

Л. М. Савельев, Х. С. Хазан

К ИНТЕГРИРОВАНИЮ УРАВНЕНИЯ ПОЛОГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

1. Расчет пологой цилиндрической оболочки сводится [1, 2] к интегрированию дифференциального уравнения относительно комплексной функции $F = \omega + i\Phi$ (ω — нормальное перемещение, Φ — функция напряжений), которое может быть представлено в виде

$$\nabla^2 \nabla^2 F + 4 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1^2} = q, \quad (1)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta_1^2}, \quad \xi_1 = \omega \xi \sqrt{2i}, \quad \eta_1 = \omega \eta \sqrt{2i},$$

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \frac{R_0}{\sqrt{Rh}}, \quad q = -\frac{16R^2 q_z}{Eh}.$$

Здесь ξ, η (фиг. 1) — декартовы координаты точек срединно поверхности, отнесенные к характерному линейному размеру R_0 . R, h — радиус и толщина оболочки, q_z — нормальная поверхностная нагрузка; E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Покажем, что если f_1 и f_2 являются решениями уравнений

$$e^{-i\xi_1} (\nabla^2 + 1)(e^{i\xi_1} f_1) = p, \quad e^{i\xi_1} (\nabla^2 + 1)(e^{-i\xi_1} f_2) = p, \quad (2)$$

где p удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 p = q, \quad (3)$$

то

$$F = \frac{1}{2} (f_1 + f_2) \quad (4)$$

есть решение уравнения (1).

Представим для этого уравнения (2) в форме

$$\nabla^2 f_1 + 2i \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} = p, \quad \nabla^2 f_2 - 2i \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} = p.$$

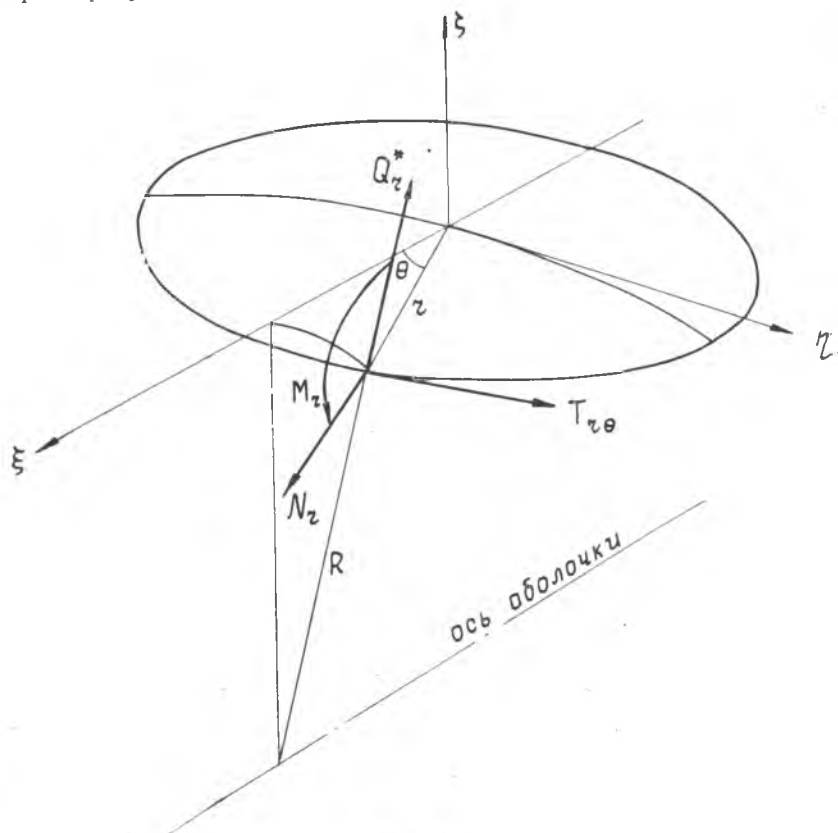
Вычтем из первого уравнения второе, а затем сложим их. Если обозначить $\varphi = \frac{1}{2} (f_1 - f_2)$, то получим

$$\nabla^2 F + 2i \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} = p, \quad \nabla^2 \varphi + 2i \frac{\partial F}{\partial \xi_1} = 0.$$

Исключив отсюда φ , имеем уравнение

$$\nabla^2 \nabla^2 F + 4 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1^2} = \nabla^2 p,$$

которое при условии (3) совпадает с (1).



