

Х. С. ХАЗАНОВ

К ИЗГИБУ ИСКРИВЛЕННЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН

Обозначения

- R, h — радиус срединной поверхности искривленной пластины и ее толщина,
 R_0 — радиус пластины,
 $\lambda = \frac{R}{h}, \kappa = \frac{R_0}{R}$ — безразмерные параметры пластины,
 ξ, η — декартовы координаты точек срединной поверхности с началом в центре пластины, ось ξ направлена по образующей срединной поверхности,
 r, θ — полярные на развертке цилиндра координаты, угол θ отсчитывается образующей,
 $\rho = \frac{r}{R_0}$ — безразмерная координата,
 μ — коэффициент Пуассона,
 $\sigma_\rho^M, \sigma_\theta^M$ — изгибные нормальные напряжения от моментов M_ρ и M_θ ,
 $\tau_{\rho\theta}^H$ — касательные напряжения от крутящего момента H ,
 $\sigma_\rho^N, \sigma_\theta^N, \tau_{\rho\theta}^T$ — напряжения в срединной поверхности от нормальных сил N_ρ, N_θ и касательной силы T .

Рассматривается круглая панель пологой цилиндрической оболочки под действием краевой нагрузки. Для исследования её напряжённого состояния используется дифференциальное уравнение тонкой пологой цилиндрической оболочки относительно комплексной функции $F = \omega + i\varphi$ [2, 3] где ω — нормальное к срединной поверхности перемещение, φ — функция напряжений.

В [4] показано, что в полярных на развертке цилиндра координатах решение дифференциального уравнения может быть представлено в виде тригонометрических рядов, коэффициенты которых определяются через возрастающие или убывающие с ростом ρ функции. При $\rho = 0$ убывающие функции либо сами стремятся к бесконечности, либо стремятся к бесконечности опреде-

лиемые с их помощью усилия. Вследствие этого в рассматриваемой задаче удерживается лишь та часть решения, которая содержит возрастающие функции. Для внешней нагрузки, симметричной относительно ξ и обратно-симметричной относительно η имеем

$${}^*w(\rho, \theta) = \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} {}^*w_{\nu}(x) \cos \nu\theta, \quad {}^*\varphi(\rho, \theta) = \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} {}^*\varphi_{\nu}(x) \cos \nu\theta, \quad (1)$$

где

$$x = \omega\rho, \quad \omega = \frac{1}{2} \sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \times \sqrt{\lambda}$$

$${}^*w_{\nu}(x) = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} [a_n {}^*\sigma_{n\nu}(x) - b_n {}^*\tau_{n\nu}(x)]$$

$${}^*\varphi_{\nu}(x) = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} [a_n {}^*\tau_{n\nu}(x) + b_n {}^*\sigma_{n\nu}(x)]. \quad (2)$$

a_n, b_n — постоянные, определяемые из граничных условий задачи.

Если же внешняя нагрузка обратно-симметрична относительно ξ и симметрична относительно η , то

$$\bar{w}(\rho, \theta) = \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} \bar{w}_{\nu}(x) \sin \nu\theta$$

$$\bar{\varphi}(\rho, \theta) = \sum_{\nu=1,3,5,\dots}^{\infty} \bar{\varphi}_{\nu}(x) \sin \nu\theta, \quad (3)$$

где

$$\bar{w}_{\nu}(x) = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \bar{\sigma}_{n\nu}(x) - b_n \bar{\tau}_{n\nu}(x)]$$

$$\bar{\varphi}_{\nu}(x) = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \bar{\tau}_{n\nu}(x) + b_n \bar{\sigma}_{n\nu}(x)]. \quad (4)$$

Функции, входящие в (2) и (4), представляют собой, как показано*, действительную и мнимую части линейных комбинаций произведений функций Бесселя аргумента $x\sqrt{2i}$ с соответствующими индексами. Для их подсчёта могут быть использованы следующие формулы:

$${}^*\sigma_{n\nu}(x) = (-1)^{\nu} [ber_n y (ber_{n-\nu} y - ber_{n+\nu} y) -$$

$$- bei_n y (bei_{n-\nu} y - bei_{n+\nu} y)]$$

$${}^*\tau_{n\nu}(x) = -(-1)^{\nu} [ber_n y (bei_{n-\nu} y - bei_{n+\nu} y) +$$

$$+ bei_n y (ber_{n-\nu} y - ber_{n+\nu} y)], \quad (5)$$

где $y = x\sqrt{2}$.

