty} v_{4\nu}(\rho) \cos \nu \Theta.
 \end{aligned} \quad (16)$$

Подстановка рядов (16) в (15) дает

$$\begin{aligned}
 u_{1\nu}(\rho) &= (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{\kappa x}{8\omega(\nu^2-1)} \sum_{n=0}^{\infty} \{ a_n [\overset{*}{S}_{2, n\nu}(x) + \overset{*}{S}_{3, n\nu}(x)] + \\
 &\quad + b_n [\overset{*}{S}_{1, n\nu}(x) - \overset{*}{S}_{4, n\nu}(x)] \} \\
 v_{1\nu}(\rho) &= (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{\kappa x}{8\omega\nu(\nu^2-1)} \sum_{n=0}^{\infty} \{ a_n [\overset{*}{S}_{6, n\nu}(x) + \overset{*}{S}_{7, n\nu}(x)] + \\
 &\quad + b_n [\overset{*}{S}_{5, n\nu}(x) - \overset{*}{S}_{8, n\nu}(x)] \},
 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 u_{2\nu}(\rho) &= (-1)^{\frac{\nu}{2}} \frac{\kappa x}{8\omega(\nu^2-1)} \sum_{n=0}^{\infty} \{ c_n [\bar{S}_{2, n\nu}(x) + \bar{S}_{3, n\nu}(x)] + \\
 &\quad + d_n [\bar{S}_{1, n\nu}(x) - \bar{S}_{4, n\nu}(x)] \} \\
 v_{2\nu}(\rho) &= (-1)^{\frac{\nu}{2}} \frac{\kappa x}{8\omega\nu(\nu^2-1)} \sum_{n=0}^{\infty} \{ c_n [\bar{S}_{6, n\nu}(x) + \bar{S}_{7, n\nu}(x)] + \\
 &\quad + d_n [\bar{S}_{5, n\nu}(x) - \bar{S}_{8, n\nu}(x)] \},
 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
u_{3\nu}(\rho) &= (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{x^{\nu-1}}{8\omega\nu(\nu^2-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n [\bar{S}_{2, n\nu}(x) + \bar{S}_{3, n\nu}(x)] + \\
&\quad + b_n [\bar{S}_{1, n\nu}(x) - \bar{S}_{4, n\nu}(x)]\} \\
v_{3\nu}(\rho) &= (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{x^{\nu-1}}{8\omega\nu(\nu^2-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n [\bar{S}_{6, n\nu}(x) + \bar{S}_{7, n\nu}(x)] + \\
&\quad + b_n [\bar{S}_{5, n\nu}(x) - \bar{S}_{8, n\nu}(x)]\}, \quad (19) \\
u_{4\nu}(\rho) &= (-1)^{\frac{\nu}{2}} \frac{x^{\nu}}{8\omega(\nu^2-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \{c_n [\bar{S}_{2, n\nu}^*(x) + \bar{S}_{3, n\nu}^*(x)] + \\
&\quad + b_n [\bar{S}_{1, n\nu}^*(x) - \bar{S}_{4, n\nu}^*(x)] \\
v_{4\nu}(\rho) &= (-1)^{\frac{\nu}{2}} \frac{x^{\nu}}{8\omega\nu(\nu^2-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \{c_n [\bar{S}_{6, n\nu}^*(x) + \bar{S}_{7, n\nu}^*(x)] + \\
&\quad + d_n [\bar{S}_{5, n\nu}^*(x) - \bar{S}_{8, n\nu}^*(x)]\}, \quad (20)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{S}_{1, n\nu}^* &= -\alpha_{n\nu}^* + \frac{(2+\mu)\nu^2+1-\mu}{x} \alpha_{n\nu}^* - \frac{3\nu^2}{x^2} \alpha_{n\nu}^* \\
\bar{S}_{3, n\nu}^* &= 4\alpha_{n\nu}^* + 2(2\nu+1)\alpha_{n, \nu+2}^* - 2(2\nu-1)\alpha_{n, \nu-2}^* - \\
&\quad - 4x\alpha_{n\nu}^* + 2x\alpha_{n, \nu+2}^* + 2x\alpha_{n, \nu-2}^* \\
\bar{S}_{5, n\nu}^* &= -\bar{S}_{1, n\nu}^* - (\nu^2-1) \left[\alpha_{n\nu}^* - \frac{\mu}{x} \alpha_{n\nu}^* + \frac{\mu\nu^2}{x^2} \alpha_{n\nu}^* \right] \\
\bar{S}_{7, n\nu}^* &= -\bar{S}_{3, n\nu}^* - 2(\nu^2-1) [2\alpha_{n\nu}^* - \alpha_{n, \nu+2}^* - \\
&\quad - \alpha_{n, \nu-2}^*]. \quad (21)
\end{aligned}$$

