

В. П. ФИЛЁКИН

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СОСТАВНОГО СТЕРЖНЯ С МАССОЙ НА КОНЦЕ

Колебания составного стержня отображают динамическое деформирование фланцевых, шовных соединений. Рассмотрение свободных колебаний составного стержня позволяет получить закон затухания колебаний, зависимость частоты свободных колебаний от амплитуды, а также выявить соответствие между рассеянием энергии при статическом деформировании составного стержня и рассеянием при колебаниях в форме коэффициентов рассеяния. Это позволит установить возможность использования статических коэффициентов рассеяния энергии при расчете демпфирования колебаний, экспериментальное определение которых намного проще и точнее.

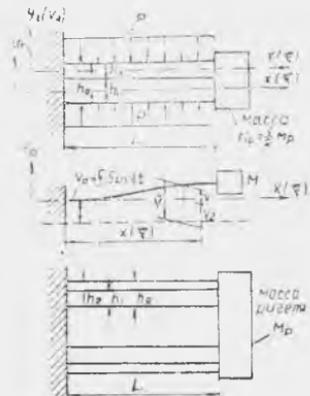
1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Пусть составной стержень постоянного сечения толщиной h_0 , шириной b и длиной l (фиг. 1) с массой M_0 на конце совершает свободные колебания в одной из главных плоскостей изгиба. Стержень состоит из двух полос толщиной h_1 и h_2 , сжимаемых равномерной погонной сдвливающей нагрузкой pb . Будем полагать, что поперечные размеры стержня малы по сравнению с его длиной, тогда дифференциальное уравнение свободных колебаний составного стержня может быть получено из дифференциального уравнения упругой линии балки, которое в нашем случае для каждого стержня запишется [1]:

$$\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial m}{\partial x} = q. \quad (1)$$

Применим принцип Даламбера, т. е. будем считать, что стержни h_1 и h_2 нагружены силами инерции интенсивности:

$$q_{i1} = -\rho b h_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}; \quad q_{i2} = -\rho b h_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}. \quad (2)$$

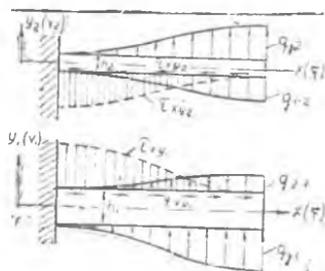


Фиг. 1.

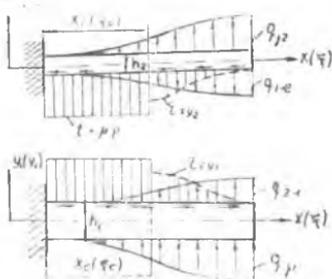
Кроме того, в погонную нагрузку q войдут распределенные усилия динамического взаимодействия между стержнями h_1 и h_2 (фиг. 2).

$$q_1 = q_{j_1} + q_{2-1}; \quad q_2 = q_{j_2} + q_{1-2}. \quad (3)$$

Распределенный момент m , действующий на стержни h_1 и h_2 от касательных усилий в контактирующем слое, будет различным в различных фазах колебания составного стержня. В фазе до скольжения распределенный момент будет определяться распределением касательных усилий, как в целой балке (фиг. 2).



Фиг. 2.



Фиг. 3.

$$m_1 = -\frac{\Delta E h_0^3 b}{4(1+\Delta)^3} \cdot \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3}; \quad m_2 = -\frac{\Delta^2 E h_0^3 b}{4(1+\Delta)^3} \cdot \frac{\partial^3 v_2}{\partial x^3}. \quad (4)$$

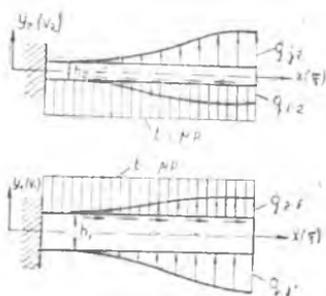
В фазе распространения скольжения величина распределенного момента будет различной на отдельных участках стержней (фиг. 3).

На участке $0 \leq x \leq x_c$.

$$m_1 = -\frac{t h_0 b}{2(1+\Delta)} \operatorname{sign} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x}; \quad m_2 = -\frac{\Delta t h_0 b}{2(1+\Delta)} \operatorname{sign} \frac{\partial^2 v_2}{\partial t \partial x}. \quad (5)$$

На участке $x_c \leq x \leq l$

$$m_1 = -\frac{\Delta E h_0^3 b}{4(1+\Delta)^3} \cdot \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3}; \quad m_2 = -\frac{\Delta^2 E h_0^3 b}{4(1+\Delta)^3} \cdot \frac{\partial^3 v_2}{\partial x^3}. \quad (6)$$



Фиг. 4.