* Х. С. Хазанов. Напряженное состояние цилиндрической оболочки с подкрепленным круглым отверстием. Наст. сб., стр. 3.

Формулы для $\bar{\sigma}(x)$ и $\bar{\tau}(x)$ могут быть получены из (5), если перед вторыми членами в круглых скобках знак минус заменить на плюс. Ряды для подсчета функций, входящих в (5), приведены в [1]. При $x \rightarrow 0$, отбрасывая в рядах члены высшего порядка малости, имеем

$$\overset{*}{\sigma}_{0,1}(x) = \overset{*}{\tau}_{0,1}(x) = -x, \overset{*}{\sigma}_{1,1}(x) = \overset{*}{\tau}_{1,1}(x) = \overset{*}{\sigma}_{1,1}(x) = \overset{*}{\tau}_{1,1}(x) = \frac{x}{2}. \quad (6)$$

Через функцию напряжений φ определяются по известным формулам усилия в срединной поверхности, а через ω — моменты и перерезывающие силы. Их можно подсчитать по соответствующим рядам работы [3], в которых следует заменить $\overset{*}{\alpha}_{nv}(x)$ и $\bar{\alpha}_{nv}(x)$, на $\overset{*}{\sigma}_{nv}(x)$ и $\bar{\sigma}_{nv}(x)$, а $\overset{*}{\beta}_{nv}(x)$ и $\bar{\beta}_{nv}(x)$ на $\overset{*}{\tau}_{nv}(x)$ и $\bar{\tau}_{nv}(x)$. Заметим, что внутренние усилия, вытекающие из решений (1) и (3), будучи приложены по замкнутому контуру $\rho = \text{const}$, тождественно удовлетворяют всем уравнениям равновесия, а перемещения в срединной поверхности удовлетворяют условиям однозначности.

Внешнюю нагрузку, приложенную по краю пластины, можно разложить в ряды по $\cos v\theta$ и $\sin v\theta$. Если теперь внутренние силы при $\rho = 1$ приравнять соответствующим внешним усилиям, то относительно постоянных a_n и b_n получится бесконечная система линейных алгебраических уравнений. Чтобы получить конечную систему уравнений, нужно перейти от бесконечных рядов к усеченным.

Положив в решениях (1) $\Pi_{\max} = \nu_{\max} = k$, получим систему $2(k+1)$ уравнений с таким же числом неизвестных. То же получится, если в решениях (3) положить $\nu_{\max} = k$, а $\Pi_{\max} = k+1$. Однако в каждой из этих систем в силу линейной зависимости, вытекающей из самоуравновешенности внутренних сил, приложенных по замкнутому контуру $\rho = \text{const}$, следует по 2 уравнения опустить.

В варианте 1 системы уравнений недостающие соотношения между постоянными получим из условия конечности внутренних усилий при $\rho=0$. Использование выражений (6) дает при этом для решений (1) зависимости

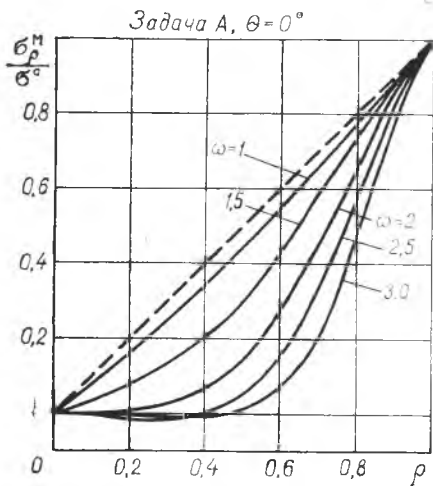
$$a_0 - \frac{a_1}{2} = 0, \quad b_0 - \frac{b_1}{2} = 0, \quad (7)$$

