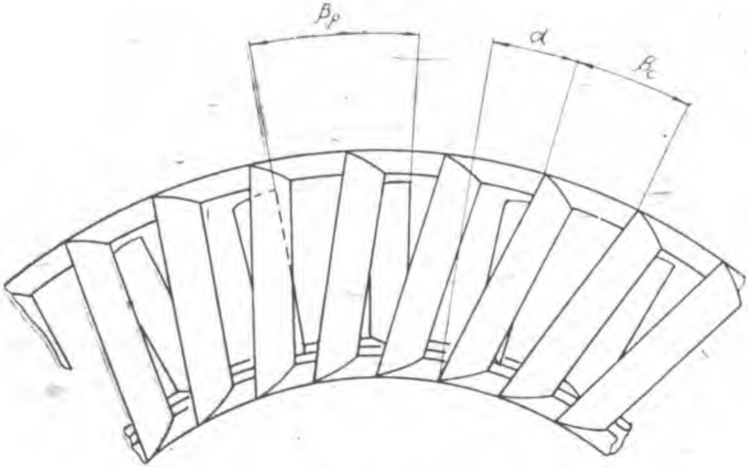
КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА
ТРУДЫ, ВЫПУСК XXX, 1967 г.
Вибрационная прочность и надежность двигателей
и систем летательных аппаратов

П. Д. ВИЛЬНЕР

ВОЗБУЖДЕНИЕ ВИБРАЦИИ ЛОПАТОК СЛЕДАМИ СОСЕДНЕГО ВЕНЦА ПРИ НАКЛОННОМ (НЕ РАДИАЛЬНОМ) РАСПОЛОЖЕНИИ СПРЯМЛЯЮЩИХ ЛОПАТОК

Идея применения наклонных лопаток заключается в том, что возбуждаемая лопатка будет входить в аэродинамический след предыдущей лопатки не сразу по всей длине, а постепенно от одного конца к другому (фиг. 1). При этом эффект воздействия постепенного входа в след проявляется как на спрямляющих, так и на рабочих лопатках, но, конечно, он будет различным.

Проведем анализ возбуждения при следующих предположениях):



Фиг. 1.

— окружную неравномерность газовых сил по венцу, созданную следами, будем считать разложенной в ряд Фурье и исследовать воздействие каждой гармоники разложения в отдельности.

— лопатки колеблются как балки, а не как пластинки;

— демпфирование линейно;

— формы колебаний лопаток известны;

— погонная возбуждающая сила $q(x)$ каждой гармоники разложения не зависит от наклона спрямляющих лопаток, т. е. радиальные течения для решеток с радиальными и наклонными лопатками одинаковы.

Введем обозначения:

$y_\text{к}(x)$ — форма колебаний лопатки с частотой $p_\text{к}$;

$\rho(x)$ — погонная масса лопатки;

$p_\text{к}$ — собственная частота колебаний лопатки;

$q_i(x)\cos\omega_i t$ — сила, возбуждающая колебания при радиальном расположении спрямляющих лопаток;

t — время;

i — номер гармоники разложения возбуждающей силы в ряд Фурье по отношению к шагу лопаток возбуждающего венца;

$\omega_i = 2\pi iz\dfrac{n}{60}$ — частота возбуждения;

z — число возбуждающих лопаток;

n — число оборотов ротора в минуту;

$\beta_\text{с}$ — угловой шаг спрямляющих лопаток;

$\beta_\text{р}$ — угловой шаг рабочих лопаток;

α — центральный угол, определяющий наклон спрямляющих лопаток;

l — длина лопатки;

x — координата вдоль лопатки;

$\gamma = \dfrac{\alpha}{\beta}$ — перекрытие наклоном лопатки шага лопаток возбуждающего венца.

Колебания, возбуждаемые при радиальном расположении спрямляющих лопаток i-й гармоникой возбуждения, можно записать в виде

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_0^l q(x)\, y_\text{к}(x)dx}{p_\text{к}^2 \int_0^l \rho(x) y_\text{к}^2(x)dx} \cdot \frac{\cos\omega_i t}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega_i^2}{p_\text{к}^2}\right)^2 + \frac{\delta_\text{к}^2}{\pi^2}\cdot\frac{\omega_i^2}{p_\text{к}^2}}}\, y_\text{к}(x). \tag{1}$$

Для того, чтобы учесть наклон лопаток, т. е. фазовый сдвиг возбуждающей силы по длине, необходимо выражение для возбуждающей силы в (1)

$$q(x)\cos\omega_i t$$

заменить выражением

$$q(x)\cos\left[\omega_i t - \varphi_i(x)\right], \tag{2}$$

где

$$\varphi_i(x) = i\varphi_0 \frac{x}{l} = 2\pi i \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{x}{l}. \tag{3}$$

Шаг $\beta = \beta_р$ нужно принимать при возбуждении наклонных спрямляющих лопаток радиальными рабочими; шаг $\beta = \beta_с$ — при возбуждении радиальных рабочих наклонными спрямляющими.