Функции $\bar{S}_{2, n\nu}^*(x)$, $\bar{S}_{4, n\nu}^*(x)$... определяются по (21), если в формулах для $\bar{S}_{1, n\nu}^*(x)$, $\bar{S}_{3, n\nu}^*(x)$... заменить $\alpha_{n\nu}^*(x)$ на $\beta_{n\nu}^*(x)$. Для нахождения $\bar{S}_{1, n\nu}^*(x)$, $\bar{S}_{2, n\nu}^*(x)$ и т. д. в (21) подставляются вместо $\alpha_{n\nu}^*(x)$ и $\beta_{n\nu}^*(x)$ соответствующие функции с черточками сверху.

Равенства (17) и (19) справедливы при $\nu \geq 3$, а равенства (18) — при $\nu \geq 2$. Для остальных интересующих нас величин имеем

$$\begin{aligned}
u_{1,1}(\rho) &= \frac{x^{\nu}}{16\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \{a_n [\bar{S}_{10, n}^*(x) + \bar{S}_{11, n}^*(x)] + b_n [\bar{S}_{9, n}^*(x) - \bar{S}_{12, n}^*(x)]\} \\
v_{1,1}(\rho) &= -\frac{x^{\nu}}{16\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \{a_n [\bar{S}_{14, n}^*(x) + \bar{S}_{15, n}^*(x)] + b_n [\bar{S}_{13, n}^*(x) - \bar{S}_{16, n}^*(x)]\}
\end{aligned}$$

$$u_{2,0}(\rho) = \frac{\nu x}{16\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \{c_n [S_{18,n}(x) + S_{19,n}(x)] + d_n [S_{17,n}(x) - S_{20,n}(x)]\}$$

$$u_{3,1} = \frac{\nu x}{16\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n [\bar{S}_{10,n}(x) + S_{21,n}(x)] + b_n [\bar{S}_{9,n}(x) - S_{22,n}(x)]\}$$

$$v_{3,1} = -\frac{\nu x}{16\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \bar{S}_{14,n}(x) + S_{23,n}(x) + b_n [\bar{S}_{13,n}(x) - S_{24,n}(x)]\}$$

$$v_{4,0}(\rho) = -\frac{\nu x}{2\omega} \sum_{n=1}^{\infty} [c_n S_{26,n}(x) + d_n S_{25,n}(x)],$$

где

$$\bar{S}_{9,n}(x) = -\bar{\alpha}_{n1}^*(x) + \frac{1+2\mu}{x} \bar{\alpha}_{n1}^*(x) + \frac{1}{x^2} \bar{\alpha}_{n1}^*(x)$$

$$S_{11,n}(x) = -2 [3\bar{\alpha}_{n1}^*(x) - \bar{\alpha}_{n3}^*(x)] + \frac{2}{x} [\bar{\alpha}_{n0}(x) + \bar{\beta}_{n0}(x) - \frac{4}{\pi} \ln x]$$

$$S_{13,n}(x) = -\bar{S}_{9,n}(x) + \frac{2(1+\mu)}{x} [\bar{\alpha}_{n1}^*(x) + \frac{1}{x} \bar{\alpha}_{n1}^*(x)]$$

$$S_{15,n}(x) = S_{11,n}(x) + 4 [3\bar{\alpha}_{n1}^*(x) - \bar{\alpha}_{n3}^*(x)]$$

$$S_{17,n}(x) = -\bar{\alpha}_{n0}(x) + \frac{\mu}{x} \bar{\alpha}_{n0}(x)$$

$$S_{19,n}(x) = 4 [\bar{\alpha}_{n2}(x) - \bar{\alpha}_{n0}(x)]$$

$$S_{21,n}(x) = -2\bar{\alpha}_{n1}(x) + 2\bar{\alpha}_{n3}(x) + \frac{4}{x} \sum_{k=0}^n \varepsilon_k [\bar{\alpha}_{k0}(x) + \bar{\beta}_{k0}(x)]$$

