Л. М. САВЕЛЬЕВ

ДВУХОСНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ПЛАСТИНКИ С КРУГЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

x, y — декартовы координаты; ρ, Θ — полярные координаты (полярный радиус отнесен к радиусу отверстия); σ_ρ, σ_Θ, $\tau_{\rho\Theta}$ — нормальные и касательные напряжения, отнесенные к характерному напряжению σ°; ε_i, σ_i — интенсивности деформации и напряжений; σ_p, ε_p — напряжение и деформация, соответствующие пределу пропорциональности материала; $\omega = 1 - \frac{\bar{\sigma}_i}{\bar{\varepsilon}_i}$ — функция пластичности А. А. Ильюшина; $p = \frac{\sigma^\circ}{\sigma_p}$ — параметр нагружения; Φ — функция напряжений;

$$\bar{\sigma}_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_p}; \quad \bar{\varepsilon}_i = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_p};$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}.$$

Рассмотрим растяжение в направлении осей x и y бесконечной пластины с круглым отверстием. Величину напряжения σ_x вдали от отверстия примем в качестве характерного напряжения σ°, а σ_y положим равным $\alpha\sigma^\circ$. При $\alpha=0$ имеем одноосное растяжение пластины вдоль оси x, при $\alpha=1$ распределение напряжений будет осесимметричным, а значение $\alpha=-1$ соответствует чистому сдвигу на бесконечности.

Используя теорию малых упруго-пластических деформаций, уравнение для функции напряжений можно получить в виде [1]

$$\Delta^2\Delta^2\Phi = -\Omega. \tag{1}$$

Здесь

$$\Omega = \frac{1}{2}\nabla^2(X-Y) - \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial Y}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial\Theta^2}\right) + \frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial Z}{\partial\rho} + \frac{Z}{\rho^2}\right). \tag{2}$$

Нелинейные члены в (2) равны

$$X = \frac{1}{2}\gamma(\sigma_\rho + \sigma_\Theta); \; Y = \frac{3}{2}\gamma(\sigma_\rho - \sigma_\Theta); \; Z = -3\gamma\tau_{\rho\Theta}, \tag{3}$$

где

$$\gamma = \frac{\omega}{1-\omega},$$

а напряжения связаны с функцией Φ формулами

$$\sigma_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}; \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2}; \quad \tau_{\rho\theta} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right). \quad (4)$$

Для интегрирования уравнения (1) применим метод последовательных приближений, полагая в κ-том приближении

$$\nabla^2\nabla^2\Phi^{(k)} = -\Omega^{(k)}, \quad (5)$$

где $\Omega^{(\kappa)}$ выражается согласно (2) через функции $X^{(\kappa)}$, $У^{(\kappa)}$ и $Z^{(\kappa)}$. Последние могут быть вычислены по результатам предыдущего приближения, причем для них можно получить различные выражения, используя тот или иной вариант метода последовательных приближений. Рассмотрим вариант, аналогичный методу дополнительных деформаций И. А. Биргера [2].

Пусть в результате расчета пластины на $(\kappa-1)$-ом этапе получены функции $\Phi^{(k-1)}$ и $\omega^{(k-1)}$. Значение $\omega^{(k-1)}$ определяет в данной точке пластины связь между интенсивностями напряжений и деформаций

$$\bar{\varepsilon}_i^{(k-1)} = \frac{\bar{\sigma}_i^{(k-1)}}{1-\omega^{(k-1)}}. \quad (6)$$

Величина $\bar{\sigma}_i$ может быть найдена по формуле

$$\bar{\sigma}_i = p\sqrt{\sigma_\rho^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_\rho\sigma_\theta + 3\tau_{\rho\theta}^2}, \quad (7)$$

в которую в $(\kappa-1)$-ом приближении подставляются напряжения $\sigma_\rho^{(\kappa-1)}$, $\sigma_\theta^{(\kappa-1)}$ и $\tau_{\rho\theta}^{(\kappa-1)}$, вычисляемые согласно (4) через $\Phi^{(k-1)}$.