В фазе полного скольжения величина распределенного момента определяется на основе закона Амонтона значением предельных сил трения $t = \tau \rho$ (фиг. 4).

$$m_1 = -\frac{t h_0 b}{2(1+\Delta)} \cdot \operatorname{sign} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x};$$

$$m_2 = -\frac{\Delta t h_0 b}{2(1+\Delta)} \cdot \operatorname{sign} \frac{\partial^2 v_2}{\partial t \partial x}. \quad (7)$$

При этом предполагается, что погонные усилия динамического взаимодействия стержней q_{1-2} и q_{2-1} малы по

сравнению с погонной сдвигающей нагрузкой ρb , т. е. величина предельных погонных сил трения $\mu \rho b$ не меняется при колебаниях.

Делая подстановку выражений (2) — (7) в уравнение (1), а также выражения изгибающего момента $M = EJ_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ и учитывая, что $q_{1-2} = -q_{2-1}$, а из условия прилегания стержней h_1 и h_2 по контактирующей поверхности $v_1 = v_2 = v$, получим уравнение свободных колебаний составного стержня.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + e \frac{EJ_0}{m_0 l^4} \cdot \frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4} = \varepsilon R \left(\frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4}, \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \xi} \right), \quad (8)$$

где обозначено:

$$m_0 = \rho b h_0; \quad \Delta = h_2/h_1; \quad e = \frac{1 + \Delta^3}{(1 + \Delta)^3}; \quad \xi = x/l;$$

$\varepsilon R \left(\frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4}, \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \xi} \right)$ — возмущающая функция; ε — некоторый малый параметр.

Возмущающая функция имеет следующие значения:

1. Фаза до скольжения

$$\varepsilon R \left(\frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4}, \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \xi} \right) = - \frac{3\Delta EJ_0}{(1 + \Delta)^2 m_0 l^4} \cdot \frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4}.$$

2. Фаза распространения скольжения

На участке $0 \leq \xi \leq \xi_c$

$$\varepsilon R \left(\frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4}, \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \xi} \right) = - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{th_0 b}{2m_0 l} \cdot \text{sign} \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \xi} \right).$$

На участке $\xi_c \leq \xi \leq 1$

$$\varepsilon R \left(\frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4}, \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \xi} \right) = - \frac{3\Delta EJ_0}{(1 + \Delta)^2 m_0 l^4} \cdot \frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4}.$$

3. Фаза полного скольжения

$$\varepsilon R \left(\frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4}, \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \xi} \right) = - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{th_0 b}{2m_0 l} \cdot \text{sign} \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \xi} \right).$$

Дифференциальное уравнение (8) свободных колебаний составного стержня является нелинейным, решение его для начальных условий общего типа представляет весьма сложную задачу. Как показано в ряде работ [2, 3], наличие сил сопротивления, а также внешних возмущающих сил, приводит к быстрому установлению одночастотных колебаний. Более близкое приближение к одночастотным режимам будут иметь свободные колебания упругих систем, у которых начальная деформированная форма (при $t = 0$, $v = v(\xi)$, $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$) близка к собственной форме консервативной системы, соответствующей данной частоте. Поэтому решение нелинейного уравнения (8) может быть проведено в форме, аналогичной для системы с одной степенью свободы в обобщенных координатах.

Для решения применим метод [2] асимптотических разложений по степеням малого параметра ϵ . Решение в нулевом ($\epsilon=0$) приближении [3, 4] запишется:

$$v = aY(\xi) \cos \psi \quad (9)$$

где: $a = \text{const}$, $\psi = \omega t + \theta_0$ — амплитуда и фаза свободных колебаний. Частота свободных колебаний ω определяется:

$$\omega^2 = \alpha^4 e \frac{EJ_0}{m_0 l^4},$$

а функция прогиба $Y(\xi)$ и корень характеристического уравнения α определяются из уравнения [4, 5]:

$$\frac{d^4 Y(\xi)}{d\xi^4} - \alpha^4 Y(\xi) = 0,$$

при граничных условиях в нашем случае (фиг. 1):

$$Y(0) = 0; Y'(0) = 0,$$

$$Y'(1) = 0, M_0 \left. \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right|_{x=1} = EJ_0 e \left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_{x=1}.$$