$$\left(\varepsilon_k = \frac{1}{2} \text{ при } k = \begin{Bmatrix} 0 \\ n \end{Bmatrix}, \varepsilon_k = 1 \text{ при } k \neq \begin{Bmatrix} 0 \\ n \end{Bmatrix} \right)$$

$$S_{23,n}(x) = S_{21,n}(x) + 4 [\bar{\alpha}_{n1}(x) - \bar{\alpha}_{n3}(x)] \text{ и т. д.} \quad (23)$$

$$S_{25,n} = \frac{n}{\pi q_n} + \frac{n}{2x^2} \bar{\alpha}_{n0}(x)$$

$$S_{26,n} = \frac{n}{\pi x^2} + \frac{n}{2x^2} \bar{\beta}_{n0}(x)$$

$$(q_n = 4 \text{ при } n = 1, q_n = n^2 - 1 \text{ при } n \neq 1).$$

Из рассмотрения перемещений, соответствующих решению F_1 , получено дополнительное соотношение вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) = 0. \quad (24)$$

Для определения функций $\bar{\alpha}_{nv}^*(x)$, $\bar{\alpha}_{nv}^*(x)$, $\bar{\beta}_{nv}(x)$, $\bar{\beta}_{nv}^*(x)$ и их производных выведены рекуррентные зависимости. Исходные для рас-

чета величины находятся через функции Томсона и их производные по формулам

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{0,0}(x) &= -\frac{4}{\pi} [\operatorname{kei}(x\sqrt{2}) \operatorname{ber}(x\sqrt{2}) + \operatorname{ker}(x\sqrt{2}) \operatorname{bei}(x\sqrt{2})] \\ \bar{\alpha}_{1,0}(x) &= \frac{4}{\pi} [\operatorname{kei}'(x\sqrt{2}) \operatorname{bei}'(x\sqrt{2}) - \operatorname{ker}'(x\sqrt{2}) \operatorname{ber}'(x\sqrt{2})] \\ \alpha_{0,1}^*(x) &= -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \{ [\operatorname{ber}'(x\sqrt{2}) + \operatorname{bei}'(x\sqrt{2})] \operatorname{ker}(x\sqrt{2}) + \\ &\quad + [\operatorname{ber}'(x\sqrt{2}) - \operatorname{bei}'(x\sqrt{2})] \operatorname{kei}(x\sqrt{2}) \} \\ \bar{\sigma}_{1,1}(x) &= \frac{2}{\pi x} \{ [\operatorname{ber}'(x\sqrt{2}) + \operatorname{bei}'(x\sqrt{2})] \operatorname{kei}'(x\sqrt{2}) - \\ &\quad - [\operatorname{ber}'(x\sqrt{2}) - \operatorname{bei}'(x\sqrt{2})] \operatorname{ker}'(x\sqrt{2}) \} \\ \alpha_{1,1}^*(x) &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \{ [\operatorname{ker}'(x\sqrt{2}) - \operatorname{kei}'(x\sqrt{2})] \operatorname{bei}(x\sqrt{2}) + \\ &\quad + [\operatorname{ker}'(x\sqrt{2}) + \operatorname{kei}'(x\sqrt{2})] \operatorname{ber}(x\sqrt{2}) \} - \bar{\sigma}_{1,1}(x). \quad (25) \end{aligned}$$

Еще одна группа расчетных формул получается из (25), если заменить $\bar{\sigma}_{n\nu}(x)$ и $\alpha_{n\nu}^*(x)$ соответственно на $\bar{\beta}_{n\nu}(x)$ и $\beta_{n\nu}^*(x)$, $\operatorname{bei}(x\sqrt{2})$ на $\operatorname{ber}(x\sqrt{2})$, а $\operatorname{ber}(x\sqrt{2})$ на $\operatorname{bei}(x\sqrt{2})$ со знаком минус. Кроме того, следует иметь в виду, что $\alpha_{n0}^*(x) = \beta_{n0}^*(x) = 0$, $\bar{\alpha}_{0\nu}(x) = \bar{\beta}_{0\nu}(x) = 0$ при нечетных ν , $\alpha_{0\nu}^*(x) = \beta_{0\nu}^*(x) = 0$ при четных ν .