На рис. 1 в координатах $\bar{\sigma}_i-\bar{\varepsilon}_i$ показана кривая одноосного растяжения материала пластины. Величины $\bar{\sigma}_i^{(k-1)}$ и $\bar{\varepsilon}_i^{(k-1)}$ определяют точку *1*, которая, вообще говоря, не лежит на этой кривой. Исходя из $\bar{\varepsilon}_i^{(\kappa-1)}$, можно по уравнению кривой $\bar{\sigma}=\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$ найти скорректированную величину $\tilde{\sigma}_i^{(k-1)}$, соответствующую точке *2* диаграммы растяжения, а затем и новое значение функции пластичности

$$\omega^{(k)} = 1 - \frac{\tilde{\sigma}_i^{(k-1)}}{\bar{\varepsilon}_i^{(k-1)}}.$$

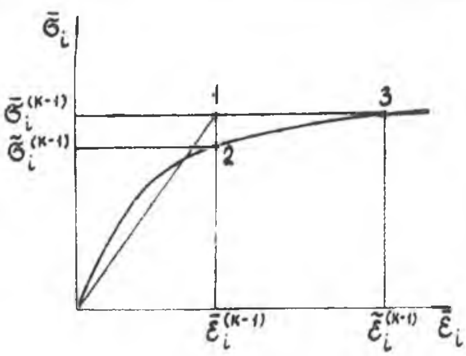


Рис. 1

Функцию $\omega^{(k)}$ используем для подсчета $X^{(k)}$, $Y^{(k)}$ и $Z^{(k)}$. При этом в формулы (3) вместо напряжений $\sigma_\rho^{(k-1)}$, $\sigma_\theta^{(k-1)}$ и $\tau_{\rho\theta}^{(k-1)}$ подставим скорректированные величины $\widetilde{\sigma}_\rho^{(k-1)}$, $\widetilde{\sigma}_\theta^{(k-1)}$ и $\widetilde{\tau}_{\rho\theta}^{(k-1)}$, соответствующие точке *2*:

$$\widetilde{\sigma}_\rho^{(k-1)} = \beta^{(k)} \sigma_\rho^{(k-1)};\quad \widetilde{\sigma}_\theta^{(k-1)} = \beta^{(k)} \sigma_\rho^{(k-1)};\quad \widetilde{\tau}_{\rho\theta}^{(k-1)} = \beta^{(k)} \tau_{\rho\theta}^{(k-1)},$$

где

$$\beta^{(k)} = \frac{1-\omega^{(k)}}{1-\omega^{(k-1)}}.$$

После подстановки в (7) эти величины дают $\widetilde{\varepsilon}_i^{(k-1)}$. В результате для $X^{(k)}$, $Y^{(k)}$ и $Z^{(k)}$ получим

$$X^{(k)} = \frac{1}{2}\gamma^{(k)}\left[\sigma_\rho^{(k-1)} + \sigma_\theta^{(k-1)}\right];\quad Y^{(k)} = \frac{3}{2}\gamma^{(k)}\left[\sigma_\rho^{(k-1)} - \sigma_\theta^{(k-1)}\right];$$

$$Z^{(k)} = -3\gamma^{(k)}\tau_{\rho\theta}^{(k-1)}, \tag{8}$$

где

$$\gamma^{(k)} = \frac{\omega^k}{1-\omega^{(k-1)}}. \tag{9}$$

Метод последовательных приближений, заключающийся в использовании формул (8) и (9), обладает значительно лучшей сходимостью по сравнению с методом, принятым в работе [1], в котором множитель $\gamma^{(k)}$ в формулах (8) вычислялся по формуле

$$\gamma^{(k)} = \frac{\omega^{(k-1)}}{1-\omega^{(k-1)}}.$$

В работах А. В. Горбатого [3, 4] для подсчета правой части уравнения (5) использовались напряжения и деформации, соответствующие точке *3* диаграммы растяжения. Это крайне неблаготворно влияет на процесс сходимости, а в случае диаграммы без упрощения расчет по такому алгоритму вообще невозможен*.

При проведении числовых расчетов реальную диаграмму растяжения удобно аппроксимировать следующим образом:

$$\bar{\sigma} = \bar{\varepsilon} \text{ при } \bar{\varepsilon} \leqslant 1;\quad \bar{\sigma} = a - \frac{b}{\bar{\varepsilon} - g} + \frac{c}{(\bar{\varepsilon} - g)^2} + d\bar{\varepsilon} \text{ при } \bar{\varepsilon} \geqslant 1. \tag{10}$$

Параметры упрочнения a, b, c, d и g можно связать между собой из условия непрерывности кривой $\bar{\sigma}$—$\bar{\varepsilon}$ при $\bar{\varepsilon}=1$ вплоть до второй производной

$$g = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{a}{1-d}\right);\quad b = \frac{3(a+d-1)^2}{4(1-d)};\quad c = \frac{(a+d-1)^3}{8(1-d)^2}.$$

Характер кривых $\bar{\sigma}$—$\bar{\varepsilon}$ при некоторых значениях a и d показан на рис. 3.