Фиг. 1.

2. Рассмотрим сначала случай, когда $q=0$, т. е. уравнение

$$\nabla^2 \nabla^2 F + 4 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1^2} = 0. \quad (5)$$

Тогда p есть решение уравнения

$$\nabla^2 p = 0.$$

Пусть, в частности, $p=0$. Положив в первом из уравнений (2)

$$f_4 = e^{-i\xi_1} \psi, \quad (1)$$

получим

$$\nabla^2 \psi + \psi = 0. \quad (2)$$

Переходя к полярным координатам, положим $\xi_1 = z \cos \theta$, $\eta_1 = z \sin \theta$. Тогда, в соответствии с [1], периодическое решение уравнения (7) запишется в виде

$$\psi(z, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n H_n^{(1)}(z) + b_n I_n(z)] \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta},$$

где $H_n^{(1)}(z)$ и $I_n(z)$ — первая функция Ганкеля и функция Бесселя a_n и b_n — комплексные постоянные.

Подставив ψ в (6) и воспользовавшись разложением [3]

$$e^{iz \cos \theta} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k i^k I_k(z) \cos k\theta \quad (3)$$

$$\left(\delta_k = \frac{1}{2} \text{ при } k=0, \delta_k = 1 \text{ при } k \neq 0 \right),$$

получим

$$f_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{\nu} (-i)^{n-\nu} [a_n H_n^{(1)}(z) + b_n I_n(z)] [I_{n-\nu}(z) \pm \pm (-1)^{\nu} I_{n+\nu}(z)] \frac{\cos \nu\theta}{\sin \nu\theta}.$$

Аналогичные рассуждения дают

$$f_2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{\nu} i^{n-\nu} [c_n H_n^{(1)}(z) + d_n I_n(z)] [I_{n-\nu}(z) \pm \pm (-1)^{\nu} I_{n+\nu}(z)] \frac{\cos \nu\theta}{\sin \nu\theta}.$$

На основании (4) получим

$$F(z, \theta) = \sum_{\nu=0,2,\dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{\nu} i^{\nu} [a_n H_n^{(1)}(z) + b_n I_n(z)] [I_{n-\nu}(z) \pm \pm I_{n+\nu}(z)] \frac{\cos \nu\theta}{\sin \nu\theta} + \sum_{\nu=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} i^{\nu-1} [c_n H_n^{(1)}(z) + d_n I_n(z)] [I_{n-\nu}(z) \pm \pm I_{n+\nu}(z)] \frac{\cos \nu\theta}{\sin \nu\theta}, \quad (4)$$

где введены новые постоянные интегрирования.

Решение уравнения (5) в форме (9) впервые получено в [4]. В работах [5, 6, 7] приведены результаты детального его обследования. Показано, что это решение позволяет описать напряженно-состояние оболочки с круглым вырезом средних размеров, по контуру которого приложены самоуравновешенные нагрузки или на

рузки, приводящиеся к моменту M_n . Рассматриваемый в настоящей статье метод интегрирования дает возможность получить дополнительные частные решения уравнения (5), которые в совокупности с (9) соответствуют и другим видам несамоуравновешенных нагрузок.

В качестве p для построения дополнительных периодических решений уравнений (2) можно принять гармонические функции

$$\ln z, z^n \cos n\theta, z^n \sin n\theta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Однако отличные от (9) решения уравнения (5) дают лишь функции $\ln z$ и $z^{-1} \sin \theta$. Полагая $p = A_0 \ln z$, первое из уравнений (2) приведем с учетом (6) и (8) к виду

$$\nabla^2 \psi + \psi = 2A_0 \ln z \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k i^k I_k(z) \cos k\theta. \quad (10)$$

Представим интересующее нас частное решение (10) рядом

$$\psi(z, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \phi_k(z) \cos k\theta. \quad (11)$$

Для $\phi_k(z)$ получим уравнение

$$L_k \phi_k(z) = 2A_0 i^k I_k(z) \ln z, \quad (12)$$

где
$$L_k = \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} + 1 - \frac{k^2}{z^2}.$$

