

2. Чистяков В.П., Михеев В.А. Способ формообразования деталей двойной кривизны. Положительное решение по заявке № 2459522/25-27 от 04.03.77 г.

3. Чистяков В.П., Михеев В.А. Исследование процесса обтяжки вогнутых обшивок двойной кривизны. Межвузовский сборник "Теория и технология обработки металлов давлением". КуАИ, 1977.

УДК 539.3

И.И.Калужский, Ю.М.Арышенский

К ТЕОРИИ ПРИОБРЕТЕННОЙ АНИЗОТРОПИИ МЕТАЛЛОВ

В классической теории упругости и пластичности анизотропия механических свойств описывается с помощью "симметричных"

$$A^{ijkl} = A^{jikk} = A^{ijlk} \quad (1)$$

самосопряженных

$$A^{ijkl} = A^{klij} \quad (2)$$

тензоров четвертого ранга.

Если металл подчиняется условию пластичности Р.Мизеса, то на тензор, описывающий пластическую анизотропию, накладывается дополнительное условие "девиаторности":

$$D^{ijkl} \sigma_{kl} = 0; \quad D^{ijkl} \sigma_{ij} = 0. \quad (3)$$

В статье рассматривается изменение анизотропии механических свойств изделий, полученных прокаткой, волочением или прессованием.

Как известно [1], группа симметрии их свойств не ниже ортотропической. В работе Л.И.Седова [2] дано общее представление ортотропного тензора четвертого ранга в виде нелинейной тензорной (форм-инвариантной) функции от симметричного строго ортотропного тензора второго ранга d^{ij} , главные оси которого совпадают с главными осями анизотропии.

Такое представление при условии (1) и (2) имеет вид .

$$A = k_1 T + k_2 \theta + k_3 (\sigma \otimes d + d \otimes \sigma) + k_4 (\sigma \otimes M + M \otimes \sigma) + k_5 B(\sigma, M) +$$

$$+ k_6 B(\sigma, M) + k_7 (d \otimes d) + k_8 (d \otimes M + M \otimes d) + k_9 (M \otimes M). \quad (4)$$

Здесь $\sigma = \sigma^{ij}$ - единичный тензор;
 $d = d^{ij}$ - строго ортотропный тензор ($d^{ij} = d^{ji}$),
 т.е.

$$d_1 \neq d_2 \neq d_3 \neq d_1 \text{ или } (d_1 - d_2)(d_2 - d_3)(d_3 - d_1) \neq 0, \quad (4a)$$

где d_k - главные значения тензора d ;

$$M = d^2 \text{ (или } M^{ij} = d^{is} d_s^j \text{)}; \quad (4b)$$

$$\theta = \frac{1}{3} \sigma^{ij} \sigma^{kl} \text{ - "шаровая" единица;}$$

$$I = \frac{1}{2} (\sigma^{ik} \sigma^{jl} + \sigma^{il} \sigma^{jk}) \text{ - "симметричная" единица;}$$

$$y \otimes z = y^{ij} z^{kl} \text{ - прямое произведение тензоров второго ранга;}$$

$$B(\sigma, z) = \frac{1}{4} [\sigma^{ik} z^{jl} + \sigma^{il} z^{jk} + z^{ik} \sigma^{jl} + z^{il} \sigma^{jk}], \quad (5)$$

k_s - ($s = 1, 2, \dots, 9$) - скаляры.

Выражение (4) является только одним из возможных представлений "симметричного" самосопряженного тензора A^{ijkl} .

Для более глубокого изучения его строения желательно рассмотреть различные представления. Одно из них можно получить, если выразить тензоры d и M в виде линейных комбинаций системы трех взаимно ортогональных тензоров, состоящих из единичного тензора σ и двух соосных симметричных девятаторов X и Y (это всегда можно сделать, так как линейная размерность множества соосных тензоров равна трем, а взаимно ортогональные тензоры - линейно независимы [3]).