---

* В работе [5] рассмотрен вопрос о выборе оптимального направления «сноса» точки *1* на кривую деформирования.

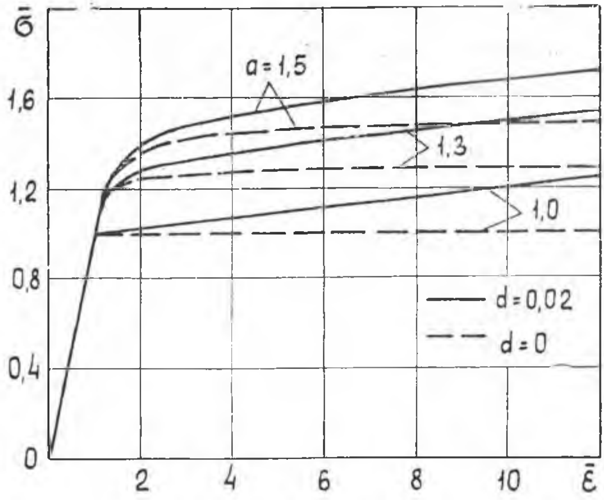


Рис. 2.

По изложенной методике были проведены многочисленные расчеты с помощью ЭВМ М-20. Напряжения вычислялись в каждом приближении в отдельных точках, получающихся на пересечении координатных линий $\rho=\text{const}$, $\theta=\text{const}$. Угол θ изменялся с постоянным шагом, равным 5°, а шаг изменения ρ принимался переменным, чтобы расположить точки ρ_i чаще около отверстия. Это достигалось введением переменной $x=\frac{1}{\rho}$, для которой шаг Δx был постоянным. Число точек ρ_i выбиралось различным в зависимости от размера пластической зоны и степени точности расчета (как правило, погрешность решения не превышала 1%).

После подсчета функций $X^{(k)}$, $Y^{(k)}$ и $Z^{(k)}$ производилось их разложение в тригонометрические ряды для каждого фиксированного значения ρ_i, например,

$$X^{(\kappa)}(\rho_i,\Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n X_n^{(\kappa)}(\rho_i)\cos n\Theta$$

$$\left(\delta_n = \frac{1}{2} \text{ при } n=0; \quad \delta_n = 1 \text{ при } n \neq 0\right).$$

Коэффициенты Фурье определялись численно по методу Филона [6]. Производя такие разложения для всех значений ρ_i, получим ряды вида

$$X^{(k)}(\rho,\ \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n X_n^{(k)}(\rho)\cos n\theta, \tag{11}$$

коэффициенты которых представляют собой функции координаты ρ, известные в дискретных точках ρ_i.

После подстановки разложений типа (11) в (2) получим разложение правой части уравнения (5) в тригонометрический ряд. Это дает возможность получить функцию $\Phi^{(k)}$ и, следовательно, напряжения $\sigma_\rho^{(k)}$, $\sigma_\theta^{(k)}$, $\tau_{\rho\theta}^{(k)}$ также в виде тригонометрических рядов [1]. Коэффициенты этих рядов содержат неопределенные интегралы вида

$$I(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \rho^m f(\rho)\, d\rho,$$

где m — некоторое целое число; ρ_0 — постоянная; $f(\rho)$ — гладкая функция, значения которой известны в точках ρ_i.

Если обозначить $I(\rho_k) = I_k$, то

$$I_{k+j} = I_k + \Delta I_k^{(j)},$$

где

$$\Delta I_k^{(j)} = \int_{\rho_k}^{\rho_j} \rho^m f(\rho)\, d\rho. \tag{12}$$

Для вычисления интеграла (12) получена по методу Хемминга [6] квадратурная формула, представляющая собой обобщение формулы Симпсона на случай весовой подынтегральной функции ρ^m.