Будем искать его решение в виде суммы

$$\phi_k(z) = \bar{\phi}_k(z) \ln z + \check{\phi}_k(z). \quad (13)$$

Подстановка (13) в (12) дает

$$L_k \bar{\phi}_k(z) = 2A_0 i^k I_k(z), \quad L_k \check{\phi}_k(z) = -\frac{\partial}{\partial z} \bar{\phi}_k'(z).$$

Применив для интегрирования этих уравнений метод вариации произвольных постоянных и воспользовавшись неопределенными интегралами Ломмеля для цилиндрических функций [3], получим

$$\phi_k(z) = A_0 i^k [k P_k(z) - z I_k'(z) (\ln z - 1)], \quad (14)$$

где введено обозначение

$$P_k(z) = \left. \frac{\partial I_\mu(z)}{\partial \mu} \right|_{\mu=k}.$$

На основании [3] имеем

$$P_k(z) = I_k(z) \ln \frac{\gamma z}{2} - U_k(z).$$

Здесь γ — постоянная Эйлера, $U_k(z)$ — функция [3], предста-
мая рядом

$$U_k(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{k+2m}}{m! (k+m)!} \sum_{n=1}^{k+m} \frac{1}{n}.$$

Используя свойства функции $U_k(z)$, можно получить рекуррен-
ные соотношения для $P_k(z)$:

$$\begin{aligned} P_{k-1}(z) + P_{k+1}(z) &= \frac{2k}{z} P_k(z) + \frac{2}{z} I_k(z), \\ P_{k-1}(z) - P_{k+1}(z) &= 2P'_k(z). \end{aligned} \quad (1)$$

Подставляя (14) в (11), получим

$$\psi(z, \theta) = A_0 \sum_{k=0}^{\infty} i^k k P_k(z) \cos k\theta - A_0 z (\ln z - 1) \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k i^k I'_k(z) \cos k\theta. \quad (15)$$

Согласно (8) второй ряд в (16) равен $\frac{i}{2} \cos \Theta e^{i\xi_1}$. После по-
становки $\psi(z, \theta)$ в (6) имеем

$$\begin{aligned} f_1 &= A_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{\nu} (-i)^{\nu} k P_k(z) [I_{k-\nu}(z) + \\ &+ (-1)^{\nu} I_{k+\nu}(z)] \cos \nu\theta - \frac{1}{2} A_0 i \xi_1 (\ln z - 1). \end{aligned}$$

Подобным же образом из второго уравнения (2) находим

$$\begin{aligned} f_2 &= A_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{\nu} i^{\nu} k P_k(z) [I_{k-\nu}(z) + \\ &+ (-1)^{\nu} I_{k+\nu}(z)] \cos \nu\theta + \frac{1}{2} A_0 i \xi_1 (\ln z - 1). \end{aligned}$$

На основании (4) приходим к частному решению уравнения (5)
вида

$$F(z, \theta) = A_0 \sum_{\nu=0,2,\dots}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{\nu} i^{\nu} k \overline{D}_{k\nu}(z) \cos \nu\theta, \quad (17)$$

где

$$\overline{D}_{k\nu}(z) = P_k(z) [I_{k+\nu}(z) + I_{k-\nu}(z)].$$

Аналогичные рассуждения приводят для случая $p =$
 $= \frac{A_1}{z} \sin \theta$ к частному решению (5)

$$F(z, \theta) = A_1 \sum_{\nu=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} i^{\nu-1} \overline{D}_{k\nu}(z) \sin \nu\theta. \quad (18)$$

3. Рассмотрим сечение $r = \text{const}$, где r — полярный радиус н
развертке оболочки ($z = \frac{\omega r}{R_0} \sqrt{2i}$). В этом сечении действуют усилия

в срединной поверхности N_r и $T_{r\theta}$, изгибающий момент M_r и обобщенная перерезывающая сила Q_r^* (фиг. 1). Пусть эти величины представлены тригонометрическими рядами вида

$$\begin{aligned} N_r(z, \theta) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_{\nu} [\bar{N}_{\nu}(z) \cos \nu\theta + \bar{N}_{\nu}^*(z) \sin \nu\theta], \\ T_{r\theta}(z, \theta) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_{\nu} [\bar{T}_{\nu}(z) \sin \nu\theta + \bar{T}_{\nu}^*(z) \cos \nu\theta], \\ M_r(z, \theta) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_{\nu} [\bar{M}_{\nu}(z) \cos \nu\theta + \bar{M}_{\nu}^*(z) \sin \nu\theta], \\ Q_r^*(z, \theta) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_{\nu} [\bar{Q}_{\nu}(z) \cos \nu\theta + \bar{Q}_{\nu}^*(z) \sin \nu\theta]. \end{aligned} \quad (19)$$