Рекуррентные соотношения для определения основных функций имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{n,\nu+1}(x) &= \frac{n}{x} [\bar{\alpha}_{n\nu}(x) + \bar{\beta}_{n\nu}(x)] - \frac{\nu}{x} [\alpha_{n\nu}^*(x) + \beta_{n\nu}^*(x)] - \bar{\alpha}_{n,\nu-1}(x) \\ \alpha_{n,\nu+1}^*(x) &= \frac{n}{x} [\alpha_{n\nu}^*(x) + \beta_{n\nu}^*(x)] - \frac{\nu}{x} [\bar{\alpha}_{n\nu}(x) + \\ &\quad + \bar{\beta}_{n\nu}(x)] - \alpha_{n,\nu-1}^*(x). \quad (26) \end{aligned}$$

При расчете по формулам (26) следует, помимо исходных величин (25), воспользоваться зависимостями

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{n0}(x) &= \frac{n-1}{x} [\bar{\alpha}_{n-1,1}(x) + \bar{\beta}_{n-1,1}(x) - \alpha_{n-1,1}^*(x) - \\ &\quad - \beta_{n-1,1}^*(x)] - \bar{\alpha}_{n-2,2}(x) + \alpha_{n-2,2}^*(x) \\ \bar{\alpha}_{n1}(x) &= \frac{n}{2x} [\bar{\alpha}_{n0}(x) + \bar{\beta}_{n0}(x)] \\ \alpha_{n1}^*(x) &= -\bar{\alpha}_{n1}(x) + 2\bar{\alpha}_{n-1,1}(x) - \bar{\alpha}_{n-2,1}(x) - \alpha_{n-2,1}^*(x). \quad (27) \end{aligned}$$

Производные основных функций k -того порядка определяются рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{n,\nu+1}^{(k)}(x) &= \frac{n}{x} [\bar{\alpha}_{n\nu}^{(k)}(x) + \bar{\beta}_{n\nu}^{(k)}(x)] - \frac{\nu}{x} [\alpha_{n\nu}^{*(k)}(x) + \beta_{n\nu}^{*(k)}(x)] - \\ &\quad - \frac{k}{x} [\bar{\alpha}_{n,\nu+1}^{(k-1)}(x) + \bar{\alpha}_{n,\nu-1}^{(k-1)}(x)] - \bar{\alpha}_{n,\nu-1}^{(k)}(x) \end{aligned}$$

$$\alpha_{n, \nu+1}^{*(k)}(x) = \frac{n}{x} [\alpha_{n\nu}^{*(k)}(x) + \beta_{n\nu}^{*(k)}(x)] - \frac{\nu}{x} [\bar{\alpha}_{n\nu}^{(k)}(x) + \bar{\beta}_{n\nu}^{(k)}(x)] - \frac{k}{x} [\alpha_{n, \nu+1}^{*(k-1)}(x) + \alpha_{n, \nu-1}^{*(k-1)}(x)] - \alpha_{n, \nu-1}^{*(k)}(x). \quad (28)$$

Чтобы воспользоваться формулами (28), нужно предварительно подсчитать производные, соответствующие $\nu=0$ и $\nu=1$:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}'_{n0}(x) &= 2 [\alpha'_{n1}(x) - \beta'_{n1}(x)], \\ \bar{\beta}'_{n0}(x) &= 2 [\alpha'_{n1}(x) + \beta'_{n1}(x)] + \frac{4}{\pi x}, \\ \bar{\alpha}''_{n0}(x) &= -\frac{2n+1}{x} \bar{\alpha}'_{n0}(x) + 4\bar{\beta}'_{n0}(x) - 4\bar{\beta}'_{n-1,0}(x) \\ \bar{\alpha}'''_{n0}(x) &= -\frac{3}{x} \bar{\alpha}''_{n0}(x) + \frac{4n^2-1}{x^2} \bar{\alpha}'_{n0}(x) + 8\bar{\beta}'_{n0}(x) + \frac{8}{x} \bar{\beta}'_{n0}(x) \\ \bar{\alpha}^{IV}_{n0}(x) &= \frac{4n^2+11}{x^2} \bar{\alpha}''_{n0}(x) - \frac{5(4n^2-1)}{x^3} \bar{\alpha}'_{n0}(x) + 8\bar{\beta}'_{n0}(x) - \\ &\quad - \frac{16}{x} \bar{\beta}'_{n0}(x) - \frac{32}{x^2} \bar{\beta}'_{n0}(x) \\ \alpha_{n0}^{*(k)}(x) &= \beta_{n0}^{*(k)}(x) = 0 \\ \bar{\alpha}^{(k)}_{n1}(x) &= \frac{n}{2x} [\bar{\alpha}_{n0}^{(k)}(x) + \bar{\beta}_{n0}^{(k)}(x)] - \frac{k}{x} \bar{\alpha}_{n1}^{(k-1)}(x) \\ \alpha_{n1}^{*(k)}(x) &= \frac{1}{4} [\bar{\alpha}_{n0}^{(k+1)}(x) + \bar{\beta}_{n0}^{(k+1)}(x)] - \frac{(-1)^k \cdot k!}{\pi x^{k+1}}. \end{aligned} \quad (30)$$