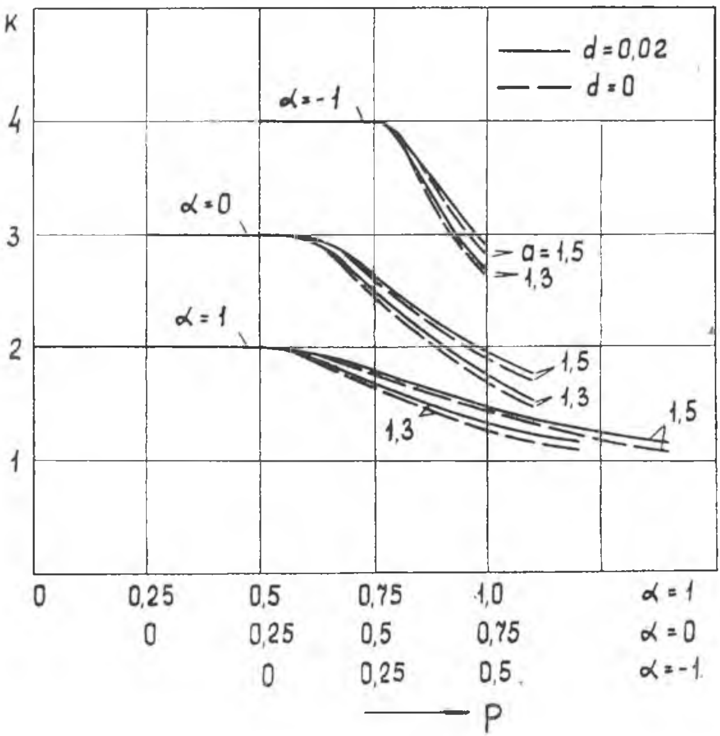
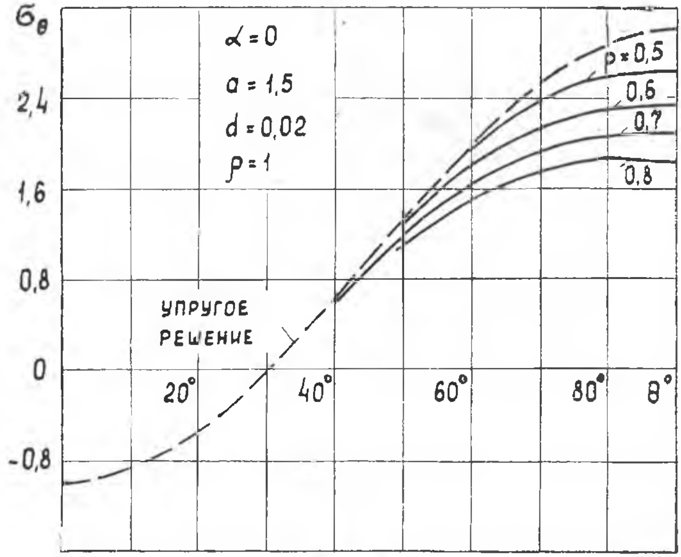
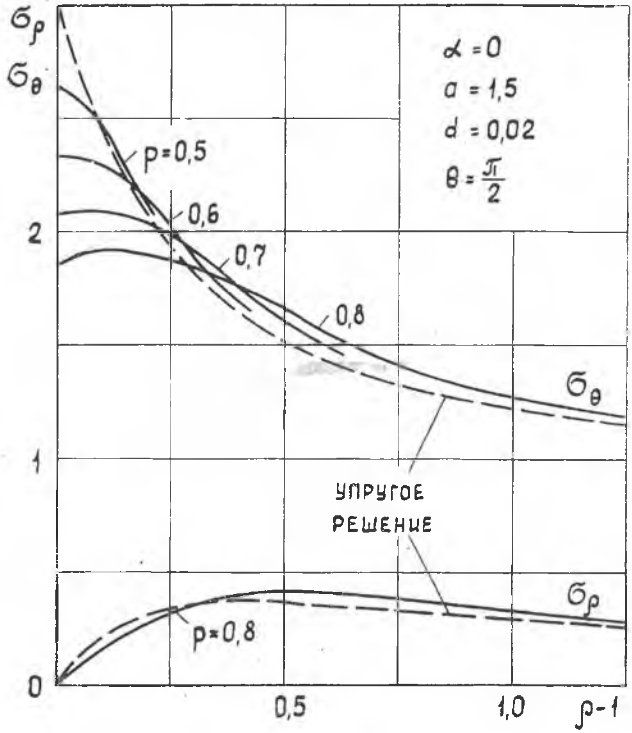


Рис. 3.