Найдем проекции главного вектора P и главного момента M этих усилий на оси ξ , η и ζ . С учетом допущений, принимаемых в теории пологих оболочек, эти проекции равны

$$\begin{aligned} P_{\xi} &= \pi r [\bar{N}_1(z) - \bar{T}_1(z)], \\ P_{\eta} &= \pi r [\bar{N}_1^*(z) + \bar{T}_1^*(z)], \\ P_{\zeta} &= \pi r \left\{ \bar{Q}_0(z) - \frac{r}{2R} [\bar{N}_0(z) - \bar{N}_2(z) + \bar{T}_2(z)] \right\}, \\ M_{\xi} &= \pi r \left\{ r \bar{Q}_1^*(z) - \bar{M}_1^*(z) - \frac{r^2}{8R} [3\bar{N}_1^*(z) + \bar{T}_1^*(z) - \bar{N}_3^*(z) - \bar{T}_3^*(z)] \right\}, \\ M_{\eta} &= \pi r \left\{ -r \bar{Q}_1(z) + \bar{M}_1(z) + \frac{r^2}{8R} [\bar{N}_1(z) + 5\bar{T}_1(z) - \bar{N}_3(z) + \bar{T}_3(z)] \right\}, \\ M_{\zeta} &= \pi r^2 \bar{T}_0^*(z). \end{aligned} \quad (20)$$

Решения (9), (17) и (18) можно обобщенно записать в форме

$$F(z, \theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_{\nu} [\bar{F}_{\nu}(z) \cos \nu\theta + \bar{F}_{\nu}^*(z) \sin \nu\theta]. \quad (21)$$

Функцию (21) необходимо подчинить условиям однозначности тангенциальных перемещений u и v при обходе вокруг начала координат. Эти условия можно получить из рассмотрения геометрических соотношений пологой цилиндрической оболочки в полярных оординатах [8]. Входящие в них деформации срединной поверхности определяются по закону Гука через усилия N_r , $T_{r\theta}$ и N_{θ} и представляются тригонометрическими рядами. Однозначность перемещений будет обеспечена, если отыскивать u и v также в виде тригонометрических рядов

$$\begin{aligned} u(z, \theta) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_{\nu} [\bar{u}_{\nu}(z) \cos \nu\theta + \bar{u}_{\nu}^*(z) \sin \nu\theta], \\ v(z, \theta) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_{\nu} [\bar{v}_{\nu}(z) \sin \nu\theta + \bar{v}_{\nu}^*(z) \cos \nu\theta]. \end{aligned} \quad (22)$$

Подстановка (22) в геометрические соотношения приводит для каждой пары функций $\bar{u}_\nu(z)$, $\bar{v}_\nu(z)$ или $\bar{u}_\nu^*(z)$, $\bar{v}_\nu^*(z)$ к системам трех уравнений. Можно показать, что при $\nu \geq 2$ эти системы являются совместными, а при $\nu = 0$ и $\nu = 1$ совместность обеспечивается при выполнении условий

$$Re G_1(z) = Re G_2(z) = Re G_3(z) = 0, \quad (21)$$

где

$$G_1(z) = z\bar{F}_0''(z) + \bar{F}_0''(z) + \left(2z - \frac{1}{z}\right)\bar{F}_0'(z) + 2z\bar{F}_2'(z) + 4\bar{F}_2(z),$$

$$G_2(z) = z\bar{F}_1''(z) + 3\left(z - \frac{1}{z}\right)\bar{F}_1'(z) + 3\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)\bar{F}_1(z) + z\bar{F}_3'(z) + 3\bar{F}_3(z)$$

$$G_3(z) = z\bar{F}_1^{*''}(z) + \left(z - \frac{3}{z}\right)\bar{F}_1^{*'}(z) + \left(\frac{3}{z^2} - 1\right)\bar{F}_1^*(z) + z\bar{F}_3^{*'}(z) + 3\bar{F}_3^*(z) \quad (24)$$