Представив (2) в виде

$$q(x)\cos\left[\omega_i t - i\varphi_0 \frac{x}{l}\right] = q(x)\cos\omega_i t \cos i\varphi_0 \frac{x}{l} + q(x)\sin\omega_i t \sin i\varphi_0 \frac{x}{l}, \tag{4}$$

подставим в (1). Получим

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\left(\int_0^l q(x) y_к(x) \cos i\varphi_0 \frac{x}{l} dx\right)^2 + \left(\int_0^l q(x) y_к(x) \sin i\varphi_0 \frac{x}{l} dx\right)^2}}{p_к \int_0^l \rho(x) y_к^2(x)\, dx} \times \frac{y_к(x) \sin(\omega_i t - \psi_i)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_i^2}{p_к^2}\right)^2 + \frac{\delta_к^2}{\pi^2} \cdot \frac{\omega_i^2}{p_к^2}}}. \tag{5}$$

Не уточняя значения сдвига фазы ψ_i, обратим внимание на различие формул (5) и (1). Очевидно, что в каждом члене суммы они отличаются только числителем первого сомножителя. Следовательно, амплитуда колебаний лопатки, колеблющейся по $к$-ой форме при наклонных спрямляющих лопатках будет в

$$A_{ki} = \frac{\sqrt{\left(\int_0^l q(x) y_к(x) \cos i\varphi_0 \frac{x}{l} dx\right)^2 + \left(\int_0^l q(x) y_к(x) \sin i\varphi_0 \frac{x}{l} dx\right)^2}}{\int_0^l q(x)\, y_к(x) dx} \tag{6}$$

раз больше, чем при радиальных. Переходя к безразмерной координате $\xi = \frac{x}{l}$ и учтя, что $\varphi_0 = 2\pi\gamma$, получим

$$A_{ki} = \frac{\sqrt{\left(\int_0^1 q(\xi) y_к(\xi) \cos 2\pi i\gamma\xi d\xi\right)^2 + \left(\int_0^1 q(\xi) y_к(\xi) \sin 2\pi i\gamma\xi d\xi\right)^2}}{\int_0^1 q(\xi)\, y_к(\xi)\, d\xi}. \tag{7}$$

Зная форму колебаний $y_к(\xi)$ и распределение возбуждающей силы по длине лопатки $q(\xi)$, можно вычислить A_{ki} в зависимости от перекрытия (наклона) γ и получить таким образом влияние наклона на амплитуды колебаний лопаток.

Рассмотрим в качестве примера случай возбуждения наклонных спрямляющих лопаток рабочими лопатками соседнего венца. Предположим для простоты, что спрямляющие лопатки представляют собою свободно опертые по концам балки постоянного сечения, а возбуждающая сила равномерно распределена по длине.

Подставляя

$$q(\xi) = 1; \quad y_к(\xi) = \sin k\pi\xi$$

в (7), получим

$$A_{ki} = \frac{\sqrt{\left(\int_0^1 \sin k\pi\xi \cos 2\pi i\gamma\xi d\xi\right)^2 + \left(\int_0^1 \sin k\pi\xi \sin 2\pi i\gamma\xi d\xi\right)^2}}{\int_0^1 \sin k\pi\,\xi d\xi} =$$

$$= \frac{\sqrt{I_1^2 + I_2^2}}{I_3}. \tag{8}$$

Интегралы формулы (8):

$$I_1 = \int_0^1 \sin k\pi\xi \cos 2\pi i\gamma\xi d\xi = \begin{cases} \dfrac{k(1+\cos 2\pi i\gamma)}{\pi(k^2-4i^2\gamma^2)}; & k = 1, 3, 5, \ldots \\ \dfrac{k(1-\cos 2\pi i\gamma)}{\pi(k^2-4i^2\gamma^2)}; & k = 2, 4, 6, \ldots \end{cases} \tag{9}$$

$$I_2 = \int_0^1 \sin k\pi\xi \sin 2\pi i\gamma\xi d\xi = \begin{cases} \dfrac{k\sin 2\pi i\gamma}{\pi(k^2-4i^2\gamma^2)}; & k = 1, 3, 5, \ldots \\ -\dfrac{k\sin 2\pi i\gamma}{\pi(k^2-4i^2\gamma^2)}; & k = 2, 4, 6, \ldots \end{cases} \tag{10}$$

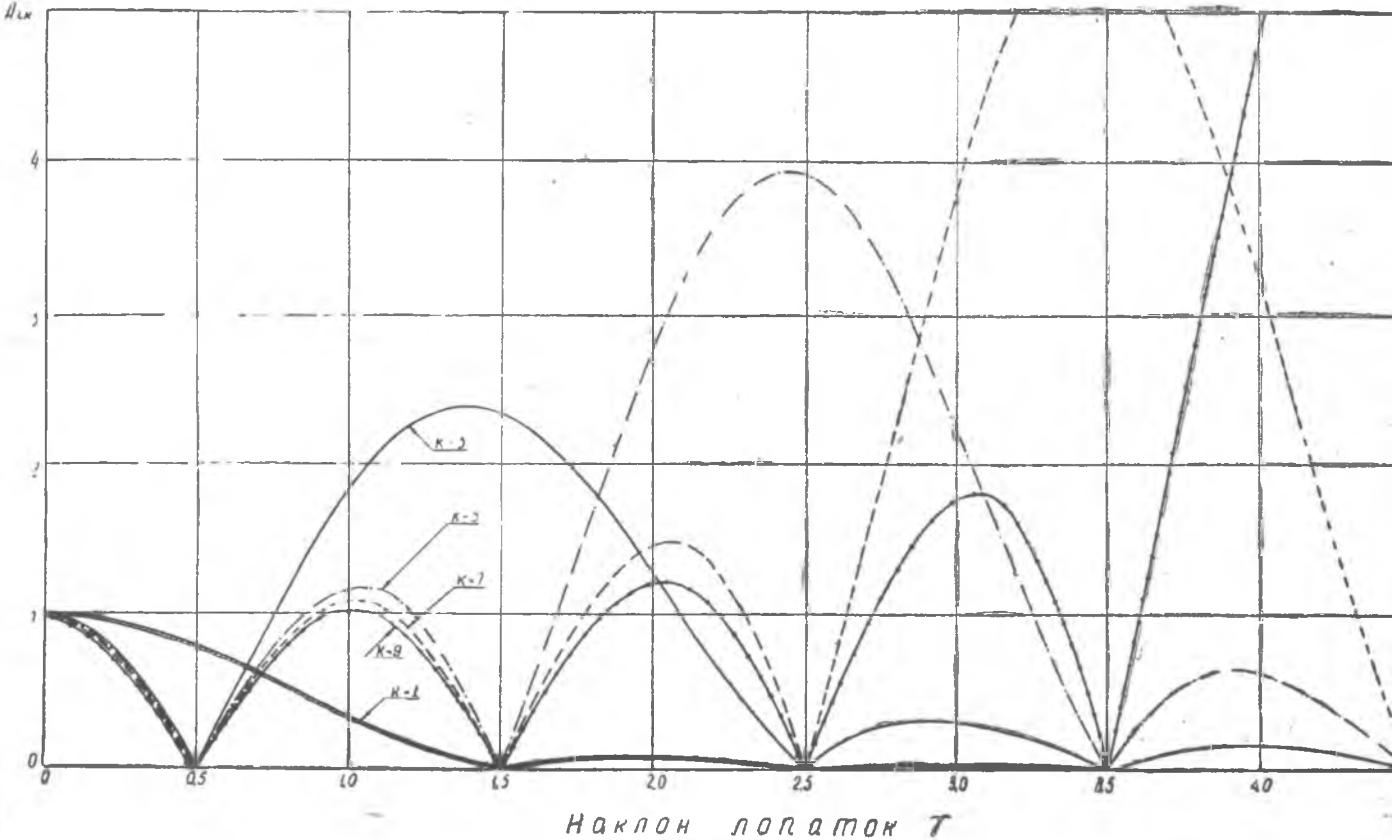
$$I_3 = \int_0^1 \sin k\pi\xi d\xi = \begin{cases} \dfrac{2}{k\pi}; & k = 1, 3, 5, \ldots \\ 0; & k = 2, 4, 6, \ldots \end{cases} \tag{11}$$

Подставляя (9) — (11) в (8), получим

$$A_{ki} = \begin{cases} \dfrac{k^2\cos\pi i\gamma}{k^2-4i^2\gamma^2}; & k = 1, 3, 5, \ldots \\ \infty; & k = 2, 4, 6, \ldots \end{cases} \tag{12}$$

Бесконечность для четных k получилась вследствие того, что предполагаемое возбуждение ортогонально всем четным формам колебаний при радиальном расположении лопаток и они не возбуждаются. Из (12) следует, что при заданных номере формы колебаний k и номере гармоники возбуждения i возбудимость лопатки меняется по параметру наклона γ — периодически. Максимумы этой кривой — неравноценны: наибольшие значения (кроме $k=1$) соответствуют наклону лопаток

$$\gamma = \frac{k}{2i}. \tag{13}$$



Фиг. 2.

Раскрывая неопределенность (12) при подстановке (13), получим

$$A_{ki\,\max}=\frac{k\pi}{4};\ k=1,\ 3,\ 5,\ \ldots\ \ldots, \tag{14}$$

то есть, значение наибольшего максимума растет с ростом номера формы колебаний. Из (12) также следует, что изменение номера гармоники i равносильно пропорциональному изменению наклона лопатки γ. Кривые, построенные по (12), приведены на фиг. 2. Из них следует, что для всех оборотов при возбуждении гармоникой z (т. е. $i=1$) имеется общий минимум при $\gamma=0{,}5$. Все остальные минимумы возбуждения не являются общими и использование их нецелесообразно, так как это может привести к значительному усилению возбуждения одних форм колебаний при снижении возбуждения для других.

Аналогично исследуются формы колебаний при других условиях опирания.