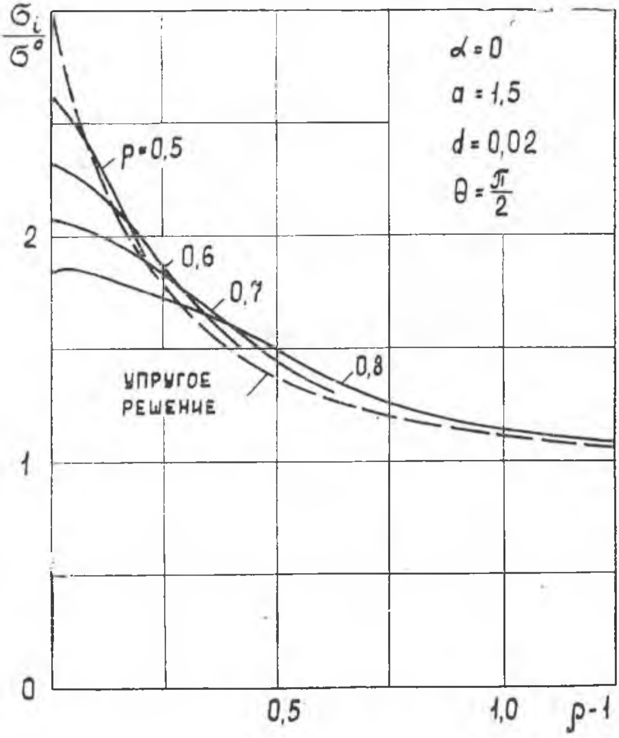
σθ
α = 0
a = 1,5
d = 0,02
ρ = 1
2,4
1,6
0,8
0
-0,8
p = 0,5
0,6
0,7
0,8
упругое
решение
20°
40°
60°
80°
θ°

Рис. 4.



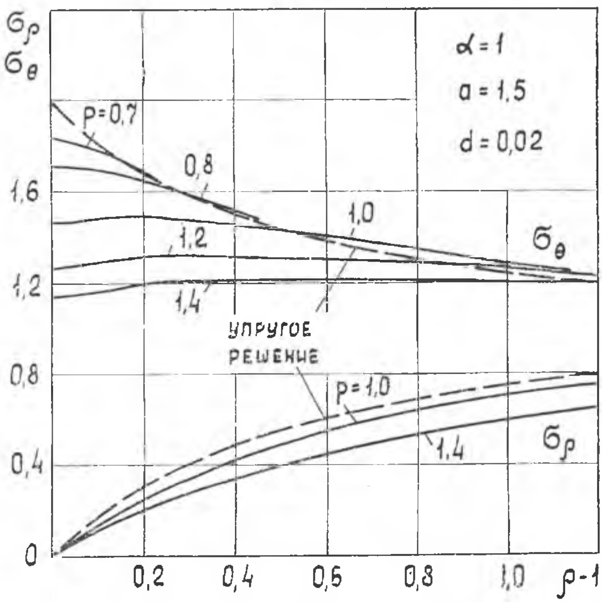
σρ
σθ
α = 0
a = 1,5
d = 0,02
θ = π/2
p = 0,5
0,6
0,7
0,8
2
1
0
σθ
упругое
решение
σρ
p = 0,8
0,5
1,0
ρ-1

Рис. 5.



$\frac{\sigma_i}{\sigma^0}$
$\alpha = 0$
$a = 1,5$
$d = 0,02$
$\theta = \frac{\pi}{2}$
$p = 0,5$
0,6
0,7
0,8
УПРУГОЕ РЕШЕНИЕ
2
1
0
0,5
1,0
$\rho - 1$

Рис. 6.



σ_ρ
σ_θ
$\alpha = 1$
$a = 1,5$
$d = 0,02$
$p = 0,7$
0,8
1,0
1,2
1,4
σ_θ
УПРУГОЕ РЕШЕНИЕ
$p = 1,0$
1,4
σ_ρ
1,6
1,2
0,8
0,4
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
$\rho - 1$

Рис. 7.

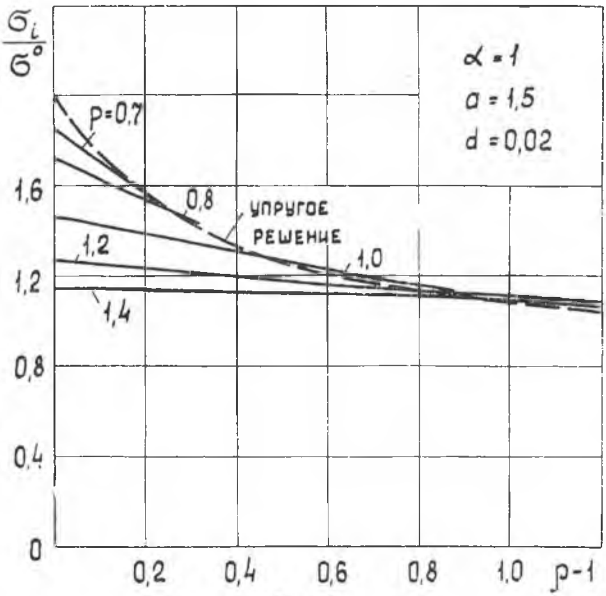


Рис. 8.