После подстановки в (20) коэффициентов рядов для усилий и моментов, найденных по формулам пологих оболочек [1], имеем

$$P_\xi = P_\eta = M_\zeta = 0, \quad (22)$$

а P_ξ , M_ξ , M_η запишутся через мнимые части (24). Объединив эти выражения с условиями однозначности (23), получим соотношения, которым должно удовлетворять решение вида (21):

$$G_1(z) = i \frac{32\omega^2 \lambda}{\pi E \kappa R_0} P_\zeta, \quad zG_2(z) = (1-i) \frac{32\omega^2 \lambda}{\pi E \kappa R_0^2} M_\eta, \quad (23)$$

$$z \cdot G_3(z) = -(1-i) \frac{32\omega^3 \lambda}{\pi E \kappa R_0^2} M_\xi.$$

Здесь $\kappa = \frac{R_0}{R}$, $\lambda = \frac{R}{h}$.

Подстановка (9) в (26) дает $P_\zeta = M_\xi = 0$. Проекция главного момента $M_\eta = 0$ при разложении по $\sin \nu\theta$, а при разложении по $\cos \nu\theta$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = -(1+i) \frac{4\omega^3 \lambda}{E \kappa R_0^2} M_\eta \quad (27)$$

В несколько ином виде этот результат представлен в [5, 7].

Рассмотрим теперь функцию (17). Представляя ее в виде (21) имеем $\bar{F}_\nu(z) = 0$ при $\nu = 1, 3, \dots$, $\bar{F}_\nu^*(z) = 0$. Тогда, согласно (24) (26), $M_\eta = M_\eta = 0$. Подставляя же соответствующие величины в первое равенство (24) и используя соотношения (15), получим

$$G_1(z) = 2A_0 \left\{ 2 \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k I_k^2(z) - \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k I_k(z) [I_{k-2}(z) + I_{k+2}(z)] \right\}$$

Отсюда, на основании теоремы сложения для бесселевых функций [3], $G_1(z) = 2A_0$, и мы имеем

$$A_0 = i \frac{16\omega^2 \lambda}{\pi E x R_0} P_\zeta. \quad (28)$$

Аналогичные рассуждения применительно к функции (18) дают

$$P_\zeta = M_\eta = 0, A_1 = (1 - i) \frac{16\omega^3 \lambda}{\pi E x R_0} M_\xi. \quad (29)$$

4. Обратимся теперь к неоднородному уравнению (1) и рассмотрим случай, когда $q(z, \theta) = q_n(z) \cos n\theta$ или $q(z, \theta) = q_n(z) \sin n\theta$. Отыскивая частное решение уравнения (3) в виде

$$p(z, \theta) = p_n(z) \cos n\theta \text{ или } p(z, \theta) = p_n(z) \sin n\theta, \quad (30)$$

методом вариации произвольных постоянных получим

$$p_n(z) = \frac{1}{2n} \left[z^n \int z^{-n+1} q_n(z) dz - z^{-n} \int z^{n+1} q_n(z) dz \right]. \quad (31)$$

Дальнейшие выкладки связаны с интегрированием уравнений (2) и повторяют ход рассуждений п. 2. В случае действия произвольной (достаточно плавной) поверхностной нагрузки функцию $q(z, \theta)$ можно разложить в ряд Фурье по угловой координате, а затем просуммировать результаты, полученные для отдельных членов разложения.

5. Высказанные выше замечания используем для построения еще трех частных решений уравнения (5), для которых P_ζ , P_η или M_ζ отличны от нуля. Эти решения будем искать в виде

$$F(z, \theta) = F^0(z, \theta) + F^*(z, \theta). \quad (32)$$

Положим, в частности,

$$F^0(z, \theta) = iB_0 \theta, \quad (33)$$

где B_0 — действительная постоянная (это требование вытекает из условия периодичности перемещения w).