В (26), (27), (28) и (30) выписаны лишь формулы для подсчета функций $\alpha^*(x)$, $\bar{\alpha}(x)$ и их производных. Остальные интересующие нас соотношения могут быть из них получены заменой $\alpha^*(x)$ и $\bar{\alpha}(x)$ соответственно на $\beta^*(x)$ и $\bar{\beta}(x)$, а функций $\beta^*(x)$ и $\bar{\beta}(x)$ на $\alpha^*(x)$ и $\bar{\alpha}(x)$ со знаком минус. При нахождении $\alpha_{0,0}^*(x)$ и $\beta_{0,0}^*(x)$ нужно учесть, что $\bar{\alpha}_{(-1),0}(x) = \bar{\alpha}_{1,0}(x)$, $\bar{\beta}_{(-1),0}(x) = \bar{\beta}_{1,0}(x)$. Под производной функцией нулевого порядка в (28) и (30) следует понимать саму функцию.

Как указывалось ранее, в дополнительном напряженном состоянии по краю отверстия должна быть приложена соответствующая рассматриваемой задаче внешняя нагрузка, главный вектор и главный момент которой равны нулю. Если внешнюю нагрузку разложить в ряд Фурье, то для определения постоянных a_n, b_n, c_n, d_n получатся бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. В практических расчетах можно внутренние усилия и внешнюю нагрузку представить в виде усеченных рядов, ограничив суммирование до $n=\nu=h$, где h — число, зависящее от степени сходимости решения.

Граничные условия целесообразно записывать для частных видов нагружения оболочки. Нагрузка, симметричная относительно ξ

и обратносимметричная относительно η , может быть представлена рядами

$$m_c(\Theta) = \sum_{v=1,3,5\dots}^h m_v \cos v\Theta \quad q_p(\Theta) = \sum_{v=1,3,5\dots}^h q_v \cos v\Theta$$

$$n_c(\Theta) = \sum_{v=1,3,5\dots}^h n_v \cos v\Theta \quad t(\Theta) = \sum_{v=1,3,5\dots}^h t_v \sin v\Theta. \quad (31)$$

В этом случае граничные условия дают для определения a_n и b_n систему уравнений

$$\sum_{n=0}^h [a_n \bar{f}_{1, nv}^*(\omega) - b_n \bar{f}_{2, nv}^*(\omega)] = (-1)^{\frac{v+1}{2}} \hat{m}_v \quad (v = 1, 3, 5 \dots h)$$

$$\sum_{n=0}^h [a_n \bar{f}_{3, nv}^*(\omega) - b_n \bar{f}_{4, nv}^*(\omega)] = (-1)^{\frac{v+1}{2}} \hat{q}_v \quad (v = 1, 3, 5 \dots h)$$

$$\sum_{n=0}^h [a_n \bar{f}_{6, nv}^*(\omega) + b_n \bar{f}_{5, nv}^*(\omega)] = (-1)^{\frac{v+1}{2}} \hat{n}_v \quad (v = 1, 3, 5 \dots h).$$

$$\sum_{n=0}^h [a_n \bar{f}_{8, nv}^*(\omega) + b_n \bar{f}_{7, nv}^*(\omega)] = (-1)^{\frac{v+1}{2}} \hat{t}_v \quad (v = 3, 5, \dots 7 \dots), \quad (32)$$