2. РЕШЕНИЕ В ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТАХ

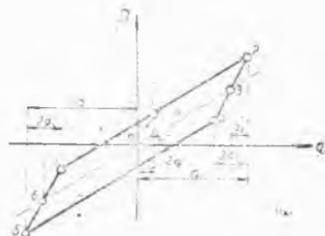
Примем за обобщенную координату q прогиб конца стержня (фиг. 1), т. е. $v(\xi=1, t)$, тогда

$$q = a \cos \psi \quad (10)$$

а уравнение (9) с учетом (10) запишется:

$$v(\xi, t) = Y(\xi) q. \quad (11)$$

Будем полагать, что динамический цикл совпадает по форме со статическим циклом, что соответствует пренебрежению изменением перерезывающих сил по длине стержня в сравнении с величиной перерезывающей силы от инерции сосредоточенной массы на конце стержня ($\xi=1$). Таким образом, полагаем, что фаза скольжения наступает одновременно по всей длине составного стержня при значении обобщенной координаты q , величину которой приравняем величине прогиба, соответствующего началу скольжения при статическом деформировании (фиг. 5).



Фиг. 5.

Для составления дифференциального уравнения свободных колебаний составного стержня в обобщенных координатах запишем выражения потенциальной энергии.

Фаза до скольжения (фиг. 5, линия 0—1).

Фаза до скольжения (фиг. 5, линия 0—1).

$$P_{01} = \frac{E J_0}{2l^3} q^2 \int_0^1 \left(\frac{d^2 Y}{dz^2} \right)^2 dz, \quad (12)$$

Фаза скольжения (фиг. 5, линия 1—2).

$$P_{12} = \frac{E (J_1 + J_2)}{2l^3} (q^2 - q_c^2) \int_0^1 \left(\frac{d^2 Y}{dz^2} \right)^2 dz + \frac{E J_0}{2l^3} q_c^2 \int_0^1 \left(\frac{d^2 Y}{dz^2} \right)^2 dz. \quad (13)$$

Выражение кинетической энергии запишется:

$$T = \frac{1}{2} \left(\rho b h_0 l \int_0^1 Y^2 dz + M_0 \right) \dot{q}^2. \quad (14)$$

Обобщенная сила трения [6] запишется:

$$Q = -R \operatorname{sign} \frac{dq}{dt}, \quad \text{где } R = \frac{1}{2} \nu \rho b h_0. \quad (15)$$

Делая подстановку выражений (12) — (15) в уравнение Лагранжа, получим дифференциальные уравнения свободных колебаний составного стержня в обобщенных координатах. В фазе до скольжения

$$m_{\text{пр.}} \frac{d^2 q}{dt^2} + C_{0\text{пр.}} q = 0. \quad (16)$$

В фазе скольжения

$$m_{\text{пр.}} \frac{d^2 q}{dt^2} + C_{12\text{пр.}} q = -R \operatorname{sign} \frac{dq}{dt}, \quad (17)$$

где

$$\operatorname{sign} \frac{dq}{dt} = \begin{cases} +1, & \text{при } \frac{dq}{dt} > 0, \\ -1, & \text{при } \frac{dq}{dt} < 0 \end{cases}$$

и после вычисления интегралов [4] выражений (12) — (15) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} m_{\text{пр.}} &= \frac{\rho b h_0 l}{4} [1 + \gamma + (1) Y^{112}], \\ C_{0\text{пр.}} &= E \lambda^3 b \frac{\alpha^4}{48} [1 + \gamma + (1) Y^{112}], \\ C_{12\text{пр.}} &= e E \lambda^3 b \frac{\gamma^4}{48} [1 + \gamma + (1) Y^{112}], \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

а величины $\gamma = M_0/m_0 l$ и $\lambda = h_0/l$.

Уравнения (16), (17) запишем в более общей форме:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega^2 q = \varepsilon f \left(q, \frac{dq}{dt} \right), \quad (19)$$

где $\omega^2 = \frac{C_{12\text{пр.}}}{m_{\text{пр.}}}$, а значения возмущающей функции

$\varepsilon f\left(q, \frac{dq}{dt}\right)$ приведены в таблице 1.