Постоянные интегрирования, входящие в решение уравнения (5), определяются из условий на бесконечности

$$\sigma_\rho = \frac{1+\alpha}{2} + \frac{1-\alpha}{2}\cos 2\theta, \quad \tau_{\rho\theta} = -\frac{1-\alpha}{2}\sin 2\theta \text{ при } \rho \to \infty$$

и условий на контуре отверстия

$$\sigma_\rho = \tau_{\rho\theta} = 0 \text{ при } \rho = 1.$$

Ниже приведены некоторые результаты числовых расчетов.

На рис. 3 показана зависимость коэффициента концентрации напряжений k от внешней нагрузки и от характера диаграммы растяжения для различных отношений главных напряжений на бесконечности*.

При появлении пластических деформаций коэффициент концентрации снижается тем интенсивнее, чем выше его значение при упругих деформациях. С ростом величин a и d, характеризующих упрочнение материала, коэффициент k несколько увеличивается.

Для одного значения параметров a и d на рис. 4 дано распределение кольцевых напряжений по контуру отверстия, а на рис. 5 и 6 — распределение σ_ρ, σ_θ и σ_i вдоль радиуса $\theta = \frac{\pi}{2}$ для различных

* Под коэффициентом концентрации понимается отношение максимального значения интенсивности напряжений к σ°.

значений параметра нагружения в случае одноосного растяжения пластинки. Изменение характера напряженного состояния вблизи отверстия с ростом внешней нагрузки при осесимметричном нагружении показано на рис. 7 и 8. Как видно из этих графиков, существенное перераспределение напряжений имеет место в тех зонах пластинки, где появляются пластические деформации.

Характерным является смещение максимума кольцевых напряжений в глубь пластинки. Такая же тенденция имеет место в случае одноосного растяжения и сдвига и для интенсивности напряжений σ_i, хотя различие между $\sigma_{i\,max}$ и величиной σ_i на контуре отверстия невелико (для просчитанных параметров не более 4%). Поэтому такое смещение точки с максимальной концентрацией не обнаруживается во многих экспериментальных работах, например, [7]. В других же исследованиях, например [8], содержится подтверждение этого явления. В случае всестороннего растяжения

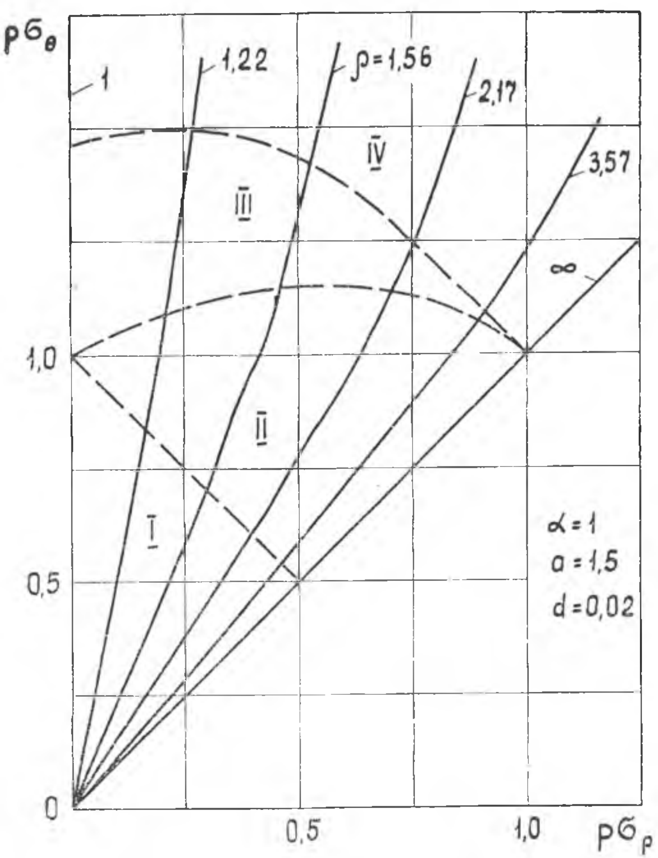


Рис. 9.