а для решений (3) имеем

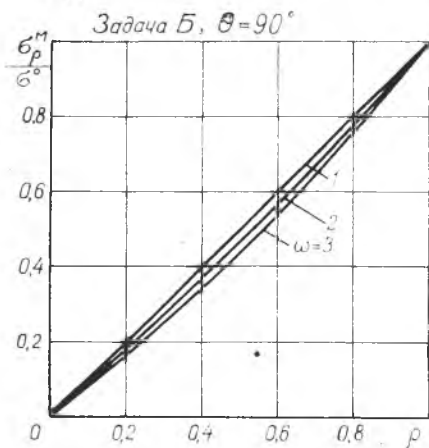
$$a_1 = b_1 = 0. \quad (8)$$

В варианте 2 системы уравнений, пренебрегая бесконечностью внутренних сил в начале координат, для решений (1) положим $\nu_{\max} = k$, $\Pi_{\max} = k-1$, а для решений (3) — $\nu_{\max} = \Pi_{\max} = k$.

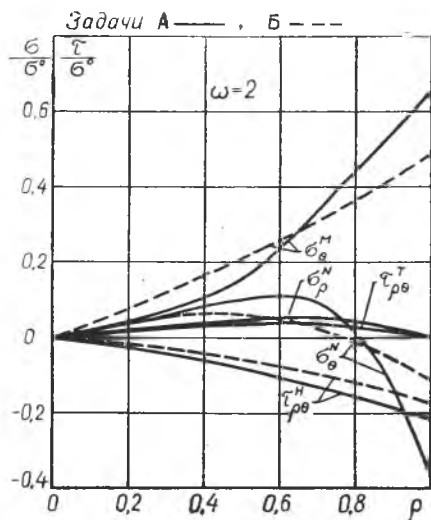
Задача была запрограммирована и просчитана на ЭЦВМ



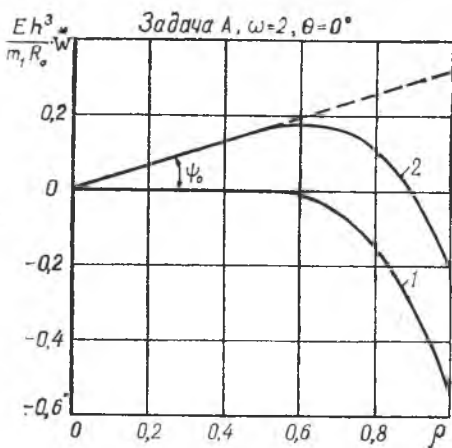
Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

«Урал — 2»*. Коэффициент Пуассона μ принимался равным 0,3. Конкретно были рассмотрены следующие случаи нагружения

$$A) m_\rho = m_1 \cos \theta, \quad q_\rho = \frac{m_1}{R_0} \cos \theta \text{ — с использованием решений (1),}$$

$$B) m_\rho = m_1 \sin \theta, \quad q_\rho = \frac{m_1}{R_0} \sin \theta \text{ — с использованием решений (3).}$$

Здесь m_ρ и q_ρ — погонные изгибающий момент и поперечная сила, приложенные по контуру пластины. Положительный момент m_ρ вызывает растяжение наружных волокон пластины, положительная нагрузка q_ρ направлена от оси срединной поверхности.

На фиг. 1 приведено изменение в зависимости от ρ максимальных изгибных напряжений σ_ρ^M на наружной поверхности пластины для задачи A ($\theta=0$), а на фиг. 2 — для задачи B ($\theta=90^\circ$). Из фиг. 1 видно, что при симметричной относительно ξ и обратно-симметричной относительно η внешней нагрузке закон изменения напряжений с ростом параметра ω всё более существенно отклоняется от линейного (штриховая линия), имеющего место при плоской пластине. При нагрузке же, обратно-симметричной относительно ξ и симметричной относительно η (фиг. 2), закон изменения напряжений близок к линейному даже при больших значениях ω . На графиках принято $\sigma^0 = 6 m_1/h^2$.