Таблица 1

Участок цикла	q	$\cos \psi$	ψ	$\varepsilon f\left(q, \frac{dq}{dt}\right)$
2-4	$q_c(k-2) \leq q \leq q, k$	$\frac{k-2}{k} \leq \cos \psi \leq +1$ $\cos \psi_4 = \frac{k-2}{k}$	$0 \leq \psi \leq \psi_4$ $\psi_4 = \arccos \frac{k-2}{k}$	$\omega^2 \frac{1-e}{e} [q_c(k-1) - q]$
4-5	$-q, k \leq q \leq q_c(k-2)$	$-1 \leq \cos \psi \leq \frac{k-2}{k}$	$\psi_4 \leq \psi \leq \pi$	$-\omega^2 \frac{1-e}{e} q_c \operatorname{sign} \frac{dq}{dt}$
5-7	$-q_c k \leq q \leq -q_c(k-2)$	$-1 \leq \cos \psi \leq -\frac{k-2}{k}$ $\cos \psi_7 = -\frac{k-2}{k}$	$\pi \leq \psi \leq \psi_7$ $\psi_7 = \pi + \arccos \frac{k-2}{k}$	$-\omega^2 \frac{1-e}{e} [q_c(k-1) + q]$
7-2	$-(k-2) \leq q \leq q, k$	$-\frac{k-2}{k} \leq \cos \psi \leq +1$	$\psi_7 \leq \psi \leq 2\pi$	$-\omega^2 \frac{1-e}{e} q_c \operatorname{sign} \frac{dq}{dt}$

Решение уравнения (19) может быть записано [2] в форме разложения по степеням малого параметра ε .

$$q = a \cos \psi + \varepsilon q_1(a, \psi) + \varepsilon^2 \dots, \quad (20)$$

где

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 \dots,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 \dots \quad (21)$$

Коэффициенты $A_1(a)$, $B_1(a)$ определяются выражениями [2]:

$$A_1(a) = -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi. \quad (22)$$

$$B_1(a) = -\frac{1}{2\pi a\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi. \quad (23)$$

Вычисляя интегралы (22), (23) с учетом значений возмущающей функции (табл. 1) и вводя обозначение: $k = a/q_c$ — относительная амплитуда прогиба, получим:

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{2\omega(1-e)(k-1)}{\pi e k}. \quad (24)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega \left\{ 1 + \frac{1-e}{2\pi e} \left[\arccos \frac{k-2}{k} - 2 \frac{k-2}{k^2} \sqrt{k-1} \right] \right\} \quad (25)$$

Интегрируя выражение (24) при начальных условиях (при $t=0, k=k_0$), получим зависимость относительной амплитуды прогиба k от времени.

$$(k-1) + \ln(k-1) = (k_0-1) + \ln(k_0-1) - 4 \frac{1-e}{\varepsilon} \tau, \quad (26)$$

где $\tau = \omega t / 2\pi$ — относительное время.

Зависимость частоты от относительной амплитуды определим по методу эквивалентной линеаризации [2] с точностью до величины второго порядка малости (до ε^2).

$$\omega(k) = \omega\varphi, \quad (27)$$

где

$$\varphi^2 = 1 + \frac{1-e}{\pi\varepsilon} \left[\arccos \frac{k-2}{k} - 2 \frac{k-2}{k^2} \sqrt{k-1} \right]. \quad (28)$$

Для оценки области применения полученных формул (26) — (28) выявим значение малого параметра ε , которое до сих пор принималось равным единице, путем сравнения величины возмущающей функции с «главными членами» дифференциального уравнения (19). Для этого амплитудное значение возмущающей функции (табл. 1) поделим и умножим на $\omega^2 a$, тогда можно будет записать:

$$\left[\varepsilon f \left(q, \frac{dq}{dt} \right) \right]_{\max} = \varepsilon \omega^2 a,$$

и величина малого параметра выразится:

$$\varepsilon = \frac{1-e}{e} \cdot \frac{1}{k}. \quad (29)$$

Выражения (26) — (28) будут тем точнее отображать параметры рассматриваемого колебательного процесса, чем меньше амплитудное значение будет иметь возмущающий член $\varepsilon f \left(q, \frac{dq}{dt} \right)$ по сравнению с амплитудным значением «главных членов» уравнения (19), т. е. чем меньше единицы будет величина малого параметра ($\varepsilon < 1$).

Беря за границу области применимости выражений (26) — (28) значение $\varepsilon = 1$, определим минимальные значения относительных амплитуд k_{\min} (фиг. 6) из выражения (29):

$$k_{\min} > \frac{1-e}{e} = \frac{3\gamma}{1-\Delta+\Delta^2}. \quad (30)$$

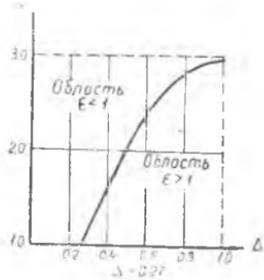
Таким образом, в первом приближении будем иметь:

$$v(z, t) = aY(z) \cos \psi,$$

где a и ψ определяются выражениями (25), (26).