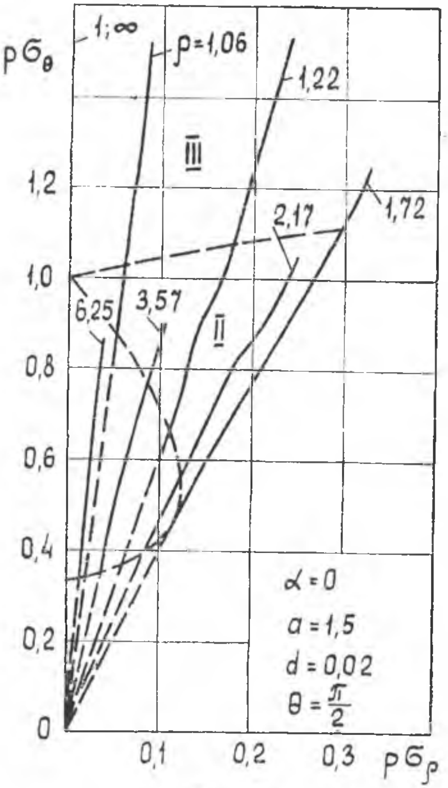


Рис. 10.

пластинки интенсивность напряжений принимает наибольшее значение всегда на контуре отверстия.

На рис. 9 показаны пути нагружения в некоторых точках пластинки при ее всестороннем растяжении. По координатным осям отложены величины $p\sigma_\rho$ и $p\sigma_\theta$ представляющие собой радиальное и окружное напряжения, отнесенные к пределу пропорциональности σ_p. На этих кривых различаются четыре участка. На участке I во всех точках пластины интенсивность напряжений ниже предела пропорциональности материала σ_p, а пути нагружения представляют собой радиальные лучи, исходящие из начала координат.

Участок II соответствует таким значениям внешней нагрузки, при которых появляется и растет зона пластических деформаций. Но эта зона не достигает еще данной точки, так что интенсивность напряжений в ней все еще меньше σ_o. Пути нагружения при этом искривляются вследствие перераспределения напряжений.

При дальнейшем возрастании внешней нагрузки в данной точке появляются пластические деформации (III участок). Наконец, при появлении пластических деформаций на бесконечности имеем IV участок пути нагружения.

Деформационная теория пластичности дает удовлетворительные результаты, если в каждой точке тела имеется простое (прямые пути нагружения) или близкое к простому нагружение. Как видно из рис. 9, наибольшее искривление пути нагружения происходит на участке II, когда деформация в данной точке тела упругая, и, следовательно, любая теория дает точный результат для этой точки. При появлении же пластических деформаций в данной точке путь нагружения значительно выпрямляется, что оправдывает применение деформационной теории пластичности. Такой вывод согласуется с результатом работы [9], в которой дано обобщение теоремы А. А. Ильюшина о простом нагружении на случай осесимметричной деформации модифицированной среды Рамберга-Осгуда,

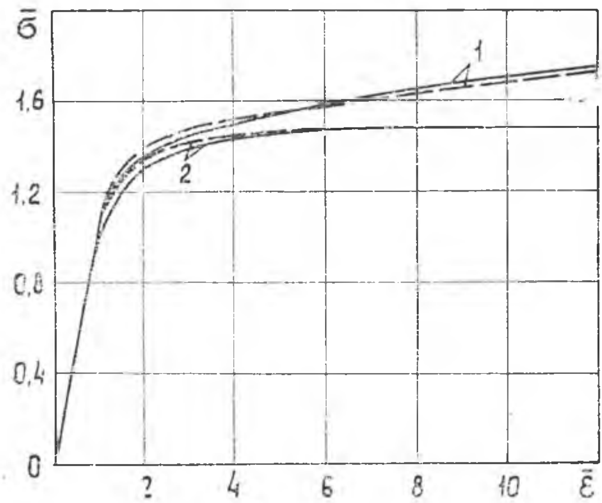

б̄
1,6
1,2
0,8
0,4
0
2
4
6
8
10
ε̄
1
2

Рис. 11.