где

$$\hat{m}_v = \frac{64\omega^2\lambda}{\lambda^2 ER} m_v \quad \hat{q}_v = \frac{64\omega\lambda}{\lambda E} q_v$$

$$\hat{n}_v = \frac{8\omega\lambda}{E} n_v \quad \hat{t}_v = \frac{8\omega\lambda}{\lambda E} t_v. \quad (33)$$

Обозначения (33) используются и для остальных частных случаев нагружения. За положительные направления внешней нагрузки, приложенной по контуру отверстия, приняты положительные направления соответствующих внутренних усилий.

Обратим внимание на то, что $\bar{f}_{5, n1}^*(\omega) = \bar{f}_{7, n1}^*(\omega)$, $\bar{f}_{6, n1}^*(\omega) = \bar{f}_{8, n1}^*(\omega)$, вследствие чего должно быть $\hat{n}_1 = \hat{t}_1$. Для получения полной системы уравнений к (33) следует на основании (24) добавить равенство

$$\sum_{n=0}^h (a_n - b_n) = 0. \quad (34)$$

Если внешняя нагрузка симметрична относительно ξ и η , то имеем

$$m_p(\Theta) = \sum_{v=0,2,4\dots}^h m_v \cos v\Theta \quad q_p(\Theta) = \sum_{v=0,2,4}^h q_v \cos v\Theta$$

$$n_p(\Theta) = \sum_{v=0,2,4\dots}^h n_v \cos v\Theta \quad t(\Theta) = \sum_{v=2,4,6\dots}^h t_v \sin v\Theta. \quad (35)$$

Постоянные c_n и d_n определяются из системы уравнений

$$\sum_{n=0}^h [c_n \bar{f}_{1, nv}(\omega) - d_n \bar{f}_{2, nv}(\omega)] = (-1)^{1+\frac{v}{2}} \frac{\hat{m}_v}{k_v} \quad (v = 0, 2, 4 \dots h)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^h [c_n \bar{f}_{3, n\nu}(\omega) - d_n \bar{f}_{4, n\nu}(\omega)] &= (-1)^{1+\frac{\nu}{2}} \frac{\hat{q}_\nu}{k_\nu} \quad (\nu = 0, 2, 4 \dots h) \\ \sum_{n=0}^h [c_n \bar{f}_{6, n\nu}(\omega) + d_n \bar{f}_{5, n\nu}(\omega)] &= (-1)^{1+\frac{\nu}{2}} \hat{n}_\nu \quad (\nu = 2, 4, 6 \dots h) \\ \sum_{n=0}^h [c_n \bar{f}_{8, n\nu}(\omega) + d_n \bar{f}_{7, n\nu}(\omega)] &= (-1)^{1+\frac{\nu}{2}} \hat{t}_\nu \quad (\nu = 2, 4, 6 \dots h). \end{aligned} \quad (36)$$

В силу линейной зависимости соответствующих уравнений, в этом случае должны соблюдаться соотношения

$$-\hat{q}_0 + 4\hat{n}_0 - 2\hat{n}_2 + 4\hat{t}_2 = 0. \quad (37)$$

Решение ряда конкретных задач показало, что эта зависимость действительно имеет место.

Для внешней нагрузки, симметричной относительно η и обратнoсимметричной относительно ξ , получим

$$\begin{aligned} m_\rho(\Theta) &= \sum_{\nu=1, 3, 5 \dots}^h m_\nu \sin \nu\Theta & q_\rho(\Theta) &= \sum_{\nu=1, 3, 5 \dots}^h q_\nu \sin \nu\Theta \\ n_\rho(\Theta) &= \sum_{\nu=1, 3, 5 \dots}^h n_\nu \sin \nu\Theta & t(\Theta) &= \sum_{\nu=1, 3, 5 \dots}^h t_\nu \cos \nu\Theta. \end{aligned} \quad (38)$$