Определим зависимость амплитуд свободных колебаний от величины коэффициента рассеяния ψ , записанного для статического цикла [6].

Рассматривая баланс работ за половину цикла, можно записать (фиг. 5):



Фиг. 6.

$$W_{\tau} - \frac{1}{4} W_{\tau} \psi_{\tau} - \frac{1}{4} W_{(\tau + \frac{1}{2})} \psi_{(\tau + \frac{1}{2})} = W_{(\tau + \frac{1}{2})}. \quad (31)$$

После преобразований с учетом зависимости коэффициента рассеяния из [6], получим выражение относительной амплитуды прогиба $K_{(\tau + \frac{1}{2})}$ через половину периода в зависимости от начального значения относительной амплитуды K_{τ} .

$$K_{(\tau + \frac{1}{2})} = \frac{1-e}{e} \left[\sqrt{\left(\frac{e}{1-e} k_{\tau} - 1\right)^2 + 4 \frac{e}{1-e} - 1} \right]. \quad (32)$$

Если определить коэффициент рассеяния ψ как отношение циклической работы рассеяния ΔW к амплитудному значению потенциальной энергии W при отсутствии сил трения по контактирующему слою в составном стержне ($\nu p = 0$), то выражение коэффициента рассеяния получит вид:

$$\psi = 8 \frac{(1-e)(k-1)}{ek^2}. \quad (33)$$

С учетом (33) выражение (24) может быть записано:

$$\frac{dk}{dt} = - \frac{\omega}{4\pi} \psi k. \quad (34)$$

Если положить $\psi = \text{const}$, что имеет место в случае линейной зависимости силы сопротивления от скорости, то из уравнения (34) получим:

$$k = k_0 e^{-\psi \tau / 2} = k_0 e^{-\delta \tau}, \quad (35)$$

где $\delta = \frac{1}{2} \psi$ — логарифмический декремент затухания.

Уравнение (35) отображает линейную систему, которой приближенно будет соответствовать наша система при весьма малых Δ и больших k , т. е. при $\epsilon \ll 1$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

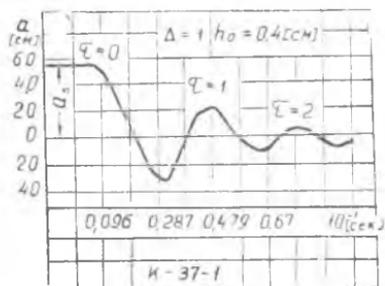
Экспериментальная проверка полученных выше соотношений была проведена путем осциллографирования затухающих колебаний составных стержней. Экспериментальная установка (фиг. 7), описанная в [6], представляет собой однопролетную раму, стойки которой являются составными стержнями (фиг. 1), а ригель — колеблющейся массой. Установка смонтирована на плите, с кото-



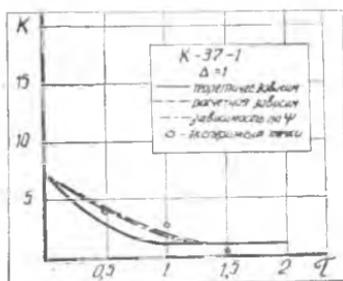
Фиг. 7.

рой она подвешивается на тросах (фиг. 7) к раме для уменьшения потерь энергии при колебаниях. Свободные колебания вызывались внезапным удалением силы — пережиганием проволоки, создававшей предварительную деформацию стержней, с одновременным включением шлейфового осциллографа для записи колебаний. На фиг. 8 а, б приведены осциллограмма затухающих колебаний для составного стержня при $\Delta=1$ и зависимость относительных амплитуд k

от относительного времени τ в процессе затухания колебаний где точки показаны экспериментальные значения, пересчитанные по осциллограмме фиг. 8а. Сплошной линией (фиг. 8б) пока-



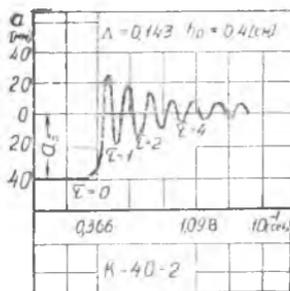
Фиг. 8а.