Условие ортогональности записывается в виде равенства нулю скалярного произведения

$$(x, y) = x^{rs} y_{rs} = 0. \quad (6)$$

Согласно полученному уравнению (6), девiator y с точностью до скалярного множителя выражается как функция X :

$$y = \frac{\sqrt{t_2 X^2}}{a} \left[\frac{1}{3} \sigma + X \frac{t_2 X^3}{(t_2 X^2)^2} - \frac{X^2}{t_2 X^2} \right], \quad (7)$$

где $t_2 X = X^{ij} \sigma_{ij}$ - след тензора;

a - произвольный скаляр.

Для удобства дальнейших выкладок примем

$$a = \sqrt{\frac{1}{b} - \frac{(t_2 X^3)^2}{(t_2 X^2)^3}} \quad (8)$$

Тогда

$$t_2 y^2 = t_2 X^2, \quad t_2 y^3 = a (t_2 X^2)^{3/2} \quad (9)$$

и в главных осях

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (X_2 - X_3), \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} (X_3 - X_1), \quad y_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} (X_1 - X_2). \quad (10)$$

Из последнего равенства следует следующая лемма: один из двух симметричных соосных ортогональных девiatorов X и y ($X \neq 0$, $y \neq 0$) всегда строго ортотропен.

Теперь, заменяя в уравнении (4) выражения d и M через σ , X , y :

$$d = G_1 \sigma + G_2 X + G_3 y, \quad M = G_4 \sigma + G_5 X + G_6 y; \\ (G_k - \text{скаляры})$$

приходим к представлению

$$A = \beta_1 I + \beta_2 \theta + \beta_3 (\sigma \otimes X + X \otimes \sigma) + \beta_4 (\sigma \otimes y + y \otimes \sigma) + \\ + \beta_5 B(\sigma, X) + \beta_6 B(\sigma, y) + \beta_7 X \otimes X + \beta_8 (X \otimes y + y \otimes X) + \\ + \beta_9 y \otimes y, \quad (11)$$

где β_k - скаляры.

Казалось бы, это представление ничем не отличается от (4) и не дает ничего нового. Но это не так. Действительно, так как X или y всегда строго ортотропны (согласно лемме), то новое представление не требует ограничения независимой переменной X условием (4а).

Пусть теперь анизотропия, описываемая ортотропным тензором четвертого ранга, получена в результате некоторого воздействия на квазиизотропную среду. Тогда A^{ijkl} в общем случае является функционалом (оператором процесса деформирования, термообработки и т.п.).

Однако представления (4) и (II) дают возможность рассматривать материальный тензор A^{ijkl} как функцию одного тензорного функционала Z^{ij} , который может быть принят за меру суммарного воздействия, являясь материальным тензором (вероятно, это тензор внутренних напряжений или внутренних упругих деформаций - искажений кристаллической решетки *).

При таком подходе в представлении (4) аргумент $d=Z$, в представлении (II) - девиатор:

$$\chi^{ij} = Z^{ij} - \frac{1}{3} (Z^{zs} \delta_{zs}) \delta^{ij} \quad (12)$$

и скаляры β_s , β_5 - функции инвариантов "действия":

$$tzz, tzx^2, tzx^3 = 3 \det \chi. \quad (13)$$

В рассматриваемом случае, согласно принципу Кюри, симметрия A^{ijkl} должна быть не ниже симметрии девиатора χ , который полностью определяет группу симметрии воздействия Z . Но когда χ транстропен, тензор A в общем случае ортотропен из-за ортотропности χ .

Следовательно, чтобы удовлетворить принципу Кюри, необходимо в представлении (II) скаляры при членах, содержащих тензор χ , положить равными нулю.