Граничные условия дают здесь систему уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^n [a_n \bar{f}_{1, n\nu}(\omega) - c_n \bar{f}_{2, n\nu}(\omega)] &= (-1)^{\frac{\nu+1}{2}} \hat{m} \quad (\nu = 1, 3, 5 \dots h) \\ \sum_{n=1}^h [a_n \bar{f}_{3, n\nu}(\omega) - c_n \bar{f}_{4, n\nu}(\omega)] &= (-1)^{\frac{\nu+1}{2}} q_\nu \quad (\nu = 1, 3, 5 \dots h) \\ \sum_{n=1}^h [a_n \bar{f}_{6, n\nu}(\omega) + b_n \bar{f}_{5, n\nu}(\omega)] &= (-1)^{\frac{\nu+1}{2}} \hat{n}_\nu \quad (\nu = 3, 5, 7 \dots h) \\ \sum_{n=1}^h [a_n \bar{f}_{8, n\nu}(\omega) + b_n \bar{f}_{7, n\nu}(\omega)] &= -(-1)^{\frac{\nu+1}{2}} \hat{t}_\nu \quad (\nu = 3, 5, 7 \dots h). \end{aligned} \quad (39)$$

При этом должно быть

$$\begin{aligned} \hat{q}_1 + \hat{t}_1 &= 0 \\ \omega \hat{m}_1 - \hat{q}_1 + 2\hat{n}_1 - n_3 - 3\hat{t}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Наконец, при обратнoсимметричной относительно ξ и η внешней нагрузке получим

$$\begin{aligned} m_\rho(\Theta) &= \sum_{\nu=2, 4, 6 \dots}^h m_\nu \sin \nu\Theta & q_\rho(\Theta) &= \sum_{\nu=2, 4, 6 \dots}^h q_\nu \sin \nu\Theta \\ n_\rho(\Theta) &= \sum_{\nu=2, 4, 6 \dots}^h n_\nu \cos \nu\Theta & t(\Theta) &= \sum_{\nu=2, 4, 6 \dots}^h t_\nu \cos \nu\Theta, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\sum_{n=1}^h [c_n^* \hat{f}_{1, n\nu}(\omega) - d_n^* \hat{f}_{2, n\nu}(\omega)] = (-1)^{1+\frac{\nu}{2}} m_\nu \quad (\nu = 2, 4 \dots h)$$

$$\sum_{n=1}^h [c_n^* \hat{f}_{3, n\nu}(\omega) - d_n^* \hat{f}_{4, n\nu}(\omega)] = (-1)^{1+\frac{\nu}{2}} \hat{q}_\nu \quad (\nu = 2, 4 \dots h)$$

$$\sum_{n=1}^h [c_n^* \hat{f}_{6, n\nu}(\omega) + d_n^* \hat{f}_{5, n\nu}(\omega)] = (-1)^{1+\frac{\nu}{2}} \hat{n}_\nu \quad (\nu = 2, 4 \dots h)$$

$$\sum_{n=1}^h [c_n^* \hat{f}_{8, n\nu}(\omega) + d_n^* \hat{f}_{7, n\nu}(\omega)] = -(-1)^{1+\frac{\nu}{2}} \hat{t}_\nu \quad (\nu = 2, 4 \dots h). \quad (42)$$

Полученные соотношения для усилий и перемещений, а также системы уравнений, вытекающие из граничных условий, легко программируются, вследствие чего числовые расчеты для конкретных задач можно выполнять на ЭЦВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Лурье. Статика тонкостенных упругих оболочек. ОГИЗ, Москва—Ленинград, 1947.
2. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий в оболочках. Теория пластин и оболочек, Труды II Всесоюзной конференции. Издательство АН УССР, Киев, 1962.
3. Г. Н. Савин, Н. П. Флейшман. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. Наукова думка, Киев, 1964.
4. Г. М. Савин, О. М. Гузь. Допитання про концентрацію напружень навколо отворів у циліндричній оболонці. Доповіді АН УРСУ, № 11, 1964.
5. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в пластинах и оболочках. Концентрация напряжений (сборник), выпуск 1. Наукова думка, Киев, 1965.
6. П. Ван-Дейк. Напряжения около круглого отверстия в цилиндрической оболочке. Ракетная техника и космонавтика, журнал Американского института аэродинамики и космонавтики, русский перевод, издательство «Мир», № 9, 1965.
7. A. K. Naghdi and A. C. Eringen, Stress Distribution in a Circular Cylindrical Shell with a Circular Cutout, Ingenieur — Archiw, 34, № 3, 1965.