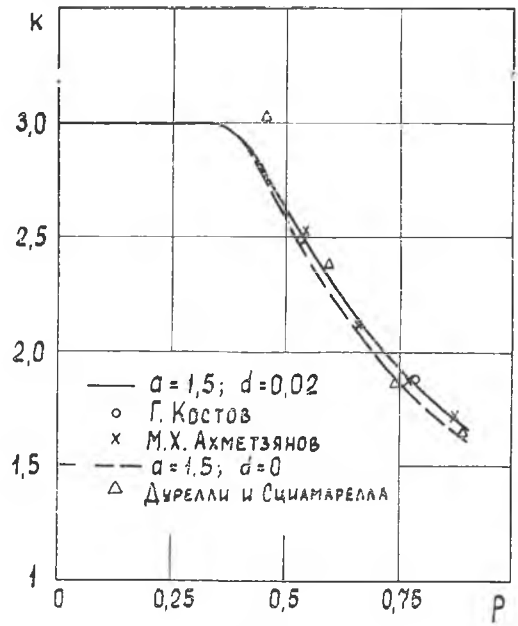

К
3,0
2,5
2,0
1,5
1
0
0,25
0,5
0,75
P
a = 1,5; d = 0,02
Г. Костов
М.Х. Ахметзянов
a = 1,5; d = 0
Дурелли и Сциамарелла

Рис. 12.

Аналогичная картина имеет место и для других видов нагружения. Для случая одноосного растяжения пути нагружения даны на рис. 10. Участок IV в этом случае отсутствует, а на участке I пути нагружения показаны пунктиром.

В работах [7], [10] приведены экспериментальные значения коэффициента концентрации напряжений при растяжении пластинки из сплавов Д1—АТ, диаграмма растяжения которого [11]* приведена на рис. 11 в относительных координатах σ—ε (кривая *1*, сплошная линия). Пунктирная кривая *1* на рис. 11, аппроксимирующая эту диаграмму, построена по формулам (10) при $a = 1{,}5$; $d = 0{,}02$.

Сопоставление результатов расчета с экспериментом дано на рис. 12. Теоретическое значение коэффициента концентрации напряжений здесь показано сплошной линией, кружочки и крестики дают его экспериментальные значения, взятые из работ [7] и [10]**.

Аналогично выполнено сопоставление результатов расчета с данными работы [12]. Кривые *2* на рис. 11 представляют диаграмму растяжения алюминиевого сплава (сплошная линия), использованного в [12], и ее аппроксимацию при $a=1{,}5$; $d=0$ (пунктирная линия). На рис. 12 теоретическая кривая для этого сплава показана пунктирной линией, а экспериментальные значения отмечены треугольниками.

Согласие расчетных данных с опытными является вполне удовлетворительным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев. Л. М. Распределение напряжений около круглого отверстия в пластине с учетом физической нелинейности материала. Труды КуАИ, вып. 48, 1971.

2. Биргер И. А. Метод дополнительных деформаций в задачах теории пластичности. ИАН СССР, ОТН, «Механика и машиностроение», 1963, № 1.

3. Горбатый А. В. О решении плоской задачи теории упругости и пластичности в случае многосвязной области методом сеток. Труды НИИЖТ, вып. 62, 1967.

4. Горбатый А. В. О решении упруго-пластических задач растяжения пластин с отверстиями. Труды НИИЖТ, вып. 96, 1970.

5. Капустин С. А., Коротких Ю. Г. О применении метода последовательных нагружений и сходимости метода переменных параметров при решении упруго-пластических задач. Ученые записки Горьковского университета, вып. 89, 1969.

6. Хемминг Р. В. Численные методы. Изд. «Наука», М., 1968.

7. Ахметзянов М. Х. Исследование концентрации напряжений в пластической области при помощи фотоупругих покрытий. ИАН СССР, ОТН, «Механика и машиностроение», 1963, № 1.

* При построении кривой принято $\sigma_p = 2100$ *н/м²*.

** При сопоставлении данных произведен пересчет параметров нагружения, используемых в работах [7] и [10], к величине $p = \dfrac{\sigma^0}{\sigma_p}$.

8. Костов Г. Теоретико-експериментално изследване концентрацията на еласто-пластичните напрежения около кръгли отвори в плоски детайли. «Техническа мисъл», 1967, 4, № 3.
9. Будянский Б. Точное решение упруго-пластической задачи о концентрации напряжений. ПММ, 1971, 35 № 1.
10. Костов Г. Въерху определяне коефициента на напреженията в пластичната област при статични натоварвания. «Техническа мысъл», 1968, 5, № 3.
11. Костов Г. Концентрация на еласто-пластичните напрежения около квадратни и триъгълни отвори в пластини при едномерно натоварване. «Техническа мисъл», 1968, 5, № 1.
12. Durelli A. J., Sciamarella C. A. Elasto-plastic stress and strain distribution in a finite plate with circular hole subjected to unidimensional load. J. Appl. Mech., 1963, v. 30, № 1.