Подставляя (32) с учетом (33) в уравнение (5), приходим для $F^*(z, \theta)$ к неоднородному уравнению (1), в котором $q = -4iB_0 z^{-2} \sin 2\theta$. На основании (30) и (31) находим $p = iB_0 \sin 2\theta$. Интегрируя затем уравнения (2), получаем

$$F^*(z, \theta) = 2iB_0 \sum_{\nu=2,4,\dots}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} i^\nu D_{k\nu}^*(z) \sin \nu\theta,$$

где

$$D_{k\nu}^*(z) = P_k(z) [I_{k-\nu}(z) - I_{k+\nu}(z)].$$

Таким образом, приходим к частному решению уравнения (5)

$$F(z, \theta) = iB_0 \left[\theta + 2 \sum_{\nu=2,4,\dots}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} i^\nu D_{k\nu}^*(z) \sin \nu\theta \right]. \quad (34)$$

Аналогичные рассуждения позволяют получить еще два частных решения этого уравнения

$$F(z, \theta) = B_1 \sqrt{2i} \left[z\theta \sin \theta - 2 \sum_{\nu=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} i^{\nu-1} k D_{k\nu}^*(z) \cos \nu\theta \right], \quad (35)$$

$$F(z, \theta) = B_2 \sqrt{2i} \left[z\theta \cos \theta + 2 \sum_{\nu=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} i^{\nu-1} (k^2 - 1) \bar{D}_{k\nu}(z) \sin \nu\theta \right], \quad (36)$$

где B_1 и B_2 — также действительные постоянные.

Объединим (35) с одним из частных решений уравнения (5), которое получается из разложения (9) по $\cos \nu\theta$, если положить в нем

$$c_0 = -(1-i) \frac{\pi(1+\mu)}{4} B_1,$$

а все остальные постоянные — равными нулю. Получим

$$F(z, \theta) = B_1 \sqrt{2i} \left[z\theta \sin \theta - 2 \sum_{\nu=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} i^{\nu-1} D_{k\nu}^*(z) \cos \nu\theta - i \frac{\pi(1+\mu)}{2} H_0^{(1)}(z) \sum_{\nu=1,3,\dots}^{\infty} i^{\nu-1} I_\nu(z) \cos \nu\theta \right]. \quad (37)$$

Далее, объединим решения (36) и (18), приняв в последнем

$$A_1 = (1+i)(1-\mu)B_2.$$

Это дает

$$F(z, \theta) = B_2 \sqrt{2i} \left[z\theta \cos \theta + 2 \sum_{\nu=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} i^{\nu-1} \left(k^2 - \frac{1+\mu}{2} \right) \bar{D}_{k\nu}(z) \sin \nu\theta \right]. \quad (38)$$

Для решений (34), (37) и (38) усилия и моменты по-прежнему периодичны, т. е. справедливы формулы (19) и (20), на основании которых имеем

$$B_0 = -\frac{4\omega^2\lambda}{\pi ER_0^2} M_\zeta, \quad B_1 = -\frac{2\omega\lambda}{\pi ER_0} P_\xi,$$

$$B_2 = \frac{2\omega\lambda}{\pi ER_0} P_\eta. \quad (39)$$

Можно показать, что рассмотренные здесь решения удовлетворяют условиям $P_\zeta = M_\xi = M_\eta = 0$. Кроме того, для решения (34) $P_\xi = P_\eta = 0$, для (37) — $P_\eta = M_\zeta = 0$ и для (38) — $P_\xi = M_\zeta = 0$. При этом все они обеспечивают однозначность перемещений.

Таким образом, получен набор частных решений однородного уравнения (5), которые, обеспечивая однозначность перемещений, могут дать внутренние силы с отличными от нуля компонентами главного вектора и главного момента. Это позволяет рассчитывать цилиндрическую оболочку с круглым вырезом, край которого на-

гружен произвольным образом, а также оболочку с произвольной локальной нагрузкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Лурье. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, 1947.
2. В. З. Власов. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. Гостехиздат, 1949.
3. Г. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций, часть первая. ИЛ, 1949.
4. Г. М. Савин, О. М. Гузь. Допитання про концентрацію напружень навколо отворів у циліндричній оболонці, ДАН УССР, № 11, 1964.
5. Х. С. Хазанов. К расчету цилиндрических оболочек с круглыми отверстиями. Труды КуАИ, вып. XXIX, Куйбышев, 1967.
6. Х. С. Хазанов. Напряженное состояние цилиндрической оболочки с подкрепленным круглым отверстием. Труды КуАИ, вып. 39, Куйбышев, 1968.
7. Х. С. Хазанов. Напряженное состояние круговой цилиндрической оболочки, нагруженной моментом через абсолютно жесткую шайбу. Труды КуАИ, вып. 39, Куйбышев, 1968.
8. Г. Н. Савин, Н. П. Флейшман. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. «Наукова думка», 1964.