Тогда

$$A^{ijkl} = \beta_1 I + \beta_2 \theta + \beta_3 (\delta \otimes \chi + \chi \otimes \delta) + \beta_4 B(\delta, \chi) + \beta_5 \chi \otimes \chi. \quad (14)$$

Из последнего равенства, согласно условию (3), следует представление ортотропного "девиатора" в виде

$$D = \beta_0 [\Gamma + a_1 D_1(\delta, \chi) + a_2 \chi \otimes \chi], \quad (15)$$

* Этот вопрос требует специального исследования и рассмотрения с позиций теории дислокаций.

где $T = I - \theta$ - "девиаторная" единица,

$$D_1(\sigma, X) = \frac{1}{4} (\sigma^{ik} X^{jl} + \sigma^{il} X^{jk} + X^{jk} \sigma^{il} + X^{il} \sigma^{jk}) - \frac{1}{3} (\sigma^{ij} X^{kl} + X^{ij} \sigma^{kl}). \quad (15a)$$

Дальнейшее исследование тензорной функции (15) позволяет провести следующее известное из линейной алгебры представление симметричного девиатора четвертого ранга [3]:

$$D = e_z^{zs} e_z \otimes e_s \quad (z, s = 1, 2, \dots, 5), \quad (16)$$

Здесь $e_z = e_z^{ij}$ - ортонормированный девиаторный базис, т.е.

$$(e_z, e_s) = \begin{cases} 1 & \text{при } z=s; \\ 0 & \text{при } z \neq s. \end{cases} \quad (16a)$$

Коэффициенты C^{zs} вычисляются с помощью билинейной формы

$$C^{zs} = D_{ijkl} e_z^{ij} e_s^{kl} = (D e_s e_z). \quad (17)$$

Причем они остаются постоянными при любом преобразовании координат реального трехмерного пространства, но изменяются как компоненты тензора второго ранга при переходе в пятимерном девиаторном пространстве к новому ортонормированному базису e'_z по формуле

$$e'_z = \alpha_{zs} e^s, \quad (18)$$

где α_{zs} - ортогональная матрица 5 x 5.

Отметим, что в представлении (16) все ортонормированные базисы равноправны, так как любой из них может быть получен из одного с помощью преобразования (18).

Девиаторный базис (16a) выберем следующим образом:

$$e_1 = \lambda = \frac{X}{\sqrt{(X, X)}} = \frac{X}{\sqrt{t_2 X^2}}, \quad t_2 \lambda^3 = \frac{t_2 X^3}{(t_2 X^2)^{3/2}}; \quad (19)$$

$$e_2 = \nu = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{3} \sigma + \lambda t_2 \lambda^3 - \lambda^2 \right), \quad t_2 \nu^3 = a, \quad (20)$$

где

$$a = \sqrt{\frac{1}{6} - (t_2 \lambda^3)^2}. \quad (20a)$$

Главные компоненты соосных девиаторов V и λ связаны соотношением (10), как и девиаторы X и Y . Остальные три базисных девиатора выбираем так, чтобы в главных осях анизотропии их компоненты были равны:

$$e_3^{23} = e_4^{31} = e_5^{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (21)$$

а остальные компоненты этих тензоров были равны нулю.

Подставляя в (15) значение

$$T = E^{23} e_2 \otimes e_3 = E^{22} e_2 \otimes e_2,$$

где $E^{2s} = \begin{cases} 1 & z=s \\ 0 & z \neq s \end{cases}$ — единичная матрица 5×5 , и значение из (19), получаем

$$D = t_0 \left[E^{22} e_2 \otimes e_2 + C_1 D_1(\sigma, \lambda) + C_2 e_1 \otimes e_1 \right], \quad (22)$$

$$\text{где } C_1 = a_1 \sqrt{t_2 \lambda^2}; \quad C_2 = a_2 t_2 \lambda^2.$$

Определяя коэффициенты разложения девиатора $D_1(\sigma, \lambda)$ (15) по формуле (17), находим

$$D_1(\sigma, \lambda) = (t_2 \lambda^3) e_1 \otimes e_1 - \alpha (e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) - (t_2 \lambda^3) e_2 \otimes e_2 - \\ - \frac{1}{2} \lambda_1 e_3 \otimes e_3 - \frac{1}{3} \lambda_3 e_5 \otimes e_5 - \frac{1}{2} \lambda_2 e_4 \otimes e_4. \quad (23)$$

Теперь из (22) имеем

$$D = t_0 \left[d^{22} e_2 \otimes e_2 + d^{12} (e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) \right], \quad (24)$$

$$\text{где } d^{12} = -\alpha C_1;$$

$$d^{11} = 1 + C_2 + C_1 t_2 \lambda^3, \quad d^{22} = 1 - C_1 t_2 \lambda^3; \quad (24a)$$

$$d^{33} = 1 - 0,5 \lambda_1 C_1, \quad d^{44} = 1 - 0,5 \lambda_2 C_1, \quad d^{55} = 1 - 0,5 \lambda_3 C_1.$$

Здесь λ_k являются алгебраическими инвариантами, а именно корнями характеристического уравнения

$$\det(\lambda^{ij} - \sigma \sigma^{ij}) = 0 \quad (25)$$

¹ В данном случае функциями инварианта

$$t_2 \lambda^3 = 3 \det \lambda. \quad (25a)$$

Предположим, что в представлении (24) коэффициенты d^{2s} зависят от третьего инварианта $t_2 x^3$ тензорного аргумента Z .

Тогда они должны зависеть от

$$t_2 x^3 = \frac{t_2 x^3}{(t_2 x^2)^{3/2}}; \quad a = \sqrt{\frac{1}{b} - t_2 x^3}$$

алгебраических инвариантов $\lambda_k = f_k(t_2 x^3)$.

Но это возможно только при $C_1 = 0$ [что следует из (24a)].

Итак, получены два представления ортотропного материального "девиатора" D^{ijkl} , описывающего приобретенную анизотропию:

$$D = t_0 [T + C_1 D_1(\sigma, \lambda) + C_2 \lambda \otimes \lambda]; \quad (26)$$

$$D = t_0 (T + C \lambda \otimes \lambda), \quad (26a)$$

где λ - нормированный девиатор;

C_1, C_2, C - скалярные функции тензорной меры воздействия $Z^{ij} (X^{ij} = T^{ijkl} Z_{kl})$.

Подчеркнем, что в (26a) скаляр C не зависит от третьего инварианта Z , т.е. от $t_2 x^3$.

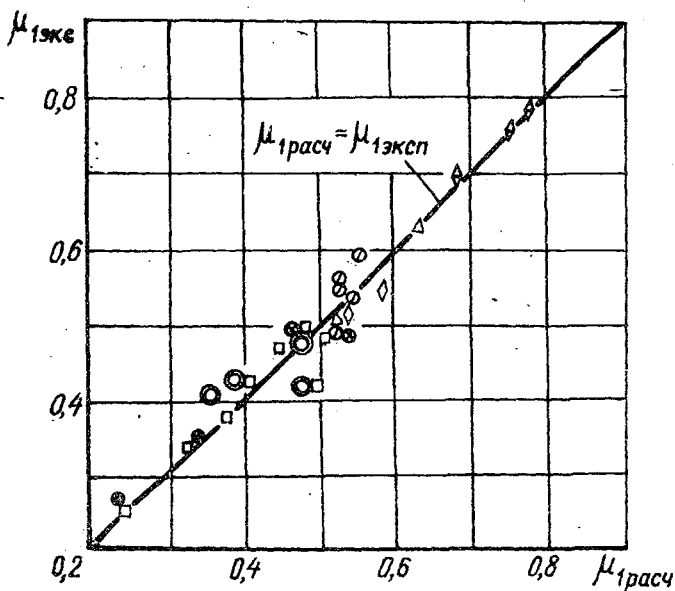
Формулы (26) позволяют получить определенные соотношения для технических показателей анизотропии. Причем представление (26) снижает число независимых деформационных показателей с пяти до трех, а (26a) - частный случай (26) при $C_1 = 0$, до двух. Соотношения, которыми можно пользоваться при практических расчетах для конкретного материала, устанавливаются лишь опытным путем.

Однако, как показывают результаты обработки экспериментальных данных, полученных советскими и зарубежными исследователями [4, 5, 6], в большинстве случаев с практической степенью точности можно пользоваться представлением (26a). Выведенное из него соотношение, связывающее коэффициенты поперечной деформации μ_{kl} (индекс k показывает направление поперечного сжатия при действии силы в направлении l), имеет вид [7]:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\mu_{12}} + \frac{1}{\mu_{21}} - 2 \right) \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1} + \frac{3(\mu_{12}\mu_{21} - 1)(1 - \mu_1)}{\left(\frac{1}{\mu_{12}} + \frac{1}{\mu_{21}} - 2 \right) (1 + \mu_1)} \quad (27)$$

$$\frac{1}{\mu_{12}} + \frac{1}{\mu_{21}} - 1 = 1.$$

Сравнительные данные по расчету значений μ_1 (коэффициент, вычисленный по результатам испытания образцов под углом 45°) по формуле (27) и опытным данным приведены на рис. 1.



Р и с. 1. Результаты сравнения расчетных и опытных данных значения μ_1 : ○—○—○ Zn; △—△—△ Ni; ● — нерж. стали; ○ — сталь Д; ● — сталь для вып. □ — Al-сплавы; ● — сталь III; ◇ — л — 62; ▽ — МАВ; ◇ — Ti-сплавы

Л и т е р а т у р а

1. Смирнов В.С., Дурнев В.Д. Текстурирование при прокатке. М., "Металлургия", 1971.
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды, т I. Ф.М. М., "Наука", 1976.
3. Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. Ф.М., М., "Наука", 1970.
4. Арышевский Ю.М. Теория листовой штамповки анизотропных материалов. Изд. Саратовского университета, 1973.

5. Шевелев В.В., Яковлев С.П. Анизотропия листовых материалов и ее влияние на вытяжку. М., "Машиностроение", 1977.

6. Экспресс-информация. Серия "Технология и оборудование кузнечно-штамповочного производства", 1965, № 14.

7. Арышенский Ю.М., Калужский И.И. Некоторые особенности структуры материальных тензоров теории пластичности ортотропных сред. Сб.: "Теория и технология обработки металлов давлением". Куйбышев, 1977.

УДК 621.961.2: 669.018.95

Ю.В.Крылов, Ю.А.Москалев,
С.И.Козий, Г.Г.Кантер,
В.А.Глушечков, В.Ю.Арышенский

К ВОПРОСУ ОБРАЗОВАНИЯ ЗАКОНЦОВОК
ТРУБЧАТЫХ ТЯГ ИЗ УГЛЕПЛАСТИКА
ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ИМПУЛЬСНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В настоящее время в конструкциях летательных аппаратов находят применение трубчатые тяги, стойки, подкосы и прочие силовые элементы (агрегаты), выполненные с применением полимерных композиционных материалов - углепластиков и боропластиков.

Поскольку подобные элементы конструкции в процессе эксплуатации испытывают действие значительных растягивающих и сжимающих осевых нагрузок, их работоспособность значительно зависит от конструкции узлов крепления и способа их соединений с трубчатой частью, изготовленной из композиционного материала.

Известны различные виды клеевых и клее-механических соединений металлических узлов крепления с цилиндрическими или коническими законцовками трубы [1, 2, 3]. Однако они недостаточно технологичны, так как имеют сложную конфигурацию сопряжений, требуют повышенную точность механической обработки сопрягаемых поверхностей. Установка таких узлов крепления связана со значительными затратами ручного труда. Кроме того, эти виды узлов крепления не обеспечивают достаточной прочности и надежности трубчатых силовых элементов, так как под действием предельных осевых нагрузок раз-