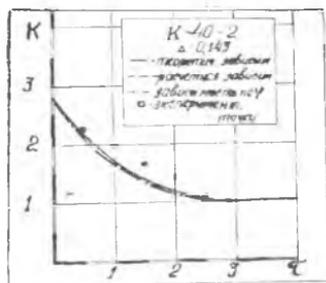
Фиг. 8б.

зана зависимость по уравнению (26) при теоретическом значении относительной жесткости $e = \frac{1 + \Delta^3}{(1 + \Delta)^3}$, а пунктиром — зависимость по уравнению (26) при экспериментальном значении относительной жесткости $e_{эк}$, определенному из расчета статического цикла: штрих — пунктирная линия представляет зависимость (32), определенную при экспериментальном значении относительной жесткости $e_{эк}$. На фиг. 9 а приведена осциллограмма затухающих колебаний для стержня при $\Delta=0,143$, а на фиг. 9 б — зависимость относительных амплитуд k от относительного времени для этой же компоновки, построенные в том же порядке, что и на фиг. 8 б.

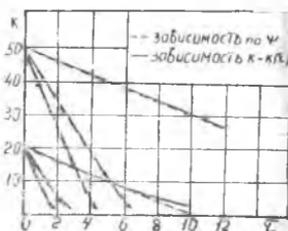
Как видно из фиг. 8, 9, экспериментальные значения удовлетворительно совпадают с теоретическими зависимостями $k=k(\tau)$, несмотря на большое значение малого параметра ϵ , т. е. значения



Фиг. 9а.



Фиг. 9б.



Фиг. 10.

малого параметра соизмеримые с единицей (при $\Delta=1$ начальное значение малого параметра, соответствующее $\kappa_0=3$, равно $\epsilon_0=0,66$, а при $\Delta=0,143$ и $\kappa_0=7$ $\epsilon_0=0,05$).

Из фиг. 8, 9 видно, что при таких значениях малого параметра отгибающиеся осциллограммы свободных затухающих колебаний, определяемые уравнением (26), искривляются. Для сравнения на фиг. 10 приведены расчетные зависимости по уравнениям (26), (32) при больших значениях относительных амплитуд κ_0 и различных Δ , откуда видно, что при уменьшении соотношения толщины стержней (уменьшение Δ) затухание уменьшается, а также появляется слабое искривление зависимости $\kappa=\kappa(\tau)$ при $\kappa \sim 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Затухание колебаний в составном стержне, характеризующее рассеяние энергии или демпфирование колебаний, является значительным. Так, например, полное затухание колебаний составного стержня, совершающихся со скольжением (фиг. 8 а, б) при $\Delta=1$, происходит примерно за 1,25 цикла ($\tau=1,25$), а при $\Delta=0,143$ полное затухание (фиг. 9 а, б) равно 2,5 цикла ($\tau \approx 2,5$).

2. Зависимость амплитуд затухающих колебаний по времени, полученная по выражениям статических коэффициентов рассеяния (32), удовлетворительно совпадает с аналогичной зависимостью (26), полученной из рассмотрения свободных колебаний составного стержня, а также с экспериментом (фиг. 8, 9). Поэтому при расчете колебаний реальных систем, деформирующихся по схеме составного стержня, с достаточной степенью точности можно применять значения коэффициентов рассеяния, определенных по статическому циклу этих систем [5], что экспериментально получается значительно проще.

3. Затухание колебаний зависит от величины относительной жесткости ϵ (фиг. 8 б). Для более точного определения величин амплитуд колебаний необходимо вводить в расчет экспериментальные значения относительной жесткости.

4. Для получения коэффициентов рассеяния ψ (логарифмиче-

ских декрементов затухания ($\delta = \frac{1}{2}\psi$) по экспериментальным осциллограммам необходимо экспериментальную осциллограмму построить в форме зависимости относительной амплитуды k от относительного времени τ , а затем по зависимости (33) определить для каждого значения k величину коэффициента рассеяния.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Филоненко-Бородич* и др. Сопrotивление материалов (издание второе), Москва, 1940.
 2. *Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский*. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний (издание второе), Москва, 1958.
 3. *Г. С. Писаренко*. Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале. Киев, 1955
 4. *С. П. Тимошенко*. Колебания в инженерном деле. Москва, 1959. Перевод Я. Г. Пановко.
 5. *В. П. Филёкин*. Конструктивный гистерезис в составной балке при отсутствии скольжений на концах. ИВУЗ «Авиационная техника» № 1, 1960.
-