На фиг. 3 представлена зависимость от ρ максимальных изгибных напряжений на наружной поверхности пластины σ_ρ^M , напряжений кручения $\tau_{\rho\theta}^H$, а также нормальных σ_ρ^N , σ_θ^N и касательных $\tau_{\rho\theta}^T$ напряжений в срединной поверхности. Для задачи A приведены значения нормальных напряжений при $\theta=0$, касательных — при $\theta=90^\circ$, а для задачи B — наоборот. Напряжения в срединной поверхности с увеличением параметра ω возрастают, причём для задачи A в большей мере, чем для задачи B . Правда, существенных значений достигают лишь напряжения σ_θ^N . Напряжения σ_ρ^M и $\tau_{\rho\theta}^H$ в задаче A с ростом ω возрастают, а в задаче B — несколько падают.

Вычисления проводились с удержанием в рядах (1) и (3) различного числа членов. Сходимость решения вполне удовлетворительная. В случае $\omega = 3$ значения напряжений с точностью до третьей значащей цифры получились при 5 членах ряда. С уменьшением ω сходимость улучшается. Так, для $\omega = 2$ уже достаточно 4 членов ряда и т. д.

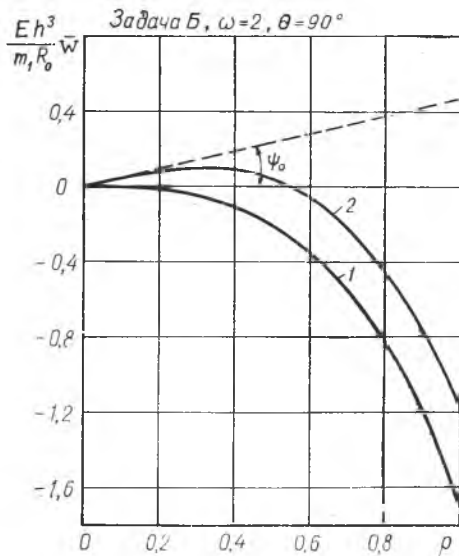
Графики на фиг. 1—3 построены после определения постоянных a_n и b_n из системы уравнений варианта 1. Напряжения, подсчитанные с использованием варианта 2, для $\rho \geq 0,2$ (для

* Программирование и вычисление на ЭЦМВ выполнены инженером Г. В. Кановой.

$\rho < 0,2$ вычисления не проводились) в точности совпадают с приведёнными на графиках.

На фиг. 4 (задача А) и фиг. 5 (задача Б) представлены графики изменения по ρ максимальных перемещений \bar{w} при $\omega = 2$. Обозначения на кривых соответствуют номеру варианта системы уравнений. Подобный вид имеют графики w_{\max} и при иных значениях параметра ω . Анализ числового материала показывает, что расчёты по вариантам 1 и 2 дают расхождение лишь в коэффициентах первых гармоник перемещений w . С учетом этого замечания можно сделать вывод, что кривые 1 и 2 на фиг. 4 и 5 отличаются друг от друга за счет жесткого вращения пластины на угол Ψ_0 .

Первому варианту соответствует отсутствие поворота нормали к срединной поверхности в начале координат. Объясняется это тем, что поведение $\bar{w}_1(x)$ и $\bar{w}_1(x)$ в окрестности $\rho = 0$ определяется лишь функциями (6). Функции же $\sigma_{n1}(x)$ и $\tau_{n1}(x)$ при $p > 1$ дают члены высшего порядка малости. То



Фиг. 5.

же можно сказать и о функциях, входящих в $\bar{w}_v(x)$ и $\bar{w}_v(x)$ при $v > 1$. Соблюдение же условий (7) и (8) приводит к равенству нулю производных $\frac{d\bar{w}^*}{dr}$ и $\frac{d\bar{w}}{dr}$.

Таким образом, оба варианта записи системы уравнений для определения постоянных a_n и b_n могут быть в равной мере использованы для исследования напряжённого и деформированного состояния пластины за исключением зоны, непосредственно прилегающей к ее центру. Соответствие между числом управлен и количеством неизвестных может быть достигнуто определённым выбором пределов суммирования по n и по v в усеченных ряд решений (1) и (3) дифференциального уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Б. Двайт. Таблицы интегралов и другие математические формулы, Москва, 1948.
2. А. И. Лурье. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат Москва-Ленинград, 1947.

3. Х. С. Х а з а н о в. К расчету цилиндрических оболочек с круглыми отверстиями. Труды Куйбышевского авиационного института, вып. XXIX, 1967.

4. Х. С. Х а з а н о в. Наст. сб., стр. 3.