И. Д. ЭСКИН, Н. С. КОНДРАШОВ

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ С СУХИМ ТРЕНИЕМ НА КОНТАКТНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

В статье изложен приближенный метод решения задачи о свободных колебаниях многослойных конструкций с сухим трением между слоями при произвольных начальных и граничных условиях. Приближение состоит в том, что действительная нелинейная характеристика жесткости рассматриваемых систем с распространенными параметрами и, в общем случае, нелинейные граничные условия заменяются кусочно-линейными. Движение системы определяется последовательно по этапам. Разбивка движения системы на отдельные этапы производится по величине приращения зоны расслоения, допустимой требованиями точности расчета. На каждом этапе строится решение для линейной системы. Зная начальные условия и последовательно «припасовывая» решения на каждом этапе, получим решение задачи.

Указан способ оценки погрешности решения. При недостаточной точности первого приближения, не изменяя алгоритма, задачу можно решать во втором, третьем и т. д. приближениях. Для этого необходимо только уменьшить допустимую величину зоны расслоения.

Особенностью предложенного метода является то, что он позволяет получить решение в случае, когда действительная жесткостная характеристика системы в процессе колебаний заранее неизвестна, что всегда имеет место при колебаниях многослойных систем с распределенными параметрами и сухим трением на контактных поверхностях.

Он предполагает использование быстродействующих ЭЦВМ и при некоторых изменениях может быть применен для решения задач о вынужденных колебаниях указанных систем. Применение метода и его суть изложены на примере задачи о свободных колебаниях трехслойного стержня.

1. Постановка задачи

Рассмотрим свободные поперечные колебания трехслойного стержня единичной ширины и постоянной толщины $h_0=2h_н+h$, набранного из двух одинаковых накладок толщиной $h_н$ и прокладки толщиной h. Модуль упругости всех слоев одинаков и равен E. По длине l стержень сжат произвольной нагрузкой $p(x)$, не вызывающей деформации изгиба.* Стержень предварительно изогнут так, что его перемещения, углы поворота, кривизна сечений, упругий изгибающий момент, касательные напряжения на контактных поверхностях соответственно равны $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$, $f_5(x)$. Причем в местах, где в стержне возникли зоны расслоения, касательные напряжения $|f_5(x)|=\mu p(x)$, а где он остался целым $|f_5(x)|<\mu p(x)$, здесь μ — коэффициент трения, $p(x)>0$.

В начальный момент времени $t_0=0$ внешняя изгибающая нагрузка мгновенно снимается, и стержень совершает свободное движение как монолитная балка до момента времени t_1, когда в нем возникают первые зоны расслоения. При дальнейшем движении будут появляться новые зоны расслоения и расширяться существующие до тех пор, пока приращение касательных напряжений по всему стержню (одночастотные колебания) либо на части его (многочастотные колебания) не изменяет свой знак. В местах, где приращения касательных напряжений изменяют свой знак, расслоенные сечения снова работают как целые, и в них направление движения точек стержня меняется на противоположное. При движении в противоположном направлении вновь появляются зоны расслоения, и таким образом процесс колебаний продолжается до полной остановки системы. Предполагается, что на каждом этапе число зон и их длина не меняются, а в конце этапа они изменяются скачкообразно. Количество этапов выбирается из условий задачи и требуемой точности решения.

В соответствии с изложенным на любом j-ом этапе движения стержень можно считать линейной системой, движение которой описывается уравнением

$$m\frac{\partial^2 y_j}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI_j(x)\frac{\partial^2 y_j}{\partial x^2}\right]=-\sigma_0(t-t_{j-1})S_j(x) \qquad (1.1)$$

с естественными граничными условиями

$$y_j\frac{\partial^3 y_j}{\partial x^3}=0; \quad \frac{\partial y_j}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y_j}{\partial x^2}=0 \qquad (1.2)$$

и начальными условиями

при $t=t_{j-1}$ $\quad \dot{y}_j=0;\ y_j=y_{j-1}$. (для первого этапа $y_0=0$), (1.3)

---

* изменением сдавливающей нагрузки за счет динамического взаимодействия накладок с прокладкой пренебрегаем.

где m — погонная масса стержня;

y_j — текущее значение приращения прогиба на j-ом этапе;

$I_j(x)$ — момент инерции сечения стержня на j-ом этапе;

σ_0 — единичная функция Хевисайда;

t_{j-1} — время начала j-го этапа;

$S_j(x)$ — нагрузка, внезапно приложенная к стержню в начале этапа и равная

$$S_j(x) = \frac{\partial^2 f_4(x)}{\partial x^2} - \sum_{n=1}^{n=j-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI_n(x)\frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2}\right). \tag{1.4}$$

Естественно, что в начале первого этапа движения к стержню внезапно прикладывается нагрузка

$$S_1(x) = \frac{\partial^2 f_4(x)}{\partial x^2}.$$

При определении прогибов и границ зон расслоения на каждом j-ом этапе стержень рассматривается как монолитная балка, у которой момент инерции $I_j(x)$ является функцией координаты x, равной $I_0 = \frac{h_0^3}{12}$ в нерасслоенных зонах и $I_{j\,\text{экв}}(x)$ — в расслоенных (смысл величины $I_{j\,\text{экв}}(x)$ раскрыт в конце данного параграфа).

Решение уравнения (1.1) ищется в виде разложения в ряд по собственным формам соответствующей однородной задачи

$$y_j = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{jk}(t)\cdot Y_{jk}(x), \tag{1.5}$$

где $\varphi_{jk}(t)$ — подлежащая определению функция времени на j-ом этапе движения;

Y_{jk} — собственная форма свободных колебаний, соответствующая j-ому этапу движения.

Соответственно приращения углов поворота и кривизны текущего сечения запишутся в виде:

$$\frac{\partial y_j}{\partial x} = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{jk}(t)\cdot\frac{\partial Y_{jk}(x)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial^2 y_j}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{jk}(t)\cdot\frac{\partial^2 Y_{jk}(x)}{\partial x^2}. \tag{1.6}$$

Подставляя (1.5) в (1.1), умножая последовательно результат подстановки на Y_{jk} и каждый раз интегрируя по всей длине стержня, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{\varphi}_{jk}(t) + \omega^2_{cjk}\varphi_{jk}(t) = -\sigma_0(t-t_{j-1})S_{jk}(x), \tag{1.7}$$

$$k = 1, 2, 3\ldots,$$

где ω_{cjk} — собственная частота k-ой формы колебания, соответствующая жесткости системы на j-ом этапе,

$$S_{jk}(x) = \frac{\int\limits_0^l S_j(x) \cdot Y_{jk}(x)\,dx}{m \int\limits_0^l Y_{jk}^2(x)\,dx}. \tag{1.8}$$

Для определения собственных частот ω_{cjk}, форм колебания Y_{jk}, а также углов поворота $\frac{\partial Y_{jk}}{\partial x}$ и кривизны $\frac{\partial^2 Y_{jk}}{\partial x^2}$ такого стержня удобно применять интегральные уравнения [1]. Решение системы (1.7) имеет вид

$$\varphi_{jk}(t) = \frac{V_{j-1,k}}{\omega_{cjk}} \sin \omega_{cjk}(t - t_{j-1}) - \frac{S_{jk}}{\omega_{cjk}^2} [1 - \cos \omega_{cjk}(t - t_{j-1})], \tag{1.9}$$

$$k = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

где

$$V_{j-1,k} = \frac{\int\limits_0^l \dot{y}_{j-1}(x) Y_{jk}(x)\,\partial x}{\int\limits_0^l Y_{jk}^2(x)\,dx},$$

$\dot{y}_{j-1}$ — берется в конце $j-1$-го этапа.

Полное перемещение, угол поворота и кривизна сечения в конце j-го этапа равны:

$$y_j^0 = y_{j-1}^0 + y_j; \quad \frac{\partial y_j^0}{\partial x} = \frac{\partial y_{j-1}^0}{\partial x} + \frac{\partial y_j}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 y_j^0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y_{j-1}^0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_j}{\partial x^2} \tag{1.10}$$

(в конце первого этапа $y_1^0 = f_1 + y_1$; $\frac{\partial y_1^0}{\partial x} = f_2 + \frac{\partial y_1}{\partial x}$; $\frac{\partial^2 y_1^0}{\partial x^2} = f_3 + \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}$).

Скорость движения в конце j-го этапа

$$\dot{y}_j = \sum_{k=1}^{\infty} \left[V_{j-1,k} \cos \omega_{cjk}(t - t_{j-1}) - \frac{S_{jk}}{\omega_{cjk}} \sin \omega_{cjk}(t - t_{j-1}) \right] Y_{jk}. \tag{1.11}$$

Приращение поперечной силы при движении на j-ом этапе

$$Q_j = \frac{\partial}{\partial x} \left[EI_j(x) \frac{\partial^2 y_j}{\partial x^2} \right]. \tag{1.12}$$

Приращение касательных напряжений на контактных поверхностях в текущем сечении нерасслоенного участка стержня на j-ом этапе движения будет

$$\Delta\tau_j(x) = \frac{3}{2} \frac{q(q+2)}{2(q+1)^3 h} Q_j, \tag{1.13}$$

где $$q = 2\frac{h_н}{h}.$$

Полное значение касательных напряжений на контактных поверхностях запишется реккурентным соотношением

$$\tau_j(x) = \tau_{j-1}(x) + \Delta\tau_j(x). \qquad (1.14)$$

Момент наступления расслоения на j-ом этапе движения в любом сечении x определяется из равенства

$$|\tau_j(x)| = \mu p(x), \qquad (1.15)$$

причем там, где на контактных поверхностях получаются касательные напряжения $|\tau_j(x)| > \mu p(x)$, их абсолютная величина принимается равной $\mu p(x)$. Нормальное напряжение в сечениях, где стержень на всех j этапах движения остался не расслоенным, будет равно

$$\sigma_{jн}(x) = E\frac{\partial^2 y_j^0}{\partial x^2} z, \qquad (1.16)$$

где z — координата высоты волокон относительно нейтральной оси.

В сечениях, где стержень расслоен, изгибающие напряжения в накладках и прокладке в конце j-го этапа движения будут равны

$$\sigma_j(x) = E\frac{\partial^2 y_j^0}{\partial x^2} z_1, \qquad (1.17)$$

здесь z_1 — координата высоты волокон относительно нейтральных осей накладок или прокладки соответственно. Кроме того, в зонах расслоения одна из накладок испытывает растяжение, другая—сжатие.

В закрытых зонах расслоения, где выполняются условия:

$$\begin{aligned} x = x_{kj}\,;\ \Delta U_1(x_{kj}) &= U_1\left(x_{kj}, \frac{h_н}{2}\right) - U_2\left(x_{kj}\,,\ -\frac{h}{2}\right) = 0;\\ \Delta U_2(x_{kj}) &= U_2\left(x_{kj}, \frac{h}{2}\right) - U_3\left(x_{kj}\,,\ -\frac{h_н}{2}\right) = 0; \end{aligned} \qquad (1.18а)$$

и

$$\begin{aligned} x = x_{k+1,\,j}\,;\ \Delta U_1(x_{k+1,\,j}) &= U_1\left(x_{k+1,j}, \frac{h_н}{2}\right) - U_2\left(x_{k+1,\,j}\,,\ -\frac{h}{2}\right) = 0;\\ \Delta U_2(x_{k+1,\,j}) &= U_2\left(x_{k+1,j}, \frac{h}{2}\right) - U_3\left(x_{k+1,\,j},\ -\frac{h_н}{2}\right) = 0 \end{aligned} \qquad (1.18б)$$

полное напряжение от изгиба и растяжения в одной из накладок в конце j-го этапа будет равно

$$\sigma_{jp}(x) = E\frac{\partial^2 y_j^0}{\partial x^2} z_1 + \frac{1}{h_н}\left(\int\limits_{x_{kj}}^{x} \tau_j(x)\,dx + T_j\right) \qquad (1.19)$$

а в другой

$$\sigma_{jp}(x) = E\frac{\partial^2 y_j^0}{\partial x^2}z_1 - \frac{1}{h_{\text{н}}}\left(\int\limits_{x_{kj}}^{x}\tau_j(x)\,dx + T_j\right). \tag{1.20}$$

В формулах (1.18) — (1.20) x_{kj} и $x_{k+1,\,j}$ — границы любой k-ой зоны в конце j-го этапа движения, ΔU_1 и ΔU_2 — взаимные скольжения на контактных поверхностях стержня.

Растягивающая сила T_j определяется из условий (1.18а) и (1.18б) в виде

$$T_j = \frac{1}{x_{k+1,\,j} - x_{kj}}\left\{E\cdot\frac{h_{\text{н}}}{2}(h_{\text{н}}+h)\left[\left(\frac{\partial y_j^0}{\partial x}\right)_{x=x_{k+1,\,j}} - \left(\frac{\partial y_j^0}{\partial x}\right)_{x=x_{kj}}\right] - \int\limits_{x_{kj}}^{x_{k+1,\,j}}\int\limits_{x_{kj}}^{x}\tau_j(x)\,dx\,dx\right\}. \tag{1.21}$$

При выводе формулы (1.21) учтено, что ось z направлена вниз. Полные нормальные напряжения в накладках в открытой зоне расслоения, где условия (1.18а), либо (1.18б), либо те и другие одновременно не выполняются, легко могут быть получены из (1.19) и (1.20) при $T_j=0$.

Нормальное напряжение в сечениях, где стержень на каких-то этапах движения был расслоен и номер m последнего этапа, на котором сечение еще оставалось расслоенным, меньше j, будет равно

$$\sigma^*_{j\text{н}}(x) = \sigma_{mp}(x) + Ez\sum_{i=m+1}^{i=j}\frac{\partial^2 y_j}{\partial x^2}. \tag{1.22}$$

Разъясним теперь смысл эквивалентного момента инерции расслоенного сечения $I_{\text{экв}}(x)$.

Изгибающий момент в расслоенном сечении в конце j—1-го этапа запишется в виде

$$M_{j-1}(x) = \frac{1}{6}E\frac{\partial^2 y_{j-1}^0}{\partial x^2}\left(h_{\text{н}}^3 + \frac{h^3}{2}\right) + (h_{\text{н}}+h)\left(\int\limits_{x_{k,\,j-1}}^{x}\tau_{j-1}(x)\,dx + T_{j-1}\right). \tag{1.23}$$

С другой стороны можно принять

$$M_{j-1}(x) = EI_{j-1\,\text{экв}}(x)\frac{\partial^2 y_{j-1}^0}{\partial x^2}. \tag{1.24}$$

Приравняв правые части равенств (1.23) и (1.24), получим

$$I_{j-1,\,\text{экв}}(x) = \frac{1}{6}\left(h_{\text{н}}^3 + \frac{h^3}{2}\right) + \frac{h_{\text{н}}+h}{E}\cdot\frac{T_{j-1} + \int\limits_{x_{k,\,j-1}}^{x}\tau_{j-1}(x)\,dx}{\dfrac{\partial^2 y_{j-1}^0}{\partial x^2}}. \tag{1.25}$$

В соответствии с принятым методом решения задачи считаем, что на всем j-ом этапе движения эквивалентный момент инерции расслоенного сечения равен $I_{j-1экв}(x)$ и только в конце этапа скачкообразно изменяется до $I_{jэкв}(x)$.

Определив характер движения по приведенным формулам последовательно на каждом этапе, построим кривую затухающих колебаний, продолжающихся до тех пор, пока на каком-то d-ом ($d=1, 2, 3, ...$) размахе стержень сможет выполнить только первый этап движения. Начиная с этого момента, он будет совершать незатухающие колебания с амплитудой

$$A_d(x) = \frac{1}{2}\left[y^0_{d-1}(x, t_{d-1}) - y^0_d(x, t_d)\right] \tag{1.26}$$

относительно положения

$$B_d(x) = \frac{1}{2}\left[y^0_{d-1}(x, t_{d-1}) - y^0_i(x, t_d)\right]. \tag{1.27}$$

Момент времени t_d определяется из условия, что во всех сечениях одновременно

$$\begin{aligned} &\dot{y}(x, t_d) = 0, \\ &|\tau_d(x, t_d)| < \mu p(x). \end{aligned} \tag{1.28}$$

2. Алгоритм численного решения

Величины допустимого приращения зон расслоения на каждом этапе движения $\triangle Cj$ ($j=1, 2, 3, ...$) выбираются из условия достижения заданной точности решения задачи. В общем случае считаем известными границы зон расслоения стержня в начальный момент времени $t_0=0$. Кроме того, не нарушая общности задачи, можно принять, что величины зон, возникающих в стержне в процессе свободных колебаний, меньше начальных. Тогда выбор допустимых приращений $\triangle Cj$ подчиняем следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\frac{C_{0\,min}}{\alpha} \geqslant \Delta C_{min}; \\ &\Delta C_j = \beta_j\, \Delta C_{min} \quad (\beta_j = 1,\ 2,\ 3,\ ...), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где α — достаточно большое положительное число;

$C_{0\,min}$ — минимальная начальная зона расслоения;

ΔC_{min} — минимальная допустимая величина приращения зоны расслоения.

При достаточно большом α можно обеспечить любую заданную точность решения, т. к. при $\alpha \to \infty$ решение стремится к точному. Задачу можно решить последовательными приближениями, задавая $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$.

Разобьем длину стержня на i равных интервалов:

$$i = \frac{\gamma l}{\Delta C_{min}}, \tag{2.2}$$

где γ — целое число.

Получим координаты сечений стержня x_0, $x_1 = \frac{\Delta C_{\min}}{\gamma}$, $x_2 = \frac{2\Delta C_{\min}}{\gamma}$, ...

$$\ldots, \; x_r = \frac{r\Delta C_{\min}}{\gamma}, \ldots, \; x_i = \frac{i\Delta C_{\min}}{\gamma} = l,$$

в которых, начиная с $t_0=0$, определим касательные напряжения на контактных поверхностях в последовательные промежутки времени по формуле (1.14).

На первом этапе движения стержень рассматривается как монолитная балка. В результате определяем такой момент времени t_1, когда в каких-то

$$\varepsilon_1 = \frac{\gamma \Delta C_1}{\Delta C_{\min}} \tag{2.3}$$

смежных сечениях x_r, x_{r+1}, x_{r+2}, ..., $x_{r+\varepsilon_1+1}$ касательные напряжения на контактных поверхностях будут удовлетворять условию

$$|\tau_1(x, t_1)| \geqslant \mu p(x). \tag{2.4}$$

При этом может оказаться, что в момент времени t_1 условия (2.4) выполняются еще в m_1-1 группах смежных сечений. Следовательно, в момент времени t_1 в стержне может быть m_1 зон расслоения ($m_1 = 1, 2, \ldots$), величина которых благодаря (2.1), (2.2), (2.3) будет $\leqslant \Delta C_1$.

Для времени $t=t_1$ с помощью условия (2.4) уточняются границы m_1 зон расслоения. С момента времени t_1 начинается второй этап движения, на котором стержень рассматривается как балка с m_1 зонами расслоения. Далее определяется момент t_2, когда у одной (или нескольких) из m_1 зон расслоения в смежных ε_2' сечениях слева и ε_2'' сечениях справа будет выполняться условие (2.4).

$$\varepsilon_2' + \varepsilon_2'' = \varepsilon_2 = \frac{\gamma \Delta C_2}{\Delta C_{\min}}.$$

В этот момент времени может появиться еще m_2-m_1 новых групп смежных сечений, в которых выполняется условие (2.4), причем в каждой группе должно быть не больше ε_2 сечений.

Следовательно, в момент времени t_2 в стержне будет m_2 зон расслоения, благодаря (2.1), (2.2), (2.5), получивших приращение $\leqslant \Delta C_2$. При $t=t_2$ опять уточняются границы этих зон.

Схема описания движения стержня на любом j-ом этапе принципиально не отличается от таковой на втором этапе.

Когда приращение касательных напряжений (1.13) на любом j-ом этапе в расчетных сечениях внутри зоны расслоения меняет свой знак, в этих сечениях расслоение исчезает. Если исчезнувшая зона больше или равна ΔC_j, то с этого момента времени t_j начинается новый этап движения. Может оказаться, что на каком-то f-ом этапе стержень по всем сечениям достигнет крайнего отклонения (одночастотные колебания). В этом случае для всех сечений приращение касательных напряжений (1.13) изменит свой знак. С момента t_f^*, для которого выполняются условия

$$\dot{y}_f(x, t_f^*) = 0, \quad t_{f-1} \leqslant t^* \leqslant t_f, \tag{2.6}$$

стержень начнет второй размах.

Движение стержня на первом размахе и на любом последующем описывается полученными в § 1 соотношениями: приращения и полные величины прогибов, углов поворота, кривизны сечений, касательных напряжений в конце каждого этапа определяются по формулам (1.5), (1.6), (1.10), (1.13), (1.14), нормальные напряжения — по формулам (1.16), (1.19), (1.20), (1.22), эквивалентный момент инерции — по формуле (1.25) и скорость — по формуле (1.10).

На каком-то *d-ом* размахе ($d=1, 2, 3,...$) стержень сможет совершать только незатухающие колебания с амплитудой (1.26) относительно положения (1.27).

Отметим, что во многих частных случаях решение задачи и расчет на ЭЦВМ упростится, т. к. в этих случаях может быть известен целый ряд дополнительных условий, обеспечивающих рациональный выбор $\triangle C_j$, например, порядок возникновения и расположение зон в процессе свободных колебаний, направление их преимущественного роста и относительная скорость роста каждой зоны по сравнению со скоростью роста других зон на различных этапах движения системы.

3. Оценка погрешности решения задачи

Оценка погрешности метода производится в общем случае способом сравнения решений в первом, втором и т. д. приближениях.

В частном случае, когда зоны расслоения в процессе свободных колебаний распространяются симметрично относительно места их возникновения, для оценки погрешности можно построить еще одно решение задачи, которое вместе с описанным даст большие и меньшие по сравнению с точным значения наибольшего отклонения и времени размаха. Это решение строится следующим образом. За время окончания первого этапа t_1 принимается момент первого расслоения в каком-то из расчетных сечений. С точностью до шага задания времени этот момент известен из предыдущего расчета, но он может быть подсчитан и более точно. Начиная с t_1, на втором этапе движения стержень рассматривается как балка с m_1 зонами расслоения, найденными в предыдущем решении. Второй этап заканчивается в момент t_2, когда на границах какой-нибудь из m_1 зон выполнится условие расслоения (2.4). Третий этап, на котором стержень рассматривается как балка с m_2 зонами расслоения, закончится в момент времени t_3, когда на границах какой-нибудь из m_2 зон выполнится условие (2.4), и т. д. Возможно, что крайнего отклонения стержень достигнет на другом этапе движения, чем в решении § 2. Если число этапов на данном размахе больше, то начиная с f+1-го этапа решается задача сначала способом § 2, а затем, после определения границ m_{f+1}, m_{f+2}... зон на всех последующих этапах, используется способ, рассмотренный в данном параграфе. Этот прием необходимо применять до тех пор, пока число этапов на рассматриваемом размахе при решении обоими способами не станет одинаковым. Если число этапов меньше, то в решении задачи способом § 3 никаких затруднений не возникает. При решении способом § 2 стержень на всех этапах движения получается «жестче» реального, а при решении способом § 3, начиная со второго этапа, — всегда «мягче». Поэтому точное решение лежит между решениями § 2 и § 3.

В заключение отметим, что указанный способ оценки погрешности можно применять также при отсутствии симметричности роста зон, только в этих случаях за время окончания j-го этапа следует принимать момент выполнения условия (2.4) на одной из границ какой-нибудь из известных m_{j-1} зон расслоения.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Гуров. Расчеты на прочность и колебания в ракетных двигателях. Машиностроение, 1966.