2. Сидоренко М.К. Виброметрия газотурбинных двигателей.-М.:Машиностроение, 1973. - 224 с.
3. Самойлович Г.С. Возбуждение колебаний лопаток турбомашин.-М.:Машиностроение, 1975. - 288 с.

УДК 620.318.6

Г.В.Лазуткин

ВЫНУЖДЕННЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЙ ВИБРОЗАЩИТНЫХ СИСТЕМ С КОНСТРУКЦИОННЫМ ГИСТЕРЕЗИСОМ

Теоретическое исследование нелинейных колебаний виброзащитных систем (ВС) с конструкционным гистерезисом является сложной задачей из-за существенно нелинейных зависимостей упругофрикционных характеристик (УФХ) виброизоляторов и демпферов как от деформации x, так и, по крайней мере, от ее амплитуды A и знака скорости $\sigma = \operatorname{sign}\dot{x}$ (случай симметричных УФХ). Запишем дифференциальное уравнение движения ВС с одной степенью свободы:

$$\ddot{x} + \Phi(\sigma, x, A) = F(t), \qquad (1)$$

где $\Phi(\sigma, x, A) = \frac{R}{m}$; R - реакция виброизолятора; m - масса ВС; $F(t)$ - периодическая возбуждающая нагрузка; t - время.

Наиболее широкое распространение при изучении нелинейных колебаний ВС получили метод малого параметра Крылова-Боголюбова /1/ и вариационный метод Бубнова-Галеркина /2,3/. Однако их применение для изучения колебаний ВС с конструкционным гистерезисом ограничивается из-за недостаточной точности решения задач, вызванной отсутствием ограничений, которые накладываются в первом случае на величину малого параметра, во втором - на выбираемую форму приближенного решения. Так, по данным автора работы /4/, приближенное решение по амплитудам колебаний ВС на резонансе для случая УФХ виброизолятора, заданных петлями гистерезиса в форме параллелограммов, может отличаться от точного на 25% и более. Кроме того, если петли гистерезиса имеют при вершинах разрыв непрерывности (случай "сухого" трения)

$$\Phi = \operatorname{sign}\dot{x} + x, \qquad (2)$$

то для гармонической возбуждающей нагрузки с амплитудой $\beta < \frac{4}{\pi}$ приближенное решение задачи о колебаниях ВС вообще невозможно получить.

В работе /5/ предложен комбинированный асимптотический метод (КАМ), основывающийся на сочетании методов малого параметра и Бубнова-Галеркина. Суть метода заключается в построении асимптотических разложений решения нелинейного дифференциального уравнения (I), преобразованного с помощью введения искусственных функций $\Phi_n(X, A_0)$, $Q(t)$ и малого параметра $\varepsilon = 1$ к виду

$$\ddot{X} + \Phi_n(X,A_0) = Q(t) + \varepsilon\left[\Phi_n(X,A_0) - \Phi(\sigma,X,A) + F(t) - Q(t)\right]. \quad (3)$$

При этом коэффициенты функций $\Phi_n(X,A_0)$ и $Q(t)$ выбираются с помощью метода Бубнова-Галеркина таким образом, чтобы порождающее решение приблизилось к точному, а поправочные слагаемые высших приближений были достаточно малы. Как показано в работе /5/, преимуществами этого метода являются простота и высокая точность получаемых приближенных решений.

Рассмотрим применение КАМ для установившихся колебаний ВС с симметричными УФХ при гармоническом возбуждении с амплитудой β. В соответствии с этим уравнение движения (I) примет вид

$$\ddot{X} + \Phi(\sigma,X,A) = \beta\cos(\omega t + \alpha), \quad (4)$$

где α – фазовый угол между колебаниями ВС и вынуждающей нагрузкой. В общем случае нелинейных колебаний ВС фазовые углы для различных гармонических составляющих имеют неодинаковые значения. Следовательно, на выбор α должно накладываться строгое ограничение: например, можно связать значение угла с экстремумами колебательного процесса и для моментов времени $t_j \in \left[0, \frac{\pi}{\omega}, \frac{2\pi}{\omega} \ldots\right)$ потребовать

$$\dot{X}(t_j) = 0, \quad |X(t_j)| = A. \quad (5)$$

В данной работе ограничимся изучением нелинейных колебаний ВС, близких к гармоническим в том смысле, что за период колебаний $2\pi/\omega$ скорость только дважды обращается в ноль. Приближенное решение (4) по КАМ, как и по методу малого параметра, находится в виде разложения по степеням ε. Причем, учитывая и амплитудную зависимость реакции виброизолятора, запишем:

$$X \cong \sum_{d=0}^{M} \varepsilon^d X_d; \quad (6)$$

$$A \cong \sum_{d=0}^{M} \varepsilon^d A_d. \quad (7)$$

Разложение (6) можно представить и с помощью ряда Фурье, содержащего в силу симметрии УФХ только нечетные гармонические составляющие:

$$X = A_0 \cos\omega t + \sum_{d=1}^{M} \varepsilon^d \left(\sum_{i=3}^{\infty} A_{id} \cos i\omega t + \sum_{i=1}^{\infty} B_{id} \sin i\omega t\right), \tag{8}$$

где A_0 – полная амплитуда первой гармоники. В силу близости колебаний ВС к гармоническим можно выбрать в качестве порождающего решения выражение

$$X \approx X_0 = A_0 \cos\omega t. \tag{9}$$

При таком подходе к решению задачи одна из искусственных функций в уравнении (3) должна линеаризовать УФХ виброизоляторов в форме

$$\Phi_л (X, A_0) = \gamma^2 (A_0) X, \tag{10}$$

другая – представлять возбуждающую нагрузку в виде

$$Q(t) = \beta_{c,0} \cos\omega t. \tag{11}$$

По методу КАМ коэффициенты $\gamma^2(A_0)$ и $\beta_{c.0}$, входящие в формулы (10) и (11), должны обеспечивать минимум среднеквадратичной невязки уравнения (4) для формы решения (9), т.е.

$$\int_0^{2\pi} \left[\ddot{X}_0 + \Phi(\sigma, X_0, A_0) - \beta_{c,0} \cos\omega t\right] \cos\omega t \, d(\omega t) = 0, \tag{12}$$

откуда следует

$$\gamma^2(A_0) = \frac{1}{\pi A_0} \int_0^{2\pi} \Phi(\sigma, X_0, A_0) \cos\omega t \, d(\omega t). \tag{13}$$

Представим возбуждающую нагрузку в виде разложения по степеням малого параметра $\varepsilon = 1$:

$$\beta \cos(\omega t + \alpha) = \sum_{d=0}^{M} \varepsilon^d f_d(t) =$$

$$= \sum_{d=0}^{M} \varepsilon^d \beta_{c.d} \cos\omega t + \sum_{d=1}^{M} \varepsilon^d \beta_{s.d} \sin\omega t. \tag{14}$$

Учитывая выражение (10), преобразуем дифференциальное уравнение (4) к форме (3):

$$\ddot{X} + \gamma^2 X = \sum_{d=0}^{M} \varepsilon^d f_d(t) + \varepsilon \Gamma(\sigma, X, A); \tag{15}$$

$$\Gamma(\sigma, X, A) = \gamma^2 X - \Phi(\sigma, X, A). \tag{16}$$

Запишем функцию $\Gamma(\sigma, X, A)$ в виде разложения рядом Тейлора в окрестности точки с координатами $X = X_0$, $\dot X = \dot X_0$, $A = A_0$. Предварительно заметим, что реакция виброизолятора с конструкционным гистерезисом всегда может быть представлена в виде суммы двух функций, одна из которых (Φ_c) описывает геометрическое место средин петель гистерезиса, другая $(\sigma\Phi_m)$ – величины сил трения:

$$\Phi(\sigma, X, A) = \Phi_c(X, A) + \sigma\Phi_m(X, A).$$

Отсюда ясно, что производная по $\dot X$ функции Φ и соответственно Γ всегда равна нулю. Следовательно, можно записать

$$\Gamma(\sigma, X, A) = \Gamma(\sigma, X_0, A_0) + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial X}\right)_{\substack{X=X_0\\ A=A_0}} (X - X_0) + \\ + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial A}\right)_{\substack{X=X_0\\ A=A_0}} (A - A_0) + \dots . \tag{17}$$

Тогда дифференциальное уравнение движения (15) с учетом формул (14) и (17) примет вид

$$\ddot X + \gamma^2 X = \sum_{d=0}^{M} \varepsilon^d \beta_{c,d} \cos\omega t + \sum_{d=1}^{M} \varepsilon^d \beta_{s,d} \sin\omega t +$$

$$+ \varepsilon\left[\Gamma(\sigma, X_0, A_0) + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial X}\right)_{\substack{X=X_0\\ A=A_0}} (X - X_0) + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial A}\right)_{\substack{X=X_0\\ A=A_0}} (A - A_0)\right].$$

Следуя процедуре построения разложений решения этого уравнения в КАМ, представим его в виде системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\varepsilon^0 \quad \ddot X_0 + \gamma^2 X_0 = \beta_{c.0} \cos\omega t; \tag{18}$$

$$\varepsilon^1 \quad \ddot X_1 + \gamma^2 X_1 = \beta_{c.1} \cos\omega t + \beta_{s.1} \sin\omega t + \\ + \Gamma(\sigma, X_0, A_0); \tag{19}$$

$$\varepsilon^2 \quad \ddot X_2 + \gamma^2 X_2 = \beta_{c.2} \cos\omega t + \beta_{s,2} \sin\omega t + \\ + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial X}\right)_{\substack{X=X_0\\ A=A_0}} X_1 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial A}\right)_{\substack{X=X_0\\ A=A_0}} A_1. \tag{20}$$

Сформулируем основные положения построения приближенного решения уравнения (4), получаемого суммированием частных решений линейных дифференциальных уравнений (I8)-(20).

Решение уравнения (I8), в силу наложенных ограничений (I2) и (I3) на коэффициенты $\beta_{c,0}$ и γ^2, может быть представлено в виде

$$A_0(\gamma^2-\omega^2)=\beta_{c,0}\,. \tag{2I}$$

Для нахождения решений уравнений (I9), (20) и др. разложим их правые части в ряд Фурье, в результате для любого номера d получим

$$\ddot{x}_d+\gamma^2 x_d=\beta_{c,d}\cos\omega t+\beta_{s,d}\sin\omega t+\sum_{i=1}^{\infty}a_{id}\cos i\omega t+$$
$$+b_{id}\sin i\omega t,$$

причем для $d=1$ $(i\in[1,3,5,7,\dots])$

$$a_{i1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Gamma(\sigma,x_0,A_0)\cos i\omega t\,d(\omega t),$$

$$b_{i1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Gamma(\sigma,x_0,A_0)\sin i\omega t\,d(\omega t); \tag{22}$$

для $d=2$ $(i\in[1,3,5,\dots])$

$$a_{i2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x}x_1+\frac{\partial\Gamma}{\partial A}A_1\right)\cos i\omega t\,d(\omega t),$$

$$b_{i2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x}x_1+\frac{\partial\Gamma}{\partial A}A_1\right)\sin i\omega t\,d(\omega t). \tag{23}$$

Чтобы обеспечить в порождающем решении (9) выбор полной амплитуды первой гармоники, необходимо потребовать отсутствие в поправочных слагаемых членов, содержащих косинусы, откуда вытекает

$$\beta_{c,d}=-a_{1d}\,. \tag{24}$$

Заметим, что в силу уравнения (I2) $a_{11}=0$, следовательно,

$$\beta_{c,1}=0.$$

С учетом изложенного частное решение уравнения номера d может быть представлено в виде

12-7018

$$x_d = \frac{\beta_{s,d}}{\gamma^2 - \omega^2} \sin \omega t + \sum_{i=3}^{\infty} \frac{a_{id}}{\gamma^2 - i^2\omega^2} \cos i\omega t +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_{id}}{\gamma^2 - i^2\omega^2} \sin i\omega t .$$

Из условия (5) потребуем для каждого d -го поправочного слагаемого выполнения равенства

$$A_d = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{a_{id}}{\gamma^2 - i^2\omega^2} .$$

Очевидно, полученное равенство обеспечивает выполнение требования $|x(t_j)| = A$ и дает возможность очень просто найти разложение (7). Вместе с этим, находя производную $\dot{x}_d$ и приравнивая ее к нулю, получим

$$\beta_{sd} = -(\gamma^2 - \omega^2) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i b_{id}}{\gamma^2 - i^2\omega^2} . \tag{25}$$

Таким образом, неизвестные коэффициенты разложения (8), представляющего собой приближенное решение уравнения движения (4) в форме (6), могут быть записаны в виде

$$A_{id} = \frac{a_{id}}{\gamma^2 - i^2\omega^2} ;$$

$$B_{1d} = -\sum_{i=3}^{\infty} \frac{i b_{id}}{\gamma^2 - i^2\omega^2} ;$$

$$B_{id} = \frac{b_{id}}{\gamma^2 - i^2\omega^2} , \tag{26}$$

где a_{id} и b_{id} вычисляются с помощью соотношений (22) и (23). При этом амплитуда колебаний ВС с учетом выражения (7) записывается в виде

$$A = A_0 + \sum_{d=1}^{M} \varepsilon^d \sum_{i=3}^{\infty} A_{id} . \tag{27}$$

Коэффициенты A_{id} и B_{id} связаны функционально с величиной A_0 . Для ее определения обратимся к разложению (14), откуда вытекает

$$\beta^2 = \left(\sum_{d=0}^{M} \beta_{cd}\right)^2 + \left(\sum_{d=1}^{M} \beta_{sd}\right)^2 .$$

Тогда с учетом соотношений (21), (24) и (25) получим уравнение для определения A_0

$$\beta^2=\left[A_0(\gamma^2-\omega^2)-\sum_{d=2}^{M} a_{1d}\right]^2+\left[(\gamma^2-\omega^2)\sum_{d=1}^{M}\varepsilon^d\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i\,b_{id}}{\gamma^2-i^2\omega^2}\right]^2. \tag{28}$$

При этом последний неизвестный параметр - фазовый угол α - найдем по формуле

$$tg\,\alpha=\sum_{d=1}^{M}\beta_{sd}\Big/\sum_{d=0}^{M}\beta_{cd}$$

или с учетом соотношений (24) и (25)

$$tg\,\alpha=-\frac{(\gamma^2-\omega^2)\sum\limits_{d=1}^{m}\varepsilon^d\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{i\,b_{id}}{\gamma^2-i^2\omega^2}}{A_0(\gamma^2-\omega^2)-\sum\limits_{d=2}^{M}a_{1d}}.$$

Оценка эффективности КАМ проводилась на примере вынужденных колебаний ВС с "сухим" трением (2), наиболее ярко характеризующим нелинейность сил трения виброизоляторов и демпферов с конструкционным демпфированием.

Воспользуемся соотношением (13) и найдем $\gamma^2=1$, а по формуле (16) получим $\Gamma(\sigma,x,A)=-\sigma$. Из соотношений (22) и (23) находим

$$a_{i1}=0,\quad b_{i1}=-\frac{4}{\pi i},$$

$$a_{id}=b_{id}=0,\quad \forall d\in[2,3,\dots,M].$$

С помощью выражений (26) найдем коэффициенты разложения Фурье (8):

$$A_{id}=0\qquad \forall i\in[3,5,\dots,\infty];$$

$$B_{id}=\frac{4}{\pi}\sum_{i=3}^{\infty}\frac{1}{1-i^2\omega^2},\quad i=1;$$

$$B_{id}=-\frac{4}{\pi i(1-i^2\omega^2)}\qquad \forall i\in[3,5,\dots,\infty).$$

Из соотношения (27) следует $A=A_0$. Для определения амплитуды A_0 запишем уравнение (28) в следующем виде:

$$\beta^2=A_0^2(1-\omega^2)^2+\frac{16}{\pi^2}(1-\omega^2)^2\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-i^2\omega^2}\right)^2.$$

Разрешим его относительно A_0, в результате чего получим

$$A=A_0=\sqrt{\frac{\beta^2}{(1-\omega^2)^2}-\frac{16}{\pi^2}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-i^2\omega^2}\right)^2}.$$

Сравнение этого приближенного решения с точным /6/

$$A_0 = \sqrt{\frac{\beta^2}{(1-\omega^2)^2} - \frac{1}{\omega^2} tg^2 \frac{\pi}{2\omega}}$$

показывает, что, например, для β = I,265 при i = 3 погрешность в определении амплитуд колебаний ВС на резонансе составляет 47%, для i = 5-3I%, для i = 2I-I5%, для i = I0I – 3%. При достаточно большом числе гармоник (в расчетах до i = I00I) приближенное решение асимптотически стремится к точному. Следует отметить, что при выполнении условия (5) аналогичное приближенное решение задачи о колебаниях ВС с "сухим" трением может быть получено и с помощью метода Бубнова-Галеркина.

В ы в о д ы

I. Комбинированный асимптотический метод является эффективным средством исследования особенностей нелинейных колебаний ВС с конструкционным гистерезисом. Высокая точность и простота приближенных решений обеспечивается не только соответствующим выбором искусственно вводимых в уравнение движения функций, но и построением дополнительных асимптотических разложений для возбуждающей нагрузки и амплитуды колебаний ВС с одновременным наложением строгих ограничений на выбор фазового угла между колебаниями и нагрузкой.

2. Погрешность определения параметров колебаний ВС с конструкционным гистерезисом связана с количеством учитываемых в приближенном решении высших гармонических составляющих, порождаемых силами трения.

Б и б л и о г р а ф и ч е с к и й   с п и с о к

I. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.-М.:Наука, I974.- 504 с.

2. Бабаков И.М. Теория колебаний.-М.:Наука, I968. - 560 с.

3. Каннингхем В. Введение в теорию нелинейных систем.-М.;Л.:Госэнергоиздат, I962.- 456 с.

4. Эскин И.Д. Исследование вынужденных периодических колебаний упруго-фрикционной системы с одной степенью свободы и с петлей гистерезиса в форме параллелограмма.-В сб.: Вибрационная прочность и надежность двигателей и систем летательных аппаратов. Куйбышев: КуАИ, I972, вып. 5I, с.24-34.

5. Мазуткин Г.В. Колебания виброзащитных систем с конструкционным демпфированием.-В сб.:Вибрационная прочность и надежность двигателей и систем летательных аппаратов. Куйбышев:КуАИ, 1984, с. 118-126.
6. Быховский И.И. Основы теории вибрационной техники.-М.:Машиностроение, 1968.- 362 с.

УДК 628.7.036

Р.Г.Перельман

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ И ИССЛЕДОВАНИЯ ЭРОЗИОННОЙ ПРОЧНОСТИ КОМПРЕССОРОВ ГТД

Увеличение требований к надежности и ресурсу двигателей в условиях интенсификации рабочих процессов и всепогодного использования привело к возрастанию роли конструкционной прочности - прочности конструкции с учетом металлургических, технологических и конструкционных факторов в условиях эксплуатации.

Определяющий вклад в развитие этой области знаний внесен академиком Н.Д.Кузнецовым. Им показано /1/, что эрозионно-коррозионное воздействие внешней среды, особенно активное при переменных нагрузках, вызывает более 40% прочностных дефектов. Н.Д.Кузнецов постоянно уделяет внимание развитию такого направления конструкционной прочности, как эрозионная прочность, поскольку эрозионное изнашивание - одна из причин ограничения надежности и ресурса ГТД /2/. Так, в США досрочно снимается более 300 самолетных ГТД ежегодно, из которых до 75% из-за повреждения (забоин) лопаток посторонними предметами и примерно 30% из них вследствие эрозии лопаток. Кроме того, крупные частицы, вызывающие забоины, могут при этом дробиться и затем эродировать ступени. Интенсивнее изнашиваются ГТД пилонной компоновки и вертолетные. Изнашивание обусловливается соударением лопаток с твердыми (песок) и жидкими (капли дождя) частицами и интенсифицируется при последовательном воздействии жидких, а затем твердых частиц /4/.

Прогнозирование, диагностирование и обеспечение эрозионной прочности лопаточных машин - актуальная и важная задача, изучению которой посвящается все больше работ /2-7/.

Эрозионная прочность не коррелируется в широком диапазоне с общепринятыми механическими характеристиками материалов